

MEMOIRES
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES,

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

TOME XI.

A PARIS,
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

MDCC. XXXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.



ANALYSE GÉNÉRALE,

OU

METHODES NOUVELLES

POUR RESOUDRE LES PROBLÊMES de tous les Genres & de tous les Degrez à l'infini.

Par M. DE LAGNY *de l'Académie Royale des Sciences, & de la Societé Royale de Londres.*

Par les Soins de M. RICHER.

Du 23. Fevrier 1732.

MONSIEUR de Lagny demande à l'Académie la Permission de faire imprimer son nouvel Ouvrage sur l'Analyse, à la suite des Ouvrages des Académiciens dans la nouvelle édition de Coignard & Compagnie, dirigée par Mr. Godin. Accordé par l'Académie le 23 Fevrier 1732. FONTENELLE, *Secretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences*

PRÉFACE.

LE Service du Roi, le progrès de la Géométrie, la perfection des Sciences Phisico-Mathématiques, & des Arts utiles à la Societé, voilà l'objet que je me propose dans cet Ouvrage. J'ai principalement en vûe de donner aux Officiers de la Marine des Méthodes pour les mettre en état de découvrir par eux-mêmes tout ce qui peut contribuer à perfectionner la Navigation ; c'est de l'Analyse que l'on doit attendre un secours si utile & si important, puisque c'est la Science de faire des découvertes, c'est un instrument universel pour résoudre les Problêmes ; mais pour s'en servir avec succès, il faut pouvoir le manier en maître, & c'est un degré auquel les Commençans ne peuvent parvenir par le se-

cours seul des Livres qui ont été publiez jusques ici sur l'Analyse.

Deux obstacles arrêtent d'ordinaire les jeunes gens ; 1°. pour le fonds, ils ne trouvent point dans ces Livres tout ce qu'ils désirent, c'est-à-dire, des Méthodes générales pour résoudre les Problêmes de tous les genres, de toutes les espéces & de tous les degrez à l'infini ; 2°. pour la forme, les Méthodes qu'ils y trouvent sont d'un accès difficile, on ne peût les pénétrer qu'après un travail long & opiniâtre de plusieurs années, ce qui rebute le plus grand nombre. C'est M[r]. le Chevalier Renau, * si connu par son zéle pour la perfection de la Marine, & qui proposoit si souvent des Problêmes sur ce sujet à l'Académie Royale des Sciences dont il étoit honoraire, qui m'a inspiré le dessein de travailler à un traité complet de l'Analyse, pour en faciliter l'étude aux Officiers de la Marine, aux Ingénieurs, & à tous ceux qui ont de l'inclination pour les Mathématiques.

Je n'ai rien trouvé de plus propre à mon dessein, que les découvertes que M[r]. de Lagny a publié dans plusieurs volumes de l'Académie Royale des Sciences, & que M[r]. de Fontenelle

* *Honoraire de l'Académie Royale des Sciences, Conseiller du Conseil de la Marine, Chevalier Grand Croix de l'Ordre Militaire de Saint Louis, & Lieutenant Général des Armées de S. M. C. mort le 30. Septembre 1719.*

a toujours accompagné d'éloges dûs à son mérite ; j'en connus d'abord tout le prix, j'y apperçûs qu'il se proposoit, comme moi, de perfectionner les Méthodes anciennes, & d'en inventer de nouvelles ; je lui communiquai mon projet, il le trouva de son goût, il le regarda comme un gage de l'estime que j'ai conçûë depuis long-tems pour sa Personne & pour ses Ouvrages ; il y répondit avec une extrême politesse, il m'en pria même avec beaucoup d'instance, & voulut bien me communiquer généreusement tous ses écrits, qui contiennent près de trente volumes in folio ; mais en même tems, il m'a rendu le maître de leur donner la forme, que je jugerois la plus propre à les rendre utiles au Public. J'esperois d'abord n'avoir à surmonter que la longueur du travail, mais j'ai rencontré bien d'autres difficultez.

Les Mémoires de Mr. de Lagny sont destinez pour les Sçavans du 1er. ordre, il n'est pas facile de les retoucher pour les ramener à la portée du commun des Géométres ; d'ailleurs ce sont différentes Piéces séparées, il faut d'abord les développer dans toute leur étenduë pour les mettre dans leur jour, ce qui ne fait qu'une partie du travail ; car il ne suffit pas de former chacun de ces membres séparément, il faut encore les réünir ensemble pour en composer un corps entier d'Analyse, ce qui demande un travail encore

plus long & plus difficile ; il eſt vrai que ce travail devient agréable par les nouveautez que l'on rencontre ſur ſa route ; & qui croiſſent à meſure qu'on avance. Je fais ſouvent parler Mr. de Lagny dans cet Ouvrage, & ſur-tout dans les Sections du ſecond Livre. Je voulois même lui ſacrifier tout l'honneur de mon travail, il a ſouhaité au contraire qu'il parût ſous mon nom ; mais je veux que le Public ſçache, que je ne prétend point partager avec lui la gloire de l'invention, qui lui appartient à juſte titre.

Je n'ai rien négligé, ni dans la matiére ni dans la forme, pour faciliter aux jeunes gens l'étude de l'Analyſe, je leur préſente dans ce premier volume pluſieurs Méthodes générales pour réſoudre tous les Problêmes ; j'entre dans tout le détail néceſſaire pour les développer dans toute leur étenduë, & pour en applanir toutes les difficultez Ce volume contient toutes les Régles générales de l'Analyſe ; il eſt diviſé en trois Livres qui contiennent la réſolution des Problêmes de tous les genres, de toutes les eſpéces, & de tous les degrez à l'infini.

Dans le Livre premier, j'explique d'abord ce que c'eſt que l'Analyſe, ſa nature, ſon objet, & comment elle procéde ; on y trouve enſuite la Réſolution des Problêmes déterminez ou des Equations de tous les degrez à l'infini dont les Racines ſont rationelles, je donne pour cela trois

trois Méthodes différentes. La premiére est celle des Formules, c'est l'ancienne, mais elle est expliquée dans un détail que l'on ne trouve point ailleurs, pour applanir toutes les difficultez capables d'arrêter ou d'embarrasser les Commençans. La seconde est la Méthode de résoudre les Equations par le terme dominant. Et la troisiéme est celle des Progressions Arithmétiques dont M^r. de Lagny avoit promis l'application qui se trouve ici.

Je donne dans le Livre second trois Méthodes différentes pour trouver les racines irrationelles des Problêmes déterminez & des Equations de tous les degrez à l'infini.

Ces trois Méthodes donnent les séries infinies qui expriment le plus exactement qu'il est possible les racines irrationelles; mais la troisiéme Méthode qui est celle du triangle des Rapports est la plus parfaite de toutes, parce qu'elle donne la série la plus prompte & la plus convergente qui soit possible.

Cette Méthode du triangle des Rapports me donne occasion de traiter à fonds la Science universelle des Rapports peu connuë jusques ici, ce qui fait le sujet de la cinquiéme Section du second Livre, on y voit comment les Rapports s'étendent de toutes parts à l'infini; je distingue les degrez, les genres, les espéces, simples, composées, primitives, subalternes ou dérivées;

je donne la formation de toutes leurs séries qui sont infinies; j'examine comment chaque terme en particulier de chacune de ces séries est lui-même l'origine d'autres séries infinies d'individus. Je présente sous une idée claire toute cette infinité d'infinis différens, une simple division me découvre le caractére particulier qui distingue tout à la fois le genre, l'espéce & l'individu, sans courir aucun risque de les confondre.

Le troisiéme Livre contient la résolution des Problêmes indéterminez & plus qu'indéterminez, simples ou composez de quelque nombre d'égalitez qu'ils soient composez, dans tous les degrez à l'infini.

Je donne enfin dans la Section sixiéme de ce dernier Livre, la résolution des Problêmes plus que déterminez & je cite les différens endroits de ce volume, où j'ai eu besoin d'en établir les Régles, & de les appliquer à des exemples qui en contiennent le détail. Voilà où se réduisent toutes les Régles générales de l'Analyse.

Outre cela, j'ai mis à la tête de ce volume un Traité de ma nouvelle Méthode pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, même dans le cas irréductible, par des Tables d'une construction simple & facile, j'ai lû ce Traité dans les Assemblées de l'Académie Royale des Sciences du 14 & du 17 du mois de May 1732. Je l'ai mis au commencement pour ne point

mêler cette Méthode avec celles de M^{r}. de Lagny; mais ſa place naturelle doit être à la fin du premier livre où je l'avois miſe d'abord parce que les Commençans ne la doivent point voir, qu'après qu'ils auront appris ce qui eſt contenu dans le premier Livre. J'ai ajoûté en leur faveur un Diſcours Préliminaire où j'explique ſon origine; il précéde l'Avertiſſement, dans lequel je montre ſes avantages pour réſoudre du premier coup d'œil toutes les Equations, tant dans le cas ordinaire que dans le cas irréductible, en la comparant avec la Méthode des Formules qui eſt connuë.

Comme l'Analyſe employe dans toutes ſes opérations le calcul numérique & algébrique, je ſuppoſe que le Lecteur en eſt inſtruit; il peut conſulter les Elémens que M^{r}. de Lagny en a publié en 1697, ou les Leçons de M^{r}. de Moliére, ou autres dont les Traitez ſont connus.

Si ce premier volume qui contient toutes les Régles générales de l'Analyſe eſt reçû favorablement du Public; cela me donnera de l'émulation pour mettre la derniére main aux trois autres volumes qui ſuivront de près ſur l'Analyſe particuliére, où je ferai l'application de ces mêmes Régles à toutes les parties de la Géométrie des lignes droites & des lignes courbes, c'eſt-à-dire, aux angles, aux ſurfaces & aux ſolides; on y trouvera tout ce qui appartient à la rectification & à

la quadrature des lignes courbes, &c.

Davantage, on y trouvera plusieurs Traitez utiles pour l'Astronomie & pour la Navigation, où les grands calculs sont d'un usage fréquent, qui sont encore des découvertes de Mr. de Lagny. 1°. La nouvelle Arithmétique Binaire, ou les Logarithmes naturels, pour faire toutes les opérations du calcul par simple addition ou soustraction sans aucunes Tables & sans charger sa mémoire, j'en ferai usage pour trouver les Logarithmes hyperboliques, pour les Racines des puissances imparfaites & des Equations irrationelles, pour la construction des Sinus, des Tangentes & des Sécantes, même pour les Tables Loxodromiques dont l'usage est si nécessaire & si important dans la Navigation pour déterminer la route des vaisseaux; car ces Tables se font avec plus de facilité & de précision par cette Méthode que par toute autre. 2°. J'y donnerai une nouvelle Trigonométrie Analytique plus exacte & plus simple que la Trigonométrie ordinaire. 3°. Enfin on y trouvera le calcul différentiel & le calcul intégral réduits à l'expression sensible des nombres ordinaires avec une approximation à l'infini dans les cas où la précision est impossible par la nature & l'essence même de la chose.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE

Sur les Tables pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, où j'explique la route que j'ai tenuë pour découvrir la formation de ces Tables & leur usage.

J'Ai fait un Traité fort abrégé de cette Méthode, que j'ai lû à l'Académie Royale des Sciences dans les Assemblées du 14 & du 17 du mois de Mai 1732, je l'ai mis à la tête de ce volume, pour ne point mêler cette Méthode avec celles de Mr. de Lagny; mais sa place naturelle est à la fin du premier livre, parce qu'il faut le posséder pour entendre cette Méthode, c'est pour cette raison que je l'avois placée d'abord à la fin du premier Livre.

Ce Traité contient plusieurs tables au nombre de 25, tant pour le second degré, que pour le troisiéme & le cinquiéme, ces tables sont précédées d'un Avertissement, où je montre les avantages de cette nouvelle Méthode sur la Méthode ancienne des formules, j'en fais le Paralléle tant dans le cas réductible que dans le cas irréductible. Cet Avertissement est suivi du Traité qui contient trois choses, 1°. sept Problêmes qui renferment tout ce qui regarde les formules littérales & les Equations numériques de tous les degrez à l'infini, qui sont le fondement de ces tables, 2°. la formation des tables, 3°. enfin leur usage pour résoudre les Equations.

Je tiens d'abord pour maxime de réduire une Equation proposée à son Equation primitive, ou à ses moindres termes, l'opération en est expliquée dans les pages

58 & 311, on réduit d'ordinaire les fractions à leurs moindres termes, avant d'opérer dessus, il est également naturel de faire la même préparation sur les Equations; cette idée quoique naturelle a échappé à de grands Géométres comme Hariot & Ougtrehg qui ont beaucoup écrit sur les Equations, & Mr. de Lagny est le premier qui se soit apperçu de la néceſſité & de l'importance de cette préparation.

J'expliquerai ici la route que j'ai tenuë pour découvrir la formation de mes tables & leur usage, pour ne point laiſſer de difficulté, qui soit capable d'arrêter les jeunes gens qui commencent, ce seroit s'opposer au progrés de ceux de qui l'on doit tout attendre pour la perfection des Sciences, car je suis persuadé que ceux qui poſſéderont les Méthodes que je publie pousseront encore plus loin leurs découvertes, en suivant la route qu'ils trouveront ici applanie: je n'écris point pour les sçavans Géométres, ils n'ont pas besoin de livres, ils tirent de leur propre fonds tout ce qu'ils désirent, les livres sont faits pour ceux qui veulent s'instruire, je veux leur ouvrir le chemin, & exciter en eux cette sagacité si néceſſaire pour faire éclore des véritez neuves; on sçait que Dieu a mis dans l'esprit de tous les hommes toutes les véritez géométriques, mais on ne peut les en tirer que par la force de la méditation & par le secours des calculs; il est d'une néceſſité auſſi absoluë à un Géométre de calculer beaucoup, comme à un Architecte de deſſiner beaucoup, on ne peut juger de l'effet de ses pensées que par leur expreſſion, quand on suit une vérité avec attention, soit dans le fini, soit dans l'infini, on apperçoit toutes ses progreſſions, que l'esprit ne peut & n'oseroit même soupçonner.

Voici comment j'ai découvert la formation & l'usage des tables pour résoudre les Equations; j'avois deſſein de perfectionner la Méthode ancienne des formules, de l'é-

tendre au cas irréductible du troisiéme degré, & de l'élever même au-dessus dans tous les degrez supérieurs; je crûs qu'il n'y avoit pas de meilleur moïen que de réünir dans une table pour chaque formule toutes les séries d'équations numériques qui sont infinies à l'infini. Je commençai par la troisiéme formule du second degré, dont les trois termes sont positifs, substituant chacun des nombres de la suite naturelle en commençant par le zéro, qui est le terme commun d'où partent toutes les grandeurs à la place de l'inconnuë, & leur quarré à la place de la seconde puissance de l'inconnuë, chaque substitution me donna autant d'homogénes (ou de valeurs de *b* différentes,) tels qu'ils sont dans les colonnes de l'échiquier de la premiére table du second degré.

En reïtérant les mêmes substitutions sur une valeur du cœfficient *a* différente, je trouvai aussi pour chaque valeur de *a* une colonne différente, & mettant ces colonnes les unes à côté des autres, je m'apperçus que les homogénes formoient des rangs horisontaux où regnoit une progression Arithmétique du premier degré, dont la différence premiére étoit constante & égale à la valeur de *x* du même rang horisontal, ce qui me donnoit une grande facilité pour former la table; je disposai tous ces homogénes par ordre dans un échiquier que j'entourai de deux bordures, la premiére bordure d'en haut contenoit les valeurs de *a*, qui sont la suite naturelle des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. la seconde bordure à gauche contenoit deux colonnes, la premiére pour les valeurs de *x* qui sont encore la même suite des nombres naturels, la seconde colonne pour les secondes puissances de *x* avec les quarrez naturels 0. 1. 4. 9. 16. &c. par ce moïen j'exprimai dans ma premiére table tous les trois termes des Equations; sçavoir, le premier dans la seconde colonne de la bordure à gauche, le cœfficient du second terme dans la bordure d'en haut, son inconnuë dans la premiére co-

lonne à gauche de la bordure, & l'homogéne ou le dernier terme dans l'échiquier.

Je continuai cette table très-loin en tout sens, dans le fini & même dans l'infini, ensuite je fis une table où les valeurs de *x* & celles de *a* s'étendoient jusqu'à 100, afin de considérer avec plus d'attention la marche des termes & leurs progressions, ce qui me fit découvrir une infinité de Théorêmes importans sur les Equations, les tables suivantes des autres formules & des degrez supérieurs m'en ont fourni aussi un nombre si grand, qu'il seroit ennuyeux de les rapporter, d'autant que le lecteur les trouvera de lui-même avec une extrême facilité.

Pour l'usage, ayant pris à volonté des Equations dont l'homogéne étoit contenu dans la table, & la divisant par la valeur positive de *x* du même rang qui donnoit la premiére racine positive, le quotient négatif étoit toujours égal au cœfficient *a* de la même colonne augmenté de la premiére racine *x*, ce qui donnoit la seconde racine, par ce moïen j'avois les racines rationelles.

Mais lorsque je prenois un homogéne compris dans l'interval de deux homogénes consécutifs de la table, un plus petit, l'autre plus grand, la premiére racine de chacun de ces homogénes divisoit mon Equation, mais avec un reste, négatif lorsque le diviseur étoit la racine de l'homogéne moindre, & positif lorsque le diviseur étoit la racine de l'homogéne prochain plus grand, ce qui donne les racines approchées à moins de l'unité près, puisque celles de ces deux homogénes ne différent que de l'unité, & que l'une est trop petite & l'autre trop grande, d'où je conclus comme on le trouve aussi par la formule ordinaire, que dans ce cas les deux racines sont irrationelles; voilà comment j'ai trouvé par ma table les racines irrationelles approchées à moins de l'unité près, soit pat excès, soit par défaut dans la troisiéme formule du second degré.

Il

Il s'agit présentement des quatre formules restantes du même degré ; j'ai fait une seconde table par soustraction suivant la quatriéme formule du second degré dont le second terme seul est négatif, j'ai trouvé dans cette table tous les homogénes à l'infini avec la même facilité, que par addition dans la précédente ; mais au lieu que toutes leurs séries sont infinies dans la premiére table, j'ai trouvé deux séries dans chaque rang horisontal de la seconde table, la premiére série qui est finie contient des homogénes positifs qui décroissent constamment de la valeur de *x* du même rang d'un terme au suivant, & arrivent au zéro, après lequel les homogénes sont négatifs, & croissent toujours constamment à l'infini de la même valeur de *x* du même rang horisontal, ce qui fait la seconde série qui est infinie.

Dans cette seconde table, je remarquai quatre choses.

1°. Que tous ces zéros qui séparent les séries finies des homogénes, d'avec les séries infinies, sont rangez dans la table en ligne diagonale ; de telle sorte que cette diagonale divise la table en deux triangles rectangles, l'inférieur est à gauche, le supérieur est à droite.

2°. Que les homogénes négatifs n'étoient plus dans la quatriéme formule, mais dans la cinquiéme dont le second & le troisiéme terme sont négatifs.

3°. Je m'apperçûs d'un côté que cette seconde table me donnoit les deux racines négatives pour le premier & second cas de la cinquiéme formule, la premiére de ces racines est la valeur de *x* du même rang horisontal, la seconde racine est la valeur de *a* de la même colonne que l'homogéne, diminué de la même valeur de *x*.

3°. D'un autre côté, cette table ne pouvoit me donner ni les racines de la quatriéme formule, pour laquelle je l'avois dressée, qui sont irrationelles, ni les racines pour le troisiéme cas de la cinquiéme formule qui sont imaginaires, ce qui m'obligea d'avoir recours à une seconde es-

péces de tables qui puiſſent donner ces racines, comme il ſuit ; & voilà ce qui a donné occaſion aux tables de la ſeconde eſpéce.

Les tables de la ſeconde eſpéce ſont entiérement ſemblables à celles de la premiére eſpéce, elles ſe font de la même maniére, toute la différence conſiſte en ce que les tables de la premiére eſpéce donnent la premiére racine ſur la bordure à gauche, & ne peuvent donner que les racines rationelles, & les tables de la ſeconde eſpéce donnent ſous chacun des homogénes toutes les racines telles qu'elles ſont, rationelles, ou irrationelles, ou même imaginaires.

Ainſi pour former cette ſeconde table de la ſeconde eſpéce ſur la quatriéme formule du ſecond degré, puiſque j'avois tous les homogénes dans l'échiquier, & même les deux racines négatives des homogénes compris dans le triangle ſupérieur de la table à droite; il ne reſtoit plus qu'à trouver les racines des homogénes compris dans le triangle inférieur à gauche, qui ſont égales & irrationelles dans la quatriéme formule, pour les placer ſous chacun des homogénes ; j'en cherchai les racines irrationelles par la Méthode ordinaire des formules, & je les écrivis ſous chaque homogéne ; de cette ſorte ſous chacun des homogénes poſitifs, j'eûs les deux racines égales & irrationelles dont le ſecond ſigne ſous le radical doit être poſitif.

Mais comme je m'apperçus que ces mêmes homogénes poſitifs contenus dans le premier triangle inférieur à gauche de l'échiquier de la table, étoient eux-mêmes les homogénes du troiſiéme cas dans la cinquiéme & ſixiéme formule, (en changeant ſeulement le ſigne poſitif en négatif, dans les homogénes & conſervant le ſigne moins comme il eſt dans la table devant le ſecond chifre ſous le radical) ce qui donne leurs racines imaginaires ; d'ailleurs toutes ces racines, ſoit irrationelles, ſoit ima-

ginaires forment des progreſſions arithmétiques croiſſantes dans chaque rang horiſontal; ſçavoir, hors du ſigne radical 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 &c, qui ſont la moitié de la valeur de *a*, & ſous le ſigne radical 1, $2\frac{1}{4}$, 4, $6\frac{1}{4}$, 9, &c. qui ſont les quarrés de cette moitié, j'ai mis toutes ces racines ſous leur homogéne correſpondant.

Ainſi cette ſeconde table de la ſeconde eſpéce me donne dans le triangle ſupérieur à droite.

1°. Les deux racines dans le premier & le ſecond cas de la cinquiéme & ſixiéme formule; ſçavoir, les deux racines négatives pour la ſixiéme formule qui ont le ſigne moins dans la table.

2°. Mais ces mêmes racines, en les ſuppoſant poſitives ou précédées du ſigne plus, ſeront les racines poſitives du premier & du ſecond cas de la cinquiéme formule.

Mais pour le triangle inférieur à gauche de la même table, il y a plus de difficulté, je n'ai mis dans la table qu'un ſigne négatif devant le ſecond chifre ſous le radical, qui eſt contraire à celui de l'homogéne poſitif, au lieu qu'il faut ſuppoſer par tout les deux ſignes contraires (que j'ai omis pour éviter la confuſion & la difficulté de l'impreſſion) ſi l'on veut renfermer tous les cas, comme il ſuit.

3°. Sa premiére colonne qui eſt la premiére de l'échiquier a tous ſes homogénes poſitifs, & le ſigne négatif ſous le radical, ce qui rend la racine imaginaire, au lieu qu'elle eſt irrationelle, ce que j'ai fait à deſſein de renfermer tous les cas en abrégé, car ſuppoſant tous les ſignes poſitifs, cette colonne contient les homogénes de la premiére formule avec leurs racines ſous une expreſſion irrationelle.

4°. Au contraire ſuppoſant le ſigne moins devant les homogénes, & laiſſant le ſecond ſigne de la racine négatif, comme il eſt dans la Table, on aura les racines imanaires des homogénes de la ſeconde formule.

5°. Tout le reste de ce triangle est donc pour les homogénes de la quatriéme formule, & pour ceux du troisiéme cas de la cinquiéme & de la sixiéme formule, en observant ce qui suit.

6°. Pour les homogénes de la quatriéme formule, ils sont positifs, tels qu'ils sont dans la table; mais pour leurs racines qui sont irrationelles, il faut supposer le signe plus devant le second chifre sous le radical, au lieu du signe moins qui est dans la table.

7°. Pour les homogénes du troisiéme cas de la cinquiéme & de la sixiéme formule, dont les racines sont imaginaires; il faut supposer les homogénes précédez du signe moins, & prendre les racines imaginaires, telles qu'elles sont exprimées dans la table, en observant qu'elles sont positives dans la cinquiéme formule, & négatives dans la sixiéme formule.

Cette difficulté auroit pû embarrasser les commençans, on trouve encore les mêmes difficultez dans les degrez supérieurs, dont l'exposant est pair à cause des racines, soit irrationelles, soit imaginaires qui s'y trouvent toujours en nombre pair, & qui étant multipliées les unes par les autres, se détruisent dans l'équation qui en est le produit; pour éviter cet embarras, on peut faire deux ou trois copies de cette table, afin de mettre séparément cette différence de signes contraires pour tous les cas différens, que j'ai voulu abréger.

Ainsi cette seconde table de la seconde espéce donne les deux racines des Equations des cinq formules du second degré.

Il est facile après cela de former les tables des degrez supérieurs, & ce que nous en avons dit en son lieu suffit, pour en dresser d'aussi étenduës qu'on voudra, & leur usage est si simple & si évident qu'il seroit inutile de s'y arrêter. Une Equation étant proposée, son cœfficient est donné, je cherche dans la table dressée sur la même formule ce cœf-

ficient donné, c'est la colonne où je dois trouver l'homogéne, s'il y est, alors j'ai au-dessous toutes les racines dans les tables de la seconde espéce, si l'homogéne proposé n'est pas dans la table, mais est compris dans l'interval de deux homogénes consécutifs, alors les racines sont irrationelles, & les racines de ces deux homogénes consécutifs sont les racines approchées, soit par excès, soit par défaut.

Mais les tables de la première espéce ne peuvent donner qu'une seule racine sur leur bordure, lorsqu'elle est rationelle & non autrement.

Il suit de-là que sur chaque formule il y a deux tables, l'une de la première espéce, qui donne seulement la premiére racine rationelle sur la bordure, l'autre table de la seconde espéce donne tout à la fois toutes les racines, ou sous chacun des homogénes, comme je l'ai pratiqué dans les premiéres tables, ou bien elle en donne plusieurs sur la bordure à gauche, & la derniére sous chaque homogéne comme je l'ai pratiqué dans la quatorziéme & la quinziéme table pour les Equations de la cinquiéme & de la sixiéme formule de la troisiéme classe du troisiéme degré.

Enfin chaque table du second degré, n'a que quatre termes variables; sçavoir, sur la bordure à gauche, 1°. la racine x, 2°. sa haute puissance, 3°. sur la bordure d'en haut, le coëfficient a du terme moïen, 4°. les homogénes b sur l'échiquier.

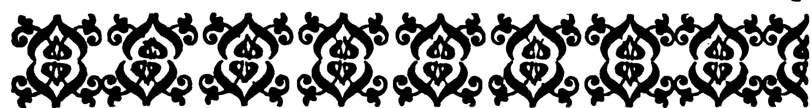
C'est la même chose en général dans tous les degrez supérieurs, pour les équations qui n'ont que trois termes, parce qu'il n'y a qu'un terme moïen; dans les autres qui ont 2, 3, ou quatre termes moïens, &c. il faut combiner ensemble les valeurs de leurs coëfficiens de toutes les maniéres possibles, prenant un seul coëfficient variable & tous les autres constans, & chaque combinaison donne une table dans la même formule, ce qui ne souffre aucune difficulté.

FAUTES A CORRIGER.

Page.	*Ligne.*	*Erreur.*		*Correction.*
7.	16.	par-	lisez	partant.
17.	11.	membres		nombres.
23.	29.	+		—
115.	28.	*b c*		*b* + *c*
128.	15 }	inconnuë		connuë.
137.	20 }			
144.	20.	9000.		10000.
146.	16.	0000.		5000.
147.	7 & 8.	11000.		10000.
149.	15 & 17.	27.		72.
154.	18. }	+		—
158.	25 }			
157.	4.	—		+
182.	11.	Signes.		lignes.

Notez. Dans la cinquiéme Table des Equarions (seconde espéce au troisiéme rang) que la fraction de la Racine doit toujours être $\frac{1}{2}$ hors du radical, & $\frac{1}{4}$ sous le radical, ce qui est général.

AVERTISSEMENT.



AVERTISSEMENT.

LA Méthode que nous donnons pour résoudre les Equations par des tables, est tres-propre à éclairer le Lecteur & à lui fournir les moïens d'approfondir tout ce qui regarde cette matiere : ces tables presentent à la vûë une infinité de séries infinies d'Equations semblables dans chaque cas particulier, qui ne différent que dans l'homogene. Toutes ces Equations forment des progressions Arithmétiques, de telle sorte qu'une Equation étant proposée, on apperçoit le rang qu'elle occupe dans l'infini, on connoît sa série, sa progression & la loi de cette progression.

Cette Méthode a d'ailleurs tout l'avantage qu'on peut désirer sur la Méthode ordinaire de résoudre les Equations par des formules, & ne participe point à ses défauts.

1°. Par son étenduë; la nouvelle Méthode des tables s'étend à tous les degrez à l'infini, elle embrasse également le cas irréductible comme le cas ordinaire, & le résoud avec la même facilité : mais les formules sont bornées au 3e. degré au-delà duquel elles ne peuvent s'étendre, elles n'embrassent pas même le 3e. degré tout entier, car elles ne peuvent resou-

dre les quatres formules de la 2de. eſpace de la 2de. claſſe du 3e. degré, dans leſquelles le 3e. terme eſt évanoüi.

Elles ne peuvent ſervir pour les huit formules de la 3e. claſſe qui ont quatre termes, qu'indirectement, & après en avoir fait évanoüir le ſecond terme.

L'uſage des formules ſe borne donc directement aux quatre formules de la 1ere. eſpece de la 2de. claſſe dans leſquelles le ſecond terme eſt évanoüi; mais il en faut encore retrancher le cas irréductible, qui comprend la 4e. formule toute entiere, & le quart des Equations poſſibles de la 3e. formule, parce qu'il eſt impoſſible d'en tirer les racines par la formule ordinaire, quoiqu'elles ſoient tres-réelles.

2o. Par la facilité; par les tables je réſoud les Equations du 1er. coup d'œil ſans aucune opération, leur conſtruction eſt facile, elles ſe font par la ſimple addition ou ſouſtraction ſuivant les ſignes de l'expreſſion générale de l'Equation. On peut les continuer auſſi-loin qu'on voudra avec la même facilité, nous donnons même des abrégez afin de pouvoir ſe ſervir dans les grands nombres des petites tables comme des plus grandes.

Mais la Méthode des formules oblige à pluſieurs extractions de racines quarrées & cubiques, opérations longues & ennuyeuſes, mais

ſouvent inutiles, lorſque les racines quoique réelles & rationnelles viennent ſous une forme irrationnelle, ou ſous une forme imaginaire, où la formule devient entierement inutile.

3°. Par ſon exactitude, puiſque les tables donnent exactement les racines des Equations telles qu'elles ſont, mais les formules de la 1ere. racine du 3e. degré donnent le plus ſouvent les racines réelles & rationnelles déguiſées, ou ſous une forme irrationelle, ou ſous une forme imaginaire.

Tous ces avantages ſont ſenſibles dans les exemples qui ſuivent, où l'on compare les deux Méthodes en les appliquant à reſoudre les mêmes Equations.

1er. exemple.

Soit propoſée l'Equation du 3e. degré $x^3 + 6x = 88$.

1°. Par les tables. La 5e. table de la 1ere. eſpéce donne ſa 1ere. racine poſitive $x = 4$.

La 5e. table de la ſeconde eſpéce donne ſes trois racines dans une même cellule que l'homogene 88; ſçavoir, la 1ere. racine poſitive $x = 4$, les deux autres négatives égales & imaginaires $x = -2 \pm \sqrt{-18}$.

2°. Par les formules.

La formule de la premiere racine eſt

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$ qui

donne $x = \sqrt[3]{44 + \sqrt{1944}} - \sqrt[3]{44 + \sqrt{1944}}$.
qui donne la 1ere. racine sous une forme irrationelle, puisque 1944 est un quarré imparfait, sa racine est entre 44 & 45, d'où l'on tire la valeur de la 1ere. racine 4 +, ou 5 − qui est irrationelle. Quoiqu'elle soit rationelle, puisque c'est précisément 4. il suffit de multiplier les trois racines que nous venons de trouver par les tables pour en avoir la démonstration.

2d. Exemple.

Soit $x^3 - 90x = 100$, qui est *l'origine* du cas *irréductible.*

1o. Les tables donnent les 3 racines qui sont réelles.

La 6e. table de la 1ere. espéce donne sa 1ere. racine positive $x = 10$. la 6e. table de la 2de. espéce donne dans une même cellule sous l'homogene proposé 100, les trois racines, la 1ere. $x = 10$ qui est réelle & positive, les deux autres réelles, négatives, égales & irrationelles $x = -5 + \sqrt{15}$.

2o. Par les formules.

La formule de la premiere racine est
$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$ qui donne $x = \sqrt[3]{50 + \sqrt{-24500}} + \sqrt[3]{50 - \sqrt{-24500}}$.

Dans laquelle l'expression imaginaire − $\sqrt{-24500}$ rend toute la formule imaginaire par

une eſpece de contagion qu'elle communique à la partie réelle 50, d'où il eſt impoſſible abſolument de tirer la valeur de la racine, quoiqu'elle ſoit réelle & poſitive.

3e. Exemple. *Dans le cas irréductible.*

Soit $x^3 - 90x = 110$. dans la 3e. formule.
ou $x^3 - 90x = -110$. dans la 4e. formule.

Ces Equations ſont dans le cas irréductible, par conſéquent les 3 racines quoique réelles ſont irrationelles, c'eſt-à-dire incommenſurables entr'elles, on ne peut les exprimer exactement par aucun nombre entier qui ſoit un diviſeur exact de ces Equations; on peut ſeulement en approcher, & il n'y a qu'un ſeul nombre qui donne cette valeur approchée, c'eſt 10.

1°. La table de la 1ere. eſpece donne $x = 10$ dans la 3e. formule, & $x = -10$ dans la 4e. formule.

La table de la 2de. eſpece donne tout enſemble les trois racines; Sçavoir, dans la 3e. formule $x = 10$, & $x = -5 \pm \sqrt{15}$. & dans la 4e. formule $x = -10$, & $x = 5 \pm \sqrt{15}$.

2°. Par les formules.

La formule de la 1ere. racine eſt

$$x = \sqrt[3]{45 + \sqrt{2025 - 39304}} + \sqrt[3]{45 - \sqrt{2025 - 39304}}$$

$$x = \sqrt[3]{45 + \sqrt{-37279}} + \sqrt[3]{45 - \sqrt{-37279}}$$

qui eſt une formule imaginaire d'où il eſt abſolument impoſſible de tirer aucune valeur pour la racine qui eſt cependant réelle mais irrationelle.

4e. Exemple. *cas irréductible.*

Soit $x^3 - 90x = 90$ dans la 3e. formule.
ou $x^3 - 90x = -90$ dans la 4e. formule.

1°. Par les tables. La 6e. table de la 1re. espéce donne la 1ere. racine approchée. $x = 10$ dans la 3e. formule, & $x = -10$ dans la 4e. formule.

La 6e. table de la 2de. espece donne dans la même cellule de l'homogene 90. les trois racines, $x = 10$, $x = -5 \pm \sqrt{15}$ dans la 3e. formule. Mais pour la 4e. formule $x = -10$, & $x = 5 \pm \sqrt{15}$.

Remarque. Comme 10 est la 1re. racine exacte de l'Equation $x^3 - 90x = 100$, qui est l'origine d'où partent les Equations dans le cas irréductible, elle est aussi seule la 1re. racine approchée de toutes les équations semblables qui ne différent que dans le seul homogene qui peut varier à l'infini, soit en diminuant de 10, soit en augmentant de 10 à l'infini : or dans toutes ces variations de l'homogene, 10 est la seule racine la plus approchée en nombres entiers, car elle pourra toujours diviser toutes ces équations non pas exactement, mais avec un reste positif, lorsque les homogenes sont moindres que 100. & avec un reste négatif lorsque les homogenes $>$ 100 en la 3e. formule, & au contraire en la 4e. formule : mais aucun autre nombre que 10 ne pourra être le diviseur de ces équations dont la série est infinie. Donc les tables donnent la racine la plus approchée en nombres entiers dans le cas

irréductible ſans aucune opération ; & pour avoir une approximation plus grande, on ſe ſervira des Méthodes nouvelles que nous donnons dans cette Analiſe.

La premiere racine approchée étant trouvée $x=10$, on connoîtra quelle eſt cette approximation, en comparant l'homogene propoſé, ou le reſte que donne la diviſion avec 100, qui eſt l'homogene de l'origine du cas irréductible. L'approximation ſera d'autant plus approchée que la difference ſera moindre, & l'approximation ſera d'autant plus éloignée que la difference ſera plus grande.

2°. Par les formules, on trouve une formule imaginaire & impoſſible pour la 1ere. racine c'eſt $x=\sqrt[3]{45+\sqrt[2]{-24975}}+\sqrt[3]{45-\sqrt[2]{-24975}}$ par-inutile comme dans l'exemple précédent.

Les avantages de cette nouvelle Méthode nous ont engagé de la tirer du corps de l'Analiſe entiere & complette que nous publions, où elle occupoit la ſection 7. du livre 1er. & de la placer ſéparément à la tête de l'ouvrage pour ſatisfaire à l'empreſſement du public.

METHODE

MÉTHODE
NOUVELLE

POUR RESOUDRE LES PROBLÉMES déterminez ou les Equations de tous les degrez à l'infini, & même dans le cas irréductible.

Ette Méthode consiste dans la construction & l'usage des tables expliquées p. 31, &c ; chaque table est dressée sur une formule & sert encore pour d'autres, en y accommodant les signes.

Ces tables sont de deux espéces, qui ne différent que dans la maniére de donner les racines des Equations qu'elles contiennent.

Les tables de la premiére espéce donnent sur leur bordure à gauche la premiére racine de tous les homogénes qui sont dans l'échiquier, lorsqu'elle est rationelle ; mais non pas lorsqu'elle est irrationelle.

La seconde espéce des tables donne directement tout à la fois toutes les racines des Equations de tous les degrez, de quelque nature que soient les racines, réelles ou imaginaires, rationelles ou irrationelles, en quoi elle a l'avantage sur la premiére espéce.

Cette Méthode ne se borne point là, car en continuant ces tables, leur considération seule présentera à l'esprit une infinité de Théorêmes & de Problêmes importans, d'où l'on pourra tirer plusieurs Méthodes différentes pour résoudre les Equations.

Les commençans pourront s'exercer à dresser ces tables aussi amples qu'ils le jugeront à propos, ils en tireront beaucoup d'utilité, ils y remarqueront les progressions Arithmétiques qui y regnent constamment, soit dans les homogénes, soit dans les coëfficiens ou facteurs, soit dans les puissances de l'inconnuë, soit enfin dans les racines des Equations, c'est le fondement de la construction de ces tables & de leur usage; d'ailleurs ces tables par elles-mêmes serviront comme un instrument universel, pour résoudre du premier coup d'œil & sans aucune opération toutes les Equations qu'elles renferment.

Pour faciliter la construction de ces tables, on peut éviter de tracer les lignes de l'échiquier, en se servant d'un chassis de carton divisé avec des fils par différens carreaux, on peut aussi mettre la bordure d'en haut, & celle qui est à gauche sur deux bandes de papier qui se déplient en déhors, & qui excédent les pages qui contiennent l'échiquier.

Une *Equation* littérale se nomme une formule, parce que c'est l'expression générale de toutes les Equations numériques semblables; car il n'y a qu'à substituer des nombres à la place des lettres connuës pour avoir des Equations numériques, & substituant successivement chacun des nombres de la suite naturelle à l'infini, on

aura des séries infinies d'Equations semblables à l'infini.

Dans chaque degré, il y a des Equations complettes & incomplettes, ce qui fait deux genres que je divise par classes & par espéces differentes afin de traiter cette matiere avec ordre pour faciliter la résolution des Equations.

Une Equation complette contient toujours un terme de plus que l'exposant de son degré ne contient d'unitez. Ainsi dans le second degré elle a trois termes, dans le troisiéme degré quatre termes, &c. Voilà la derniere classe des formules de chaque degré, son exposant est celui de son degré.

Une Equation incomplette contient moins de termes que l'Equation complette, ce qui ne se trouve que dans les Equations abrégées, car lorsque l'Equation n'est point abregée, elle contient en détail tous les produits de sa formation qui la rendent toujours complette; mais en abrégeant, lorsqu'il se trouve dans un même terme ou dans plusieurs termes des produits égaux & contraires, ils rendent ce terme ou ces termes nuls, les détruisent & les font évanoüir, voilà l'origine des Equations & des formules incomplettes qui donnent les autres classes.

L'Equation pure & simple dans chaque degré n'a que deux termes extrêmes, le premier terme est la haute puissance de l'inconnuë, & le dernier terme que je nomme l'homogene de comparaison qui est exprimé en nombres ou en lettres connuës dans cette Equation, tous les termes moïens employez dans sa formation ont été détruits par des signes contraires en l'abrégeant.

Voilà la plus simple Equation ou formule dans chaque degré, & la premiere classe des formules: entre cette premiere classe & la derniere, il y a autant de classes différentes qu'il y a d'unitez entre leurs exposans, ou ce qui revient au même dans chaque degré, il y a autant

de classes différentes entre les formules, que l'exposant du degré contient d'unitez.

Je distingue encore dans chaque classe des espéces differentes, & dans chaque espéce des individus qui sont autant de formules differentes dans un même degré, & pour traiter cela avec plus d'ordre & de Méthode, je réduis à sept Problémes tout ce qui regarde en général les formules de tous les degrez à l'infini, car dans un degré quelconque, on peut demander.

1°. Le nombre de ses formules.

2°. Le nombre des formules ou de plusieurs degrez, ou de tous les degrez à l'infini pris ensemble.

3°. Le nombre des classes differentes des formules dans chaque degré.

4°. Le nombre des espéces differentes des formules dans chaque classe.

5°. Le nombre des individus ou formules particulieres dans chaque espéce.

6°. Chacune des formules particulieres en lettres, pour une espece & une classe déterminées dans un degré quelconque.

7°. Enfin la formation des Equations numeriques dans chaque formule particuliere.

Nous donnons la résolution de ces sept Problêmes, afin qu'il n'y ait rien qui puisse arrêter le lecteur.

PROBLEME I.

Déterminer le nombre des formules dans chaque degré.

Soit p l'exposant du degré proposé, le nombre de ses formules est $2 \times 3^{p-1}$, c'est à dire que ce nombre est double de la puissance de 3 moindre de l'unité que l'exposant de ce degré.

EXEMPLES.

Dans le 1[er]. degré, où $p = 1$. j'ai $2 \times 3^{1-1} = 2 \times 3 - 3 = 2$.
Donc le premier degré a deux formules.

Dans le 2[d]. degré, où $p = 2$, j'ai $2 \times 3^{2-1} = 2 \times 3 = 6$ formules.

Dans le 3[e]. degré, où $p = 3$, j'ai $2 \times 3^{3-1} = 2 \times 9 = 18$. formules.

Dans le 4[e]. degré, où $p = 4$, j'ai $2 \times 3^{4-1} = 2 \times 27 = 54$. formules.

Dans le 5[e]. degré, où $p = 5$, j'ai $2 \times 3^{5-1} = 2 \times 81 = 162$. formules.

Dans le 6[e]. degré, où $p = 6$, j'ai $2 \times 3^{6-1} = 2 \times 243 = 486$. formules.

Dans le 7[e]. degré, où $p = 7$, j'ai $2 \times 3^{7-1} = 2 \times 729 = 1458$. formules.

Dans le 8[e]. degré, où $p = 8$, j'ai $2 \times 3^{8-1} = 2 \times 2187 = 4374$. formules.

Dans le 9[e]. degré, où $p = 9$, j'ai $2 \times 3^{9-1} = 2 \times 6561 = 13122$ formules.

Dans le 10[e]. degré, où $p = 10$, j'ai $2 \times 3^{10-1} = 2 \times 19683 = 39366$. formules.

Ce qui donne la série suivante.

Exposans des degrez	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.
Nombre des formules.	2.	6.	18.	54.	162.	486.	1458.	4374.	13122.	&c.

PROBLEME II.

Trouver le nombre des formules de plusieurs degrez pris de suite. 1°. En nombre fini. 2°. De tous les degrez à l'infini.

1°. Pour plusieurs degrez pris de suite en nombre fini, le nombre des formules est $3^p - 1$, en supposant p égal à l'exposant du dernier degré qui a été pris, la somme des formules est égale à une semblable puissance de 3 moins l'unité.

Pour le 1er. degré seul où $p = 1$, j'ai $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Pour les deux premiers degrez, l'exposant du second est $2 = p$, j'ai $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 2 + 6$, trouvez ci-dessus..

Pour les trois premiers degrez, l'exposant du troisiéme est $3 = p$, j'ai $3^3 - 1 = 27 - 1 = 26 = +6 + 18$, trouvez ci-dessus.

Pour les quatre premiers, où $p = 4$, j'ai $3^4 - 1 = 81 - 1 = 80 = 2 + 6 + 18 + 54$ trouvez ci-dessus ; & ainsi des autres.

2°. Pour tous les degrez à l'infini pris ensemble, l'exposant du dernier & infinitiéme degré est ∞. Donc la somme des formules de tous les degrez à l'infini est $3^\infty - 1$. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE I.

Et remarque. Dans ce grand nombre de formules on doit retrancher comme inutiles toutes les formules dont le second membre qui contient tous les termes (excepté la haute puissance de l'inconnuë) est totalement négatif, parce qu'il est imposible que le positif soit égal au négatif absolu, & si on veut absolument les résoudre, on le pourra toujours de la même maniére que celles dont les deux membres sont totalement positifs. Nous verrons dans la suite comment on peut encore diminuer le nombre des formules.

Il eſt évident qu'il n'y a qu'une ſeule formule négative dans le premier degré $x = -b$. Dans tous les degrez ſupérieurs, ſoit p l'expoſant du degré propoſé, le nombre des formules totalement négatives dans le ſecond membre & partant inutiles, eſt une puiſſance de 2 moindre de l'unité que l'expoſant du degré, c'eſt donc 2^{p-1}.

Ainſi dans le ſecond degré, où $p = 2$, j'ai $2^{p-1} = 2^{2-1} = 2$, ce qui donne deux formules inutiles.

Dans le troiſiéme degré, ou $p = 3$, j'ai $2^{3-1} = 4$ formules inutiles.

Enfin dans le 10e. degré, où $p = 10$, j'ai $2^{10-1} = 2^9 = 512$ formules inutiles. On peut les exprimer par la ſérie qui ſuit.

Expoſans des degrez	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9me. degré,	&c.
Nombre des formules.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512. &c.

COROLLAIRE II.

Donc dans chaque degré, dont l'expoſant ſoit p, le nombre des Equations utiles eſt $\overline{\overline{2\times 3}^{p-1} - 2^{p-1}}$, qui eſt un binôme dont la premiére partie contient le nombre des formules poſſibles dans chaque degré trouvé par le Problême I. & la ſeconde partie contient le nombre des formules inutiles trouvées par le Corollaire précédent, à retrancher du nombre total des formules.

Ainſi dans le ſecond degré, où $p = 2$, j'ai $\overline{\overline{2\times 3}^{2-1} - 2^{2-1}} = \overline{2\times 3} - 2 = 6 - 2 = 4$, nombre des formules utiles.

Dans le troisiéme degré, où $p = 3$, j'ai $2 \times 3^{3-1} - 2^{3-1} = 2 \times 9 - 4 = 18 - 4 = 14$, nombre des formules utiles.

Dans le septiéme degré, où $p = 7$, j'ai $2 \times 3^{7-1} - 2^{7-1} = 2 \times 3^6 - 2^6 = 2 \times 729 - 64 = 1458 - 64 = 1394$.

Dans le dixiéme degré, où $p = 10$, jai $2 \times 3^{10-1} - 2^{10-1} = 2 \times 3^9 - 2^9 = 39366 - 512 = 38854$.

On peut les exprimer par les quatre séries suivantes pour en avoir le rapport, le prémier est l'exposant du degré, la seconde est le nombre total des formules dans chaque degré correspondant, la troisiéme contient le nombre des formules inutiles à retrancher, la quatriéme contient le nombre des seules formules utiles, & c'est la différence de chaque terme correspondant dans la seconde & la troisiéme série.

Exposant du degré	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
Total des formules	2.	6.	18.	54.	162.	486.	1458.	&c.
Inutiles	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	&c.
Utiles	1.	4.	14.	46.	146.	454.	1394.	&c.

PROBLE'ME III.

Déterminer le nombre des classes des formules différentes dans chaque degré.

Pour distinguer en différentes classes les formules d'un même degré, je prends dans ce degré, par exemple, le cinquiéme, les deux Equations extrêmes; sçavoir, son Equation pure & simple $x^5 = b^V$. qui n'a que deux termes, & son Equation complette qui a tous ses six termes. $x^5 = a^I x^4 + a^{II} x^3 + a^{III} x^2 + a^{IV} x^1 - b^V$. & je les écris de cette sorte, mettant dans le premier membre la haute puissance

puiſſance de l'inconnuë toute ſeule, & dans le ſecond membre tous les autres termes, par cette diſpoſition j'ai un ſeul terme dans le ſecond membre de l'Equation pure & ſimple, c'eſt la premiere claſſe dont l'expoſant eſt 1.

Mais j'ai cinq termes dans le ſecond membre de l'Equation complette, c'eſt la cinquiéme claſſe de ce degré, ſon expoſant eſt 5.

Donc j"ai les deux claſſes extrêmes 1 & 5, je remplis leur interval par la ſuite naturelle des nombres, 1,2,3,4,5, ce qui me donne cinq membres, qui donnent cinq claſſes différentes, dont ils ſont les expoſans, & marquent en même tems le nombre des termes de chacune de ces claſſes dans le ſecond membre de la formule comme il ſuit.

1ere. claſſe. $x^5 = \pm b^{\text{V}}$. *Une ſeule eſpéce.*

2de. claſſe. $x^5 = a^{\text{I}} x^4 - b^{\text{V}}$. 1re. eſpéce.

& 4e. eſpéces. $x^5 = a^{\text{II}} x^4 - b^{\text{V}}$. 2de. eſpéce.

$x^5 = a^{\text{III}} x^2 - b^{\text{V}}$. 3e. eſpéce.

$x^5 = a^{\text{IV}} x - b^{\text{V}}$. 4e. eſpéce.

3e. claſſe. $x^5 = a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm b^{\text{V}}$.
& 8 eſpéces.

4e. claſſe $x^5 = a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm b^{\text{V}}$.
& 4 eſpéces.

5e. claſſe $x^5 = a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm a^4 x^1$
& 16 eſpéces. $\pm b^{\text{V}}$.

Ainſi dans le cinquiéme degré, comme il y a cinq termes dans le ſecond membre, il y a cinq claſſes de formules.

En général, il y a dans chaque degré autant de claſſes différentes de formules, que l'expoſant de ce degré contient d'unitez.

PROBLEME IV.

Trouver le nombre des eſpéces différentes des formules dans chaque claſſe d'un même degré.

Le nombre des termes établit la difference des claſſes, ainſi la 5e. claſſe du 5e. degré qui eſt complette contient cinq termes dans le ſecond membre, mais il y a dans ce même degré quatre claſſes de formules incomplettes, qui ſe réduiſent à trois claſſes, en retranchant la premiere claſſe qui eſt celle des Equations pures & ſimples, de ſorte que de ces cinq claſſes retranchant les deux claſſes extrêmes la premiere & la derniere; il reſte trois claſſes dans leſquelles il peut y avoir pluſieurs eſpéces : car je nomme eſpéces différentes de formules, celles de la même claſſe qui ont par conſéquent le même nombre de termes, mais non pas les mêmes termes. Par exemple, la ſeconde claſſe du cinquiéme degré qui a deux termes dans le ſecond membre a auſſi quatre eſpéces, car retranchant dans l'Equation pure & ſimple, & dans l'Equation complette l'homogéne qui doit toujours ſe trouver dans toutes les formules, il me reſte une place à remplir dans la ſeconde claſſe, & j'ai quatre termes dans l'Equation complette qui peuvent occuper cette place chacun en particulier, ce qui donne quatre eſpéces différentes de la ſeconde claſſe.

1re. classe. $x^5 = \pm b^{v}$.

5me. classe. $x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm a^4 x^1$
$\pm b^{v}$.

2de. classe. $x^5 = \pm a^1 x^4 \pm b^{v}$. 1re. espéce.
$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm b^{v}$. 2de. espéce.
$x^5 = \pm a^3 x^2 \pm b^{v}$. 3me. espéce.
$x^5 = \pm a^4 x^1 \pm b^{v}$. 4me. espéce.

De même dans la 3e. classe du 5e. degré qui a trois termes dans le second membre, j'ai deux places à remplir en combinant quatre termes de toutes les maniéres possibles, deux à deux. Ces termes sont, x^4, x^3, x^2, x^1. ce qui se peut combiner deux à deux sans répétition de six maniéres differentes, ce qui donne six espéces différentes dans la 3e. classe.

3e. classe. $x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm b^{v}$. sans x & x^2.
$x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^3 x^2 \pm b^{v}$. sans x & x^3.
$x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^4 x^1 \pm b^{v}$ sans x^2 & x^3.
$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm b^{v}$. sans x^3 & x^4.
$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm a^4 x^1 \pm b^{v}$. sans x^4 & x^2.
$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm b^{v}$. sans x & x^4.

Pareillement dans la 4e. classe du 5e. degré, qui a quatre termes dans le second membre, au lieu de cinq termes dans l'Equation complette, ce qui se réduit à 3. &

à 4. retranchant de part & d'autre l'Homogéne, or de quatre termes on en peut arranger trois de quatre maniéres différentes, ce qui donne quatre espéces differentes dans la 4e. classe du 5e. degré.

Mais la 1re. classe qui n'a qu'un terme dans le second membre, & l'Equation complette de la 5e. classe qui en a cinq, n'ont chacune qu'une seule espéce; car on ne peut varier ni le nombre ni l'espéce des termes dans ces classes, mais elles ont des individus ou formules particuliéres différentes, qui viennent de la seule diversité des Signes + & —.

PROBLEME V.

Trouver les Individus ou Formules particuliéres & leur nombre dans chaque espéce & dans chacune des Classes d'un même degré & de tous les degrez à l'infini.

Les formules particuliéres dans chaque espéce & dans chacune des classes viennent des combinaisons differentes des Signes, + & —. Or toutes les combinaisons utiles qui donnent des formules différentes sont exprimées par les deux Séries suivantes, dont la premiére marque l'exposant de la classe & le nombre des termes dans le second membre, c'est la Série des nombres naturels. La 2de. qui marque le nombre des combinaisons qui détermine le nombre des formules particuliéres ou des individus dans chaque espéce, est la Série des puissances de 2.

Nombre des temes.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.
Nombre des Formules.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512,	&c.

Ainsi dans la 1re. classe où il n'y a qu'un terme, il y a deux formules, parce que les Signes + & — peuvent-être mis tous les deux devant ce terme unique. Ce qui donne deux formules.

Dans la 2de. classe où il y a deux termes, les signes + & — peuvent être combinez en quatre maniéres. Ce qui donne quatre formules.

Dans la 3me. classe qui a trois termes, les signes + & — peuvent se combiner en huit maniéres, ce qui donne huit formules. Et ainsi des autres à l'infini.

PROBLEME VI.

Trouver en lettres chaque formule particuliére d'une espéce, & d'une classe quelconque d'un degré proposé.

Comme toutes les formules particuliéres dans une espéce & dans une classe d'un degré déterminé, vient de la seule combinaison des signes, lorsqu'on aura une classe & une espéce déterminée. Par exemple, la 1re. espéce de la 3me. classe du 5me. degré $x^{5} = \pm a^{1} x^{4}. \pm a^{2} x^{3} \pm b^{v}$. qui est sans x & sans xx. & qui a trois termes dans le second membre; or par le Problême 5me. j'ai dans la Serie huit combinaisons ou formules pour 3. termes. Ainsi j'écris de suite ces huit formules qui comprennent toutes les combinaisons différentes des signes + & — comme il suit.

$x^{5} = + a^{1} x^{4} + a^{2} x^{3} + b^{v}$. 1re. form.

$x^{5} = + a^{1} x^{4} + a^{2} x^{3} - b^{v}$. 2de. form.

$x^{5} = + a^{1} x^{4} - a^{2} x^{3} + b^{v}$. 3me. form.

$x^{5} = + a^{1} x^{4} - a^{2} x^{3} - b^{v}$. 4me. form.

$x^{5} = - a^{1} x^{4} + a^{2} x^{3} + b^{v}$. 5me. form.

$x^{5} = + a^{1} x^{4} - a^{2} x^{3} + b^{v}$. 6me. form.

$x^{5} = - a^{1} x^{4} - a^{2} x^{3} + b^{v}$. 7me. form.

$x^{5} = - a^{1} x^{4} - a^{2} x^{3} - b^{v}$. 8me. form.

PROBLEME VII.

Former les Equations en nombres dans chaque Formule particuliére d'un degré quelconque.

Ce Problême eſt important pour la réſolution des Equations, car il eſt ridicule de chercher les racines d'une Equation propoſée, ſi on ignore le nombre & la nature des élemens dont elle contient le produit.

De la nature des racines des Equations de tous les degrez, de leurs genres & de leurs eſpéces.

Les racines d'une Equation compoſée d'un degré quelconque ou ſes élémens ſont les Equations ſimples, ou du premier degré dont elle contient le produit. Je diviſe les racines en pluſieurs genres.

Les racines ſont ou poſitives ou négatives : Voilà leur premier genre.

Les racines poſitives ſont celles dont la valeur de l'inconnuë eſt une grandeur poſitive comme $x - 2 = 0$. qui donne par tranſpoſition $x = + 2$. c'eſt une valeur poſitive.

Les racines négatives ſont celles dont la valeur de l'inconnuë eſt négative, comme $x + 2 = 0$, qui donne par tranſpoſition $x = - 2$, c'eſt une valeur négative.

Le ſecond genre diviſe les racines en réelles & imaginaires, qui ſe diviſent chacune en deux eſpéces, 1°. rationelles, 2°. irrationelles.

Les racines réelles, rationelles ou commenſurables, ſont celles dont la valeur s'exprime exactement, ou par un nombre, ou par une lettre connuë, comme $x - 2 = 0$, $x - a = 0$.

Les racines réelles, irrationelles ou incommenſurables, ſont celles dont la valeur ne peut être exprïmée exactement par un nombre ou par une lettre connuë, ſans y

ajoûter un ſigne Radical comme $x - \sqrt{2} = 0$, $x - \sqrt{a} = 0$ ce qui marque la racine quarrée de 2, ou de a, qu'il eſt impoſſible d'exprimer ſans le ſigne Radical, on les nomme incommenſurables, parce qu'on ne peut pas les meſurer par l'unité ni par aucune partie connuë de l'unité.

Les racines imaginaires ſont auſſi de deux eſpéces, il y en a qui ſont imaginaires & rationelles comme $+ - a$ qui eſt une valeur imaginaire négative dans $x + - a = 0$, mais imaginaire poſitive dans $x - - a = 0$, ces deux valeurs ſont des imaginaires du premier degré.

Les valeurs imaginaires du ſecond degré ont toujours deux ſignes comme les autres imaginaires, le premier qui eſt hors du ſigne eſt $+$ ou $-$, le ſecond qui eſt ici ſous le ſigne Radical eſt toujours $-$ dans l'imaginaire du ſecond degré $x + \sqrt{-a}$ & $x - \sqrt{-a}$, comme dans le premier degré $x + - a$ & $x - - a$.

Or le ſecond ſigne $-$ eſt toujours invariable dans tous les imaginaires, il n'y a que le premier ſigne qui peut varier.

Ces racines imaginaires ſont proprement des racines négatives, ſourdes & irrationelles, mais les poſitives ſont ſimplement des racines ſourdes ou irrationelles.

Les racines imaginaires ſont rationelles, lorſque la grandeur ou valeur imaginaire qui eſt ſous le ſigne Radical, eſt une puiſſance parfaite égale & ſemblable à l'expoſant du ſigne radical, comme dans $x + \sqrt[2]{-a^2} + 0$, & $x - \sqrt[2]{-a^2} = 0$, dans leſquels a^2 eſt élevé à la puiſſance exacte du ſigne Radical $\sqrt[2]{\ }$ qui eſt la ſeconde puiſſance.

Mais les racines imaginaires ſont irrationelles, lorſque la grandeur imaginaire qui eſt ſous le ſigne Radical n'eſt pas de même degré que l'expoſant du ſigne Radical comme dans $x - \sqrt[3]{-a} = 0$ dans lequel le Ra-

dical eſt du troiſiéme degré, & la grandeur imaginaire ſous le ſigne Radical eſt du premier degré.

Du nombre des racines dans chaque formule, de tous les degré à l'infini.

Dans tous les degrez à l'infini, chaque formule contient autant de racines ou d'équations ſimples & du premier degré, que l'expoſant de la haute puiſſance contient d'unitez.

Ces équations du premier degré en ſont les élémens les plus ſimples, ainſi dans une formule du ſecond degré dont l'expoſant eſt 2, il y a deux racines ou deux élémens, trois racines dans une formule du troiſiéme degré, quatre racines dans une formule du quatriéme degré, &c.

On peut auſſi conſiderer une formule du troiſiéme degré, comme le produit d'une équation du ſecond degré multipliée par une équation du premier degré; de même une equation du quatriéme degré peut être conſidérée comme le produit de deux équations du ſecond degré; pareillement une équation du cinquiéme degré peut être regardée comme le produit d'une équation du troiſiéme degré, multipliée par une équation du ſecond degré.

En général toute équation, par exemple, du ſeptiéme degré, eſt le produit de toutes les équations dont les expoſans peuvent être les diviſeurs exacts de ſon expoſant 7; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt le produit de ſept équations du premier degré, parce que leur expoſant 1 diviſe 7, & le quotient eſt 7 qui donne les ſept équations du premier degré. On peut encore la conſidérer comme formée par les équations, dont les expoſans pris enſemble font le nombre 7, qui eſt ſon expoſant, ainſi comme $\overline{2 \times 3} + 1 = 7$, cette équation peut être formée par deux équations du troiſiéme degré & une du premier degré,

&

& enfin comme $4 \times 3 = 7$, on peut auſſi la former par une équation du quatriéme degré, & une du troiſiéme degré, & ainſi des autres.

Des termes des Equations, de leur nombre, & de leur différence.

Dans chaque équation d'un degré quelconque, il y a toujours un terme de plus que l'expoſant de ſon degré ou de ſa haute puiſſance qui ſont égaux, contient d'unitez. Ainſi lorſqu'il ſe trouve moins de termes, c'eſt une marque qu'il y en a qui ſont évanoüis, ce qui ſe fait en abrégeant l'équation, lorſqu'il y a des produits égaux avec des ſignes contraires, ils ſe détruiſent & ce terme manque dans l'équation abrégée.

Les différentes puiſſances de l'inconnuë font la différence des termes, ainſi tous les produits qui ont une même puiſſance de l'inconnuë ne font qu'un ſeul & même terme, on les écrit les uns ſous les autres, à meſure qu'on les trouve dans la formation de l'équation, & on les abrége en écrivant une ſeule lettre, ou un nombre qui eſt la ſomme des facteurs s'ils ont le même ſigne, ou leur différence s'ils ont des ſignes contraires, ainſi ce facteur eſt zéro, lorſque la ſomme des facteurs poſitifs égale celle des négatifs.

Le premier terme contient la plus haute puiſſance de l'inconnuë ſeule, les termes ſuivans qui ſont les termes moïens, contiennent un cœfficient ou facteur exprimé en nombre ou en lettres avec une puiſſance de l'inconnuë.

Dans les termes moïens, les expoſans des puiſſances de l'inconnuë décroiſſent de l'unité d'un terme à l'autre, juſqu'à la puiſſance linéaire de l'inconnuë, qui eſt toujours le pénultiéme terme de l'équation.

Le dernier terme n'a point d'inconnuë, il contient

ſeulement un nombre, ou des lettres qui expriment le produit de toutes les valeurs des racines de l'équation.

Dans une équation réduite à ſa plus ſimple expreſſion comme la ſuivante qui eſt du cinquiéme degré.

Expoſans des termes. 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6.

$$x^5 + a^{I} x^4 + a^{II} x^3 . + a^{III} x^2 + a^{IV} x^1 - b^{V} . = 0.$$

Il y a ſix termes, le premier terme contient la haute puiſſance de l'inconuë ſeule x^5. Le ſixiéme & dernier terme b^{V}. contient une lettre connuë, dont l'expoſant en chifre Romain ou Italique V marque cinq dimenſions, ou le produit de cinq racines, & non pas une cinquiéme puiſſance.

Les autres termes (compris entre le premier & le dernier qui ſont les termes extrêmes) ſe nomment les termes moïens, qui ont chacun un cœfficient ou facteur avec une puiſſance de l'inconnuë décroiſſante de l'unité.

Dans les équations abrégées, les cœfficiens ou facteurs ſont exprimez en général par des a, dont l'expoſant en chifre Italique marque le nombre des dimenſions néceſſaire, pour rendre tous les termes homogenes, & de cinq dimenſions comme dans le premier terme, ce qui fait que ces expoſans de a croiſſent de l'unité d'un terme au ſuivant, à meſure que l'expoſant de x décroît.

Ces cœfficiens ou facteurs ſont chacun en particulier le réſultat, c'eſt-à-dire la ſomme ou la différence de tous les cœfficiens particuliers qu'on trouve en détail dans la formation de l'équation ; c'eſt la ſomme lorſque les ſignes ſont ſemblables dans tous les facteurs d'un même terme, mais c'eſt leur difference, lorſqu'il y a dans un

même terme des facteurs qui ont des signes contraires,

Ainsi, si je forme une équation du quatriéme degré en multipliant quatre racines positives *a*, *b*, *c*, *d*, ensuite en supposant *d* négative.

$$
\begin{array}{l}
x - a = 0. \\
\quad - b = 0. \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x^2 - ax \\
\quad - bx + ab = 0. \\
\times\, x \quad - c = 0. \\
\hline
\end{array}
$$

Abrégé pour le second degré.

$$x^2 - a^{I}x + a^{I}b^{I} = 0.$$

$$
\begin{array}{l}
x^3 - ax^2 - \\
\quad - bx^2 + abx. \\
\quad - cx^2 + acx. \\
\qquad\quad + bcx - abc = 0. \\
\hline
\times\, x \mp d. \\
\hline
\end{array}
$$

Abrégé pour le troisiéme degré.

$$x^3 - a^{I}x^2 + a^{II}x^{I} - abc = 0.$$

$$
\begin{array}{l}
x^4 - ax^3. \\
\quad - bx^3 + abx^2. \\
\quad - cx^3 + acx^2. \\
\quad - dx^3 + bcx^2 \mp abcx \pm a,b,c, = 0. \\
\qquad\quad + adx^2 \mp abdx. \\
\qquad\quad + bdx^2 \mp acdx. \\
\qquad\quad + cdx^2 \mp bcdx.
\end{array}
$$

Abrégé pour le quatriéme degré ſuppoſant d poſitif.

$$x^4 - x^3 a^{I} + a^{II} x^2 - a^{III} x^1 + abcd = 0.$$

Mais ſuppoſant d négatif.

j'ai $x^4 - a^{I} x^3 \pm a^{II} x^2 + a^{III} x^1 - abcd = 0.$

Dans laquelle j'ai mis deux ſignes au troiſiéme terme, ce ſera + ſi les produits poſitifs ſurpaſſent les négatifs, au contraire ce ſera — ſi les produits négatifs ſurpaſſent les poſitifs, & s'ils ſont égaux, ils feront évanoüir le troiſiéme, comme alors ſon cœfficient eſt nul ou zero, ce qui s'exprime ainſi $\pm\, o^{II} x^2$.

Il ſuit delà que le facteur du ſecond terme contient la ſomme ou la différence des valeurs de toutes les racines de l'équation; Sçavoir la ſomme, lorſqu'elles ont des ſignes ſemblables, mais la différence lorſqu'elles ont des ſignes contraires.

Dans le troiſiéme terme, le facteur contient la ſomme ou la différence des produits de toutes les valeurs des racines priſes deux à deux.

Dans le quatriéme terme, le facteur contient la ſomme ou la différence des produits de toutes les valeurs des racines priſes trois à trois.

En général, les valeurs des racines ſont multipliées en nombre pair dans tous les termes impairs, à commencer par le troiſiéme terme, cinquiéme, ſeptiéme, &c. car le premier contient la ſeule haute puiſſance de l'inconnuë, mais elles ſont multipliées en nombre impair, dans les termes pairs à commencer par le quatriéme terme, ſixiéme, huitiéme, &c. car dans le ſecond terme les valeurs des racines s'y trouvent ſeules ſans être multipliées les unes par les autres.

Méthode pour faire évanoüir les termes moyens, & former des équations numériques où il manque quelque terme moyen.

Il suit delà que pour faire évanoüir les termes moyens, & rendre leur facteur nul ou égal à zero, ce qui est nécessaire pour former une équation numérique, suivant une formule où il manque un ou plusieurs termes.

1°. Pour faire évanoüir le second terme, il faut que la somme des racines positives soit égale à la somme des racines négatives. Ainsi dans le second degré il faut que les deux racines soient égales avec des signes contraires, dans le troisiéme degré, il faut que la troisiéme racine égale la somme des deux premiéres avec un signe contraire, &c.

2°. Pour faire évanoüir le troisiéme terme, & même tout autre, dans le troisiéme degré, & dans tous les degrez supérieurs, il faut considérer l'équation du degré prochain inférieur, afin de pouvoir par là tirer une valeur de la derniere racine capable de rendre les produits négatifs égaux aux positifs.

Ainsi pour faire évanoüir le troisiéme terme dans une équation numérique du troisiéme degré, ou en former une où le troisiéme terme manque, je prends une équation du second degré, dont le facteur soit un diviseur exact de son dernier terme, comme $x^2 - 4x - 32 = 0$. & le quotient $+8$ sera la troisiéme racine positive.

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$
$$\times\ x - 8 = 0.$$
$$\overline{x^3 - 4x^2 - 32x + 256 = 0.}$$
$$- 8x^2 + 32x.$$
$$\overline{x^3 - 12x^2 \pm 0x + 256 = 0.}$$

Mais dans $x^2 + 4x - 32 = 0$, la troisiéme racine est négative $x + 8 = 0$. en général ce quotient prend le signe propre à détruire le troisiéme produit, c'est celui du facteur du second terme de l'équation précédente comme ici, ou le contraire comme dans l'exemple suivant, selon que le cas l'exige.

Pour former dans le quatriéme degré une équation où le troisiéme terme manque, je prends une équation du troisiéme degré dans laquelle le facteur du second terme soit un diviseur exact du troisiéme terme, comme

$$x^3 + 6x^2 + 12x^1 + 8 = 0.$$
$$\times\ x - 2 = 0.$$

$$x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x.$$
$$- 2x^3 - 12x^2 - 24x - 16 = 0.$$

$$x^4 + 4x^3 \pm 0x^2 - 16x - 16 = 0.$$

Je divise 12 par 6, son quotient 2, est la quatriéme racine propre à faire évanoüir le troisiéme terme.

Il est facile de faire évanoüir tel terme qu'on voudra par la même Méthode dans tous les degrez supérieurs, ou de former des équations numériques, où il manque un ou plusieurs termes, ce qui revient au même, nous sommes obligez de supprimer un plus grand détail pour abréger ce traité.

En général, pour faire évanoüir quelque terme d'une équation proposée, je considére tous les produits particuliers de ce terme dans l'équation du degré inférieur moindre de l'unité que la proposée pour opérer dessus; il y a deux cas, le premier cas est, lorsque tous les produits de

ce terme ont le même ſigne + ou —, alors il faut pour le détruire former dans ce terme un produit égal à la ſomme des facteurs avec un ſigne contraire.

Ainſi dans ce cas il faut diviſer la ſomme des facteurs de ce terme par la ſomme des facteurs du terme précédent, & prendre le quotient pour multiplicateur cherché ou derniere racine, avec un ſigne propre à faire évanoüir le terme déſiré. Mais dans le ſecond cas où les facteurs du terme propoſé ont des ſignes differens, il faut prendre leur différence, & opérer comme on a fait ci-deſſus pour le premier cas.

Explication & formation générale des Tables des Equations.

Il y a deux eſpéces de Tables, & chacune de ces Tables ſert généralement pour deux formules ſoûcontraires du même degré, dont l'une a les mêmes racines que l'autre, mais avec des ſignes contraires, ce qui eſt de l'eſſence des équations & des formules ſoûcontraires.

Toutes ces Tables conſiſtent dans un échiquier avec deux bordures, l'une en haut, & l'autre à gauche.

L'échiquier contient toujours les ſéries des homogénes, qui ſont des progreſſions arithmétiques, ce ſont les valeurs du dernier terme *b*, qui a toujours un expoſant exprimé ou ſous-entendu en chifre Romain, d'autant de dimenſions que l'expoſant de la haute puiſſance de l'inconnuë.

Des Tables de la prémiére eſpéce.

Dans les Tables de la premiere eſpéce, l'échiquier contient les ſéries horiſontales & verticales des homogénes ſeuls de toutes les équations poſſibles, rationelles & irrationelles dans ces formules ; ces ſéries horiſontales ſuivent la formule, elles ſont croiſſantes ou décroiſſantes,

de la valeur de x du même rang, c'est-à-dire, qu'elles se forment les unes par simple addition, les autres par simple soustraction, suivant qu'il est prescrit par la formule convenable à chacune des tables.

La bordure d'enhaut contient la série des valeurs de a qui est la suite naturelle des nombres qui commence par zéro. o. 1. 2. 3. 4. 5, &c. ce zéro donne pour la premiére colonne de l'échiquier la série des équations pures & simples dans chaque degré.

La bordure à gauche contient deux rangs verticaux ou deux colonnes dans le second degré, trois dans le troisiéme degré, quatre dans le quatriéme degré, &c. la premiére colonne contient la série des nombres qui commence par zéro, o. 1. 2. 3. 4. 5, ce sont les valeurs de x.

La seconde colonne du second degré contient les valeurs de x^2. c'est la suite des quarrez naturels, o. 1. 4. 9. 16. 25, &c.

Dans le troisiéme degré, les deux premiéres colonnes qui contiennent les valeurs de x & de x^2. sont les mêmes que les précédentes, la troisiéme colonne contient les valeurs de x^3. qui est la série des cubes naturels, o. 1. 8. 27. 64, &c. & ainsi des autres.

Des Tables de la seconde espéce.

Les Tables de la seconde espéce, ne contiennent que les seules Equations rationelles, soit réelles soit imaginaires.

L'échiquier contient dans chaque cellule un homogéne avec toutes ses racines; ainsi l'échiquier contient tout ensemble les séries des homogénes & les séries de de toutes leurs racines.

La

La bordure d'enhaut contient les valeurs de *a* variable & ſeule dans le 2d. degré. Dans le 3me. degré il y a des a^1 & des a^2. Si la valeur de *a* eſt variable, la valeur de a^2 eſt conſtante, & dans quelques Tables elle contient une valeur conſtante de *a* avec une valeur de a^2 variable, & l'on peut dreſſer des Tables, ſuppoſant *a* variable ſur chacune des valeurs de a^2 conſtante, priſe dans la ſuite des nombres naturels, pour le 3me. degré; dans les degrez ſupérieurs l'on aura un plus grand nombre de combinaiſons; car on aura dans le qaatriéme degré a^1, a^2, a^3, que l'on peut combiner à l'infini, en ſuppoſant, ou deux de ces valeurs conſtantes & la 3me. variable, ou bien en les ſuppoſant variables toutes trois enſemble de toutes les maniéres poſſibles. Ce qui donnera autant de ſéries différentes pour les homogénes.

La bordure à gauche contient au premier rang vertical ou premiére colonne, les valeurs de *x* où la 1re. racine, la 2me. colonne contient la ſeconde racine pour le 2d. degré; dans le 3me. degré il y a trois colonnes qui donnent les trois racines, dont les deux premiéres ſont conſtantes & la troiſiéme eſt variable; quelquefois c'eſt la ſeconde qui eſt variable. Il y a des formules où il y a deux racines variables en même tems, & d'autres où les trois racines varient enſemble. Tout cela s'éclaircira par les Exemples & par les Tables qui ſuivent, beaucoup plus que par un plus long diſcours.

Uſage des Tables, pour réſoudre les Equations de tous les degrés à l'infini.

1°. Chaque Table porte en tête les formules ſur leſquelles elle eſt dreſſée, & les termes des formules ſont placez ſé-

parément dans les endroits de la table qui leur conviennent; la haute puiſſance de l'inconnuë eſt ſur la bordure à gauche. Les facteurs a des termes moyens ſont ſur la bordure d'enhaut; cette bordure détermine la colonne où l'on doit trouver l'homogéne propoſé b. Tous les homogénes ſont dans l'échiquier avec l'expoſant de leurs dimenſions ſous-entendu.

Pour la premiére eſpéce.

Les Tables de la premiére eſpéce, donnent directement la premiére racine dans la premiére colonne de la bordure à gauche vis-à-vis de l'homogéne propoſé pour chacune des équations poſſibles dans les formules ſur leſquelles chacune des tables eſt dreſſée.

Premier exemple. Soit l'équation pure & ſimple du 2d. degré $x^2 \pm ox. = 4$, dans laquelle $a = o$, & $b^{II} = 4$. Je cherche dans la premiére table du 2d. degré dans la bordure d'enhaut $a = o$; c'eſt la colonne où je dois trouver l'homogéne $b = 4$. Je le trouve en effet, & j'ai à côté dans la premiére colonne entre les valeurs des x, du même rang horizontal $x = 2$, qui eſt la premiére racine deſirée. La ſeconde racine eſt $x + a$, $= 2 + 0 = 2$.

Second exemple. Mais ſi on propoſe l'équation $x^2 \pm ox = 6$. comme l'homogéne $b = 6$ ne ſe trouve point dans la table dans la colonne $a = o$, mais qu'il eſt compris dans la ſuite naturelle des nombres dans l'interval des deux homogénes conſécutifs $b = 4$, $b = 9$. ſa premiére racine eſt plus grande que 2 racine de $b = 4$, & moindre que 3 racine de $b = 9$. or 2 & 3 ſont deux racines qui ne différent que de l'unité. Donc 2 eſt une racine approchée par défaut, & 3 une racine approchée par excès à moins de l'unité près. La ſeconde racine eſt $x + a = 2 + 0$ trop petite, ou $3 + 0$ trop grande.

Troiſiéme Exemple. Soit l'équation affectée de termes

moïens du 2d. degré $x^2 + 3x = 10$. je cherche dans la bordure d'enhaut $a = 3$, c'eſt la colonne où je dois trouver l'homogéne $b = 10$. Je le trouve en effet, & j'ai à côté à la premiére cellule du même rang horizontal $x = 2$; c'eſt la premiére racine qui eſt poſitive; la 2de. racine eſt $x + a = 2 + 3 = 5$ qui eſt négative.

Quatriéme exemple. Soit l'équation irrationelle du 2d. degré $x^2 + 3x = 20$. dans laquelle $a = 3$, & $b^{II} = 20$. je cherche $a = 3$ dans la bordure d'enhaut, c'eſt la colonne où je dois trouver l'homogéne $b^{II} = 20$, je ne l'y trouve point mais 18 & 28, dans l'interval, deſquels il ſe trouve dans la ſuite naturelle des nombres, d'où je conclus que l'équation propoſée eſt irrationelle, & que ſes racines ſont plus grandes que celle de l'homogéne $b^{II} = 18$, dont les racines ſont $x = 3$ poſitive, $x + a = 3 + 3 = 6$ négative, puiſque $20 > 18$. de même comme $20 < 28$, les racines de 28 ſont trop grandes, c'eſt $x = 4$ poſitive & $x + a = 4 + 3 = 7$ négative. Donc $+ 3 - 6$ ſont les deux racines approchées par défaut; mais $+ 4 - 7$. ſont les deux racines approchées par excès. Or ce défaut & cet excès ſont moindres que l'unité.

Pour le troiſiéme degré.

Cinquiéme exemple. Soit $x^3 + 1x^2 \pm 0^{II} x^I = 36$, dans laquelle $a = 1$, & $b^{III} = 36$. dans la 3me. table de la premiére eſpéce qui eſt dreſſée ſur cette formule, je cherche dans la bordure d'enhaut $x = 1$. C'eſt la colonne où je dois trouver l'homogéne 36 s'il eſt rationel, (ou bien il ſera compris dans l'intervale de deux homogénes conſécutifs de la même colonne, s'il eſt irrationel) or $b = 36$ s'y trouve; & j'ai à côté dans la premiére cel-

lule de la bordure à gauche du même rang horizontal $x = 3$. c'eſt la premiére racine poſitive, $x - 3 = 0$, par laquelle je diviſe l'équation propoſée, & le quotient eſt une équation du 2^d. degré dont il eſt facile de trouver les racines.

Diviſeur	*Dividende*		*Quotient.*
$x - 3 = 0$	$x^3 + 1x^2 \pm 0^{II}\ x^I - 36 = 0.$		$x^2 + 4x + 12 = 0.$
$x^2 \ldots\ldots$	$x^3 - 3x^2.$		
	$0 + 4x^2 : \pm 0^{II} . x^I.$		
$+ 4x \ldots\ldots$	$+ 4x^2 . - 12.\ x^I.$		
	$0 \quad + 12.\ x^I : - 36.$		
$+ 12 \ldots\ldots\ldots$	$+ 12.\ x^I. - 36.$		
$= 0$	$0 \qquad 0.$		

Ce quotient eſt du 2^d. degré & dans la 6me. formule qui a deux racines imaginaires. Je cherche ce quotient $x^2 + 4x + 12 = 0$. dans la 2de. table de la 2de. eſpéce du 2^d. degré dans la colonne $a = 4$, & je trouve les valeurs de ſes deux racines imaginaires & poſitives $2 \pm \sqrt{4 - 12}$ qui donnent les deux racines $x - 2 \pm \sqrt{-12} = 0$.

En géneral la valeur déterminée du cœfficient ou facteur a contenuë dans la bordure d'enhaut, détermine toujours la colonne où l'on doit trouver l'homogéne propoſé ; la 1re. racine. eſt dans la 1re. cellule du même rang horiſontal dans les tables de la premiére eſpéce.

2°. Les Tables de ſeconde eſpéce, donnent tout à la fois

toutes les racines de l'équation propoſée ; c'eſt-à-dire, autant de racines que l'expoſant de la haute puiſſance ou du degré de l'équation (qui ſont les mêmes) contiennent d'unitez.

Du cas irréductible du troiſiéme degré.

Le cas irréductible du 3me. degré ſe trouve dans les équations du 3me. degré dont les trois racines ſont irrationelles ou incommenſurables ; c'eſt-à-dire qui n'ont pas même l'unité ni aucune fraction pour commune meſure ; ainſi il n'y a point de racine exacte pour réduire l'équation au ſecond degré par la diviſion.

Ce Problême n'eſt pas moins célébre parmi les Analiſtes, que la quadrature du cercle l'eſt parmi les Géométres c'eſt là où ſe réduit la triſection de l'angle.

Toutes les équations poſſibles dans la quatriéme formule de la 2de. eſpéce de la 2de. claſſe du 3me. degré $x^{3} - a^{''} x = - b^{'''}$, & le quart des équations poſſibles ſur une même valeur conſtante de x priſe pour la grande racine, tombent néceſſairement dans le cas irréductible ; il y en a auſſi dans les formules de la 1re. eſpéce de la 2de. claſſe du 3me. degré, & dans des formules des degrez ſupérieurs.

Il eſt évident que l'homogéne d'une équation dans le cas irréductible qui a ſes trois racines irrationelles eſt compris dans l'intervale de deux homogénes conſécutifs d'une colonne de la 6me. table du 3me. degré, leſquels ont chacun une racine réelle qui eſt approchée à moins de l'unité près. Ainſi l'homogéne moindre que le propoſé donne ſa 1re. racine approchée par défaut, & l'homogéne plus grand, donne la racine approchée par excès. Ainſi l'homogéne irréductible aura ſa véritable premiére racine inexprimable entre deux nombres qui ne different que de l'unité, & par ce moyen on pourra tenter la diviſion par

l'une & l'autre de ces racines approchées pour avoir un quotient qui ſera l'équation propoſée abaiſſée au 2d. degré, dont il eſt facile de trouver les deux autres racines irrationelles.

Exemple. Dans les deux équations conſécutives dans la même colonne de la 6me. table de la premiére eſpéce $x^3 - 4x = 315$. dont la 1re. racine eſt 7, & $x^3 - 4x = - 480$. dont la 1re. racine eſt 8, ſi je prends un homogéne quelconque plus grand que 315 mais moindre que 480, comme $x^3 - 4x = - 420$, j'aurai une équation dans le cas irréductible; la 1re. racine de l'homogéne 420 eſt irrationelle, car elle eſt moindre que 8 & plus de que 7 qui ne différent que de l'unité.

Ainſi les 6es Tables de la 1re. & de la 2de. eſpéce donnent la 1re. racine approchée tant par défaut que par excès de toute équation qui eſt dans le cas irréductible. Et la 6me. table de la 2de. eſpéce donne encore les deux autres racines irrationelles ſans aucune opération pour toutes les équations contenuës dans cette table, ſoit qu'elles ſoient dans le cas ordinaire ou réductible qui a deux racines imaginaires, ſoit qu'elles ſe trouvent dans le cas irréductible dont les trois racines ſont réelles mais irrationelles ou incommenſurable, & comme il eſt impoſſible de les exprimer exactement par aucun nombre, mais qu'on peut ſeulement en approcher tant par excès que par défaut, les tables donnent cette approximation à moins de l'unité près, & on pourra continuer cette approximation à l'infini par les Méthodes de Mr. Lagny qui ſont expliquées dans le ſecond Livre de l'Analyſe qui ſuit.

Nous avons vû dans l'avertiſſement que 10 qui eſt la 1re. racine exacte de l'équation $x^3 - 90x = 100$ priſes pour l'origine d'une ſérie infinie d'homogénes b'''. (dans

le cas irréductible) décroissans constamment de 10 jusqu'à zéro, & croissans constamment de 10 à l'infini, est aussi la premiére racine la plus approchée de toutes ces équations semblables.

De même si on prend l'équation $x^3 - 90x = 81$ pour l'origine du cas irréductible, dont la premiere racine est 9, on aura encore 9 pour la premiére racine approchée de toutes les équations semblables $x^3 - 90x = b'''$. prenant successivement pour les valeurs de b'''. ou pour la série des homogénes 9 & tous ses multiples à l'infini.

En géneral prenant une équation quelconque du 3me. degré dans la formule $x^3 - a''x' = b'''$. ou dans la formule $x^3 - a''x' = - b'''$. dont la premiére racine soit réelle & les deux autres irrationelles, on pourra sur cette équation faire varier le seul homogéne par tous les multiples de sa premiére racine en décroissant, & par tous les multiples de la même premiére racine en croissant à l'infini; alors tous ces homogénes donneront des équations semblables dans le cas irréductible, dont les trois racines seront irrationelles & leur premiére racine la plus approchée, est la premiére racine de l'équation prise pour l'origine de cette série infinie d'équations qui sont dans le cas irréductible.

Ainsi dans tous ces cas les Tables donneront la racine desirée de la maniére dont il est possible de la trouver, c'est-à-dire à moins de l'unité près; car dans le cas irréductibles il est absolument impossible de trouver cette premiére racine exactement; cela implique contradiction; car il est de l'essence & de la nature du cas irréductible d'avoir trois racines irrationelles & incommensurables, partant inexprimables : pour les deux autres racines on

les exprime avec des radicaux qui eſt une expreſſion qui détermine à la verité leur valeur, mais d'une maniére entiérement in-intelligible quoique réelle d'où il ſuit que les tables donnent tout ce qu'on peut déſirer dans le cas irréductible, ſçavoir une approximation pour la premiére racine à moins d'une unité près par les tables des deux eſpéces; mais la table de la ſeconde eſpéce donne tout à la fois les trois racines; de ſorte que diviſant une équation du troiſiéme degré propoſée dans le cas irréductible, la premiére racine trouvée par les tables diviſera toujours l'équation, mais avec un reſte ſoit poſitif, ſoit négatif. Ce qu'on ne pourra jamais faire par tout autre nombre, & le quotient contiendra la valeur exacte des deux autres racines irrationelles, leſquelles ſont contenuës dans la table de la ſeconde eſpéce. Voilà tout ce qu'on peut déſirer pour le cas irréductible.

Explication de chaque Table en particulier avec ſon uſage.

Dans le ſecond degré il y a ſix formules diviſées en deux claſſes. La premiére contient les deux formules pures & ſimples. La ſeconde contient quatre formules complettes.

La 1re. formule $x^2 \pm 0x = b^{II}$ a deux racines égales, l'une poſitive l'autre négative, en nombres entiers lorſque b^{II} eſt un quarré parfait; mais ces racines ſont irrationelles lorſque b^{II} eſt une ſeconde puiſſance imparfaite.

La ſeconde formule $x^2 + 0x = -b^{II}$ a deux racines égales & imaginaires $\pm \sqrt{-b^{II}}$ Voilà les deux formules des équations pures & ſimples.

La troiſiéme formule $x^2 + a^I x^I = b^{II}$ a ſa petite racine poſitive, & la grande négative réelles & irrationelles.

La quatriéme formule $x^2 - a^I x^I = b^{II}$ à ſa grande racine

racine positive, & sa petite racine négative, toutes deux réelles.

La cinquiéme formule $x^2 - a^1 x^1 = - b^{11}$ ses deux racines sont ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, suivant les cas.

Troisiéme cas. Lorsque $b^{11} > \frac{1}{4} aa$, les deux racines sont imaginaires, égales & positives:

Premier cas. Elles sont réelles égales & positives lorsque $b^{11} = \frac{1}{4} aa$.

Second cas. Elles sont réelles, inégales & positives lorsque $b^{11} < \frac{1}{4} aa$.

La sixiéme formule $x^2 + ax = - b^{111}$ a ses deux racines ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires suivant les cas.

Troisiéme cas. Lorsque $b^{11} > \frac{1}{4} aa$ ses deux racines sont imaginaires, égales & négatives.

Premier cas. Elles sont réelles, égales & négatives lorsque $b^{11} = \frac{1}{4} aa$.

Second cas. Mais elles sont réelles, inégales & négatives lorsque $b^{11} < \frac{1}{4}$

La premiére table de la premiére espéce du second degré contient la premiére formule $x^2 \pm ox = b^{11}$, la série de ses homogénes est dans la premiére colonne de l'échiquier. Le reste de l'échiquier contient les séries des homogénes de la troisiéme formule $x^2 + ax = b^{11}$. Sa premiére racine positive est x, la seconde négative $\underline{x + a}$.

Cette Table contient encore le premier cas; & le 2me. cas des équations de la sixiéme formule dans lesquelles les deux racines sont réelles & négatives en suppo-

ſant $-b^{11}$ précedé du ſigne $-$, le troiſiéme cas de cette formule ſera dans la table des racines imaginaires qui ſuivra ci-après.

La premiére Table de la ſeconde eſpéce contient les mêmes ſéries que celle de la premiére eſpéce ; on y trouve ſous chaque valeur de a ſon homogéne correſpondant avec ſa ſeconde racine au-deſſous dans chaque cellule, & la premiére racine eſt dans la bordure à gauche dans la premiére cellule du même rang horizontal, cette table donne les racines telles qu'elles ſont pour la premiére formule $x^2 \pm ox = b^{11}$ & pour la 3me. formule $x^2 + ax = b^{11}$, mais pour les deux premiers cas de la ſixiéme formule $x^2 + ax = -b^{11}$, il faut ſuppoſer la premiére racine négative comme la ſeconde.

La ſeconde Table de la premiére eſpéce du ſecond degré ſert pour la ſeconde formule $x^2 = -b^{11}$ pour la 4me $x^2 - ax = b^{11}$ pour la 5me. $x^2 - ax = -b^{11}$ & même pour le 3me. cas de la 6me. formule $x^2 + ax = b^{11}$ qui eſt imaginaire.

Cette ſeconde Table contient deux ſéries d'homogénes, l'une finie, l'autre infinie, ſéparées par des zéros qui coupent en diagonale tout l'échiquier & le partagent en deux triangles rectangles, le premier à gauche eſt pour la 4me. formule, l'autre à droite pour la 5me.

Dans la ſeconde formule $x^2 = -b^{11}$ les deux racines ſont imaginaires, c'eſt $\pm\sqrt{-b^{11}}$ elle ſe trouve dans la ſeconde table de la deuxiéme eſpéce contenuë dans le premier triangle à gauche dans la quatriéme formule $x^2 - ax = b^{111}$ la grande racine poſitive eſt x de la bordure à gauche du même rang horizontal que l'homogéne, la petite racine poſitive eſt $a-x$.

Exemple. Dans $x^2 - 3x = 4$. la grande racine positive eſt $x = 2$ la petite négative eſt $\underline{a - x} = 1 - 2 = -1$.

Dans $x^2 - 3x = 4$. La grande racine éſt $x = 4$, la petite eſt $\underline{a - x} = 3 - 4 = -1$. Les ſéries horiſontales des équations de cette quatriéme formule finiſſent aux zéros qui forment la grande diagonale, après laquelle commencent les ſéries horizontales des équations de la cinquiéme formule $x^2 - ax = - b^{II}$

Le triangle rectangle qui eſt à gauche de la diagonale dans la même table contient le premier & le ſecond cas des équations de la cinquiéme formule $x^2 - au = b^{vi}$ & même de la ſixiéme formule $x^2 + ax = - b^{II}$ & on peut négliger cette derniére comme inutile.

Or dans le premier cas de la cinquiéme formule où $\frac{1}{4} aa = b^{II}$ les deux racines ſont réelles, égales & poſitives. Soit $x^2 - 10x = 25$, la 1re. eſt $x = 5$, la ſeconde eſt $\underline{a - x} = 10 - 5 = 5$.

On peut marquer ce cas dans la Table par une petite diagonale dans chaque cellule où il ſe trouve.

Dans le ſecond cas, où $b < \frac{1}{4} aa$, les deux racines ſont réelles, inégales & poſitives, comme dans $x^2 - 10x = 16$. La premiére racine eſt $x = 2$. La ſeconde eſt $\underline{a - x} = 10 - 2 = 8$. ou bien $x = 8$, & $\underline{a - x} = \underline{10 - 8} = 2$, car ces équations ont deux ſolutions, parce que leur homogéne ſe trouve deux fois dans une même colonne.

Le troiſiéme cas de la cinquiéme formule dans lequel $b^{II} > \frac{1}{4} aa$, a ſes deux racines imaginaires égales & poſitives.

Les ſéries de ces équations imaginaires commence

dans tous les rangs verticaux; précisément dans les cellules supposées coupées par des diagonales médiocres qui s'étendent de cinq à cinq cellules en descendant toujours & continuant au dessous à l'infini, supposant le signe — devant les homogénes d'un rang seulement. Exemple, soit $x^2 - 8x = -20$, dont les deux racines sont $4 \pm \sqrt{16-20} = 4 \pm \sqrt{-4}$. Comme la seconde table de la premiére espéce ne donne point ces racines imaginaires d'une maniere assez simple, j'ai été obligé d'employer la seconde espéce des tables où les racines sont dans l'expression qui leur est propre.

On peut appliquer ce que nous avons dit des trois cas de la cinquiéme formule aux trois cas de la sixiéme formule, ce sont les mêmes racines, mais négatives au lieu qu'elles sont positives dans la cinquiéme formule.

La seconde Table de la seconde espéce contient deux feüilles, la premiere contient les deux racines réelles des formules, 4, 5 & 6, la seconde feüille contient les deux racines imaginaires du troisiéme cas de la cinquiéme & de la sixiéme formule, dont les homogénes sont contenus dans le premier triangle rectangle qui est à gauche, dans lequel il faut supposer les homogénes précédez du signe —, sans quoi les racines ne seroient point imaginaires, comme elles doivent l'être en effet, puisque ce signe se trouve dans le second membre de ces deux formules.

Du treisiéme degré.

Dans le troisiéme degré, il y a 18 formules qui se divisent en trois classes.

La premiere classe contient les deux formules pures & simples, la premiere formule $x^3 = - b'''$. a deux racines imaginaires négatives & égales, & la troisiéme racine positive, réelle, égale à la somme des deux premieres racines.

La ſeconde formule $x^3 = - b^{'''}$. a deux racines imaginaires poſitives & égales, la troiſiéme réelle & négative, égale à la ſomme des deux autres racines.

La ſeconde claſſe ſe diviſe en deux eſpéces, & chaque eſpéce contient quatre formules.

Dans la premiere eſpéce de la 2de. claſſe, où le facteur du troiſiéme terme x eſt égal à zéro.

Premiere formule $x^3 + a^{'} x^2 + 0 x = b^{'''}$ qui vient de l'équation du ſecond degré $x^2 + a x - b^{''} = 0$. dont la grande racine eſt négative & la petite poſitive, multipliée par une troiſiéme racine négative, dont la valeur eſt le quotient $\frac{b^{''}}{a^{'}}$ c'eſt-à-dire, le quotient exact de l'homogéne de l'équation du ſecond degré, $b^{''}$ diviſé par ſon facteur a.

$$x + 8 = 0.$$
$$x - 4 = 0.$$

$$x^2 + 4x - 32.$$
$$\times\, x + 8.$$

$$x^3 + 12 x^2 \; 0 x - 256 = 0$$

La troiſiéme Table de la premiere eſpéce contient les ſéries des homogénes des équations ſuivant cette premiere formule, toutes ces ſéries ſont infinies. Cette troiſiéme table donne toujours la premiere racine qui eſt poſitive, & qui ſert à abaiſſer l'équation propoſée au ſecond degré; après quoi il eſt facile d'en trouver les deux racines.

Autrement. La premiere formule $x^3 + a x^2 \pm 0 x$

$= + b'''$ vient de l'équation $x^2 + ax + b'' = 0$, qui eſt dans la ſixiéme formule du ſecond degré qui a deux racines négatives; multipliée par une troiſiéme racine poſitive qui eſt le quotient exact en nombres entiers de l'homogéne du ſecond degré diviſé par ſon facteur, d'où il ſuit que toutes les équations du ſecond degré ne ſont pas propres pour entrer dans les formules de cette eſpéce, mais ſeulement celles dont le facteur eſt un diviſeur exact de leur homogéne

$$x - 8 = 0.$$
$$\times\ x + 4 = 0.$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0.$$
$$\times\ x - 2.$$

$$x^3 + bx^2 + 32 = 0.$$

La ſeconde formule $x^3 + ax^2 \pm 0x = - b''$, vient de l'équation de la cinquiéme formule du ſecond degré, dont les deux racines ſont poſitives & imaginaires & égales, multipliée par une troiſiéme racine négative, qui eſt le quotient exact de l'homogéne du ſecond degré diviſé par ſon facteur.

$$x - 1 - \sqrt{-7} = 0.$$
$$\times\ x - 1 + \sqrt{-7} = 0.$$

Donne $x^2 - 2x + 1 + 7 = 0.$

ou $x^2 - 2x + 8 = 0.$

$\times\ x + 4 = 0.$

$$x^3 + 2x^2 \pm 0x + 32 = 0.$$

ou $x^3 + 2x^2 \pm 0x = - 32.$

Les équations de cette formule ſont impoſſibles, car ſoit $x = 4$, on aura par ſubſtitution & tranſpoſition $64 = -32 - 32$, ce qui eſt impoſſible & inutile, puiſque le poſitif ne peut être égal au négatif pur & ſimple; ainſi les tables ne contiendront point cette formule.

La troiſiéme formule $x^3 - 4x^2 \pm 0x = 72'''$, vient de l'équation $x^2 + 2x + 12 = 0$, qui eſt dans la ſixiéme formule du ſecond degré, dont les deux racines ſont égales & imaginaires. $-1 \pm \sqrt{1-12}$, multipliée par une troiſiéme racine poſitive 6 égale au quotient exact de l'homogéne du ſecond degré diviſé par ſon facteur.

$$x + 1 + \sqrt{-11} = 0.$$
$$\times\ x + 1 - \sqrt{-11} = 0.$$

$$x^2 + 2x + 1 + 11\ (+12) = 0.$$
$$x^2 + 2x + 12 = 0.$$
$$\times\ x - b = 0.$$

$$x^3 - 42^2 + 12x - 72 = 0.$$
$$-12x.$$

La quatriéme formule $x^3 - ax^2 \pm 0x = -b'''$, vient de l'équation $x^2 - ax + b'' = 0$, qui eſt dans la quatriéme formule du ſecond degré, dont la grande racine eſt poſitive, qui eſt le quotient exact de l'homogéne du ſecond degré diviſé par le facteur du ſecond terme.

$x - 8 = 0.$
$\times\ x + 4 = 0.$

$x^2 - 4x - 32 = 0.$
$\times\ x \quad - 8 = 0.$

$x^3 - 12x^2 - 32x + 256 = 0.$
$\qquad\qquad + 32x.$

La quatriéme table de la premiere eſpéce donne la premiere racine poſitive des équations qui ſont dans la troiſiéme formule $x^3 - a^{\text{I}}x^2 \pm o^{\text{II}}x^{\text{I}} = b^{\text{III}}$, & dans la quatriéme formule $x^3 - a^{\text{I}}x^2 \pm o^{\text{II}}x^{\text{I}} = - b^{\text{III}}$, & la quatriéme table de la ſeconde claſſe donne les trois racines de la troiſiéme & de la quatriéme formule.

Des formules de la ſeconde claſſe du troiſiéme degré, où le ſecond terme eſt évanoüi.

Il y a quatre formules de la ſeconde eſpéce de la ſeconde claſſe du troiſiéme degré, ſont celles où le ſecond terme manque.

La premiere formule eſt $x^3 \pm o x^2 + a^{\text{II}}x = b^{\text{III}}$, qui vient d'une équation du ſecond degré dont les deux racines ſont poſitives, égales & imaginaires, multipliée par une troiſiéme racine négative & réélle égale à leur ſomme.

La cinquiéme table de la ſeconde eſpéce donne ces trois racines en détail pour chaque homogéne de la premiere formule, on a mis auſſi en tête la ſeconde formule, formule $x^3 \pm o^{\text{I}}x^2 + a^{\text{II}}x = - b^{\text{III}}$, pour laquelle elle peut ſervir; mais cette formule eſt inutile & impoſſible, car il eſt impoſſible que le poſitif du premier membre ſoit égal au négatif pur, & ſimple du ſecond membre.

La

La cinquiéme table de la premiere eſpéce donne ſeulement la troiſiéme racine réelle dans la premiere & dans la ſeconde formule de cette ſeconde eſpéce.

La troiſiéme formule $x \pm o\, x^{2} - a^{II} x^{I} = b^{III}$, vient d'une équation du ſecond degré qui a deux racines négatives égales & imaginaires, multipliée par une racine poſitive réelle égale à leur ſomme; toutes les ſéries de ſes homogénes ſont finies, & arrivent à des zéros qu'on peut marquer avec des croix de St André dans les cellules de la ſixiéme table de la prémiére eſpéce, qui forment une diagonale interrompuë comme par des eſpéces de degrez. Cette ſixiéme table donne ſeulement la troiſiéme racine réelle.

La ſixiéme table de la ſeconde eſpéce contient deux feüilles, la premiere contient les homogénes qui ont trois racines rationnelles qui ſont marquées à côté; la ſeconde feüille contient les trois racines des équations pures & ſimples du troiſiéme degré, & celles de la troiſiéme & de la quatriéme formule de cette ſeconde eſpéce qui ont des racines imaginaires.

La quatriéme formule $x^{3} \pm o\, x^{2} - a^{II} x = - b^{III}$ vient d'une équation du ſecond degré qui a deux racines négatives égales & irrationnelles, multipliée par une troiſiéme racine poſitive égale à leur ſomme. Ces homogénes occupent la partie ſupérieure des tables, la ſixiéme table de la premiére eſpéce donne la troiſiéme racine: mais la table de la ſeconde eſpéce donne toutes les trois racines.

Des Formules de la troisiéme classe du troisiéme degré.

Il y a huit Formules dans la troisiéme classe du troisiéme degré.

1re. $x^3 + a^{\mathrm{I}} x^2 + a^{\mathrm{II}} x^1 = b^{\mathrm{III}}$.

2de. $x^3 + a^{\mathrm{I}} x^2 + a^{\mathrm{II}} x^1 = - b^{\mathrm{III}}$.

3me. $x^3 + a^{\mathrm{I}} x^2 - a^{\mathrm{II}} x^1 = b^{\mathrm{III}}$.

4me. $x^3 + a^{\mathrm{I}} x^2 - a^{\mathrm{II}} x^1 = - b^{\mathrm{III}}$.

5me. $x^3 - a^{\mathrm{I}} x^2 - a^{\mathrm{II}} x^1 = b^{\mathrm{III}}$.

6me. $x^3 - a^{\mathrm{I}} x^2 - a^{\mathrm{II}} x^1 = - b^{\mathrm{III}}$.

7me. $x^3 - a^{\mathrm{I}} x^2 + a^{\mathrm{II}} x^1 = b^{\mathrm{III}}$.

8me. $x^3 - a^{\mathrm{I}} x^2 + a^{\mathrm{II}} x^1 = - b^{\mathrm{III}}$.

Ce que nous avons dit suffit pour expliquer la Méthode.

Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail, il sera facile au lecteur de dresser lui-même des tables suivant chacune de ces formules, & de même dans tous les degrez supérieurs pour s'en servir dans le besoin, je me contenterai d'ajoûter quelques tables des deux espéces différentes pour les formules de la troisiéme classe du troisiéme degré, avec deux tables des formules du cinquiéme degré, je ferois un trop gros volume si je voulois mettre toutes les recherches que j'ai faites sur ce sujet; il est bon de laisser au lecteur le plaisir de travailler par lui-même, & de suivre la route que j'ai te-

nuë aussi loin qu'il lui plaira, il ne me reste plus que de donner des moïens d'abréger la construction des tables, pour les continuer promtement aussi loin qu'on voudra à l'infini, en quoi consiste la perfection de la Méthode, pour résoudre les équations dont l'homogéne est un très-grand nombre, & dont chaque racine contient plusieurs chifres.

Différentes Méthodes pour abréger les Tables.

Il est évident que toutes les puissances des nombres de tous les degrez à l'infini, ont une derniére différence toujours égale & constante, laquelle a le même exposant que celui du degré de la puissance supposée; ainsi la suite des secondes puissances des quarrez naturels, ont la seconde différence 2 constante. La suite des troisiémes puissances ou des cubes, ont leur troisiéme différence 6 toujours égale & constante, pour trouver ces différences, il faut avoir trois termes dans le second degré, quatre termes dans le troisiéme degré; c'est-à-dire, un terme de plus que l'exposant du degré proposé ne contient d'unitez, ensuite écrire les mêmes termes au-dessous en les avançant d'un rang pour ôter le premier du second, & le second du troisiéme pour avoir les premiéres différences, ensuite écrire les premiéres différences les unes sous les autres, en les avançant d'un rang pour ôter la premiére de la seconde, & ainsi de suite, pour avoir les secondes différences qui sont égales & constantes dans le second degré.

Secondes puissances.	1.	4.	9.	16.	25.	36,	&c.
ôtez		1.	4.	9.	16.	25,	&c.
Premiéres differences.		3.	5.	7.	9.	11,	&c.
ôtez			3.	5.	7.	9,	&c.
Secondes differ. constantes.			2.	2.	2.	2,	&c.

Troiſiémes puiſſan.	1.	8.	27.	64.	125,	&c.
ôtez		1.	8.	27.	64,	&c.
Premiéres differences.		7.	19.	37.	61,	&c.
ôtez			7.	19.	37,	&c.
Secondes différences.			12.	18.	24,	&c.
ôtez				12.	18,	&c.
Troiſiéme difference conſtante				6.	6,	&c.

Si au lieu de prendre ces mêmes puiſſances de ſuite, on les prend dans une progreſſion quelconque, en ſautant quelques termes de 3 en 3, ou de 5 en 5, ou de 8 en 8, de 10 en 10, &c. On pourra toujours trouver par la ſouſtraction leur derniere différence égale & conſtante, qui ſera la ſeconde différence dans le ſecond degré, la troiſiéme différence dans le troiſiéme degré, la quatriéme différence dans le quatriéme degré, &c. Mais cette différence conſtante ne ſera pas un même nombre, que celui qui ſe trouve dans la ſuite naturelle de ces puiſſances.

Il ſuit de-là que l'on pourra toujours continuer à l'infini la ſérie d'une puiſſance quelconque, en opérant par l'addition de ſes différences dans un ſens contraire à la ſouſtraction qui a donné leurs différences ; il ſuffit pour cela d'avoir la derniere différence conſtante, & pour la trouver, il ne faut qu'un ſeul terme de plus que l'expoſant du degré : par ce moyen on formera les premiéres colonnes des tables pour réſoudre les équations.

De même dans chaque degré il y a des ſéries infinies d'équations arithmétiquement ſemblables, leſquels ne différent que dans leur dernier terme ou l'homogéne ſeul, qui eſt la valeur de *b*, que nous conſidérons toujours avec un expoſant (exprimé ou ſoûs-entendu dans les tables) en chifres italiques qui marque autant de dimenſions que l'expoſant du degré de l'équation con-

tient d'unitez. Or dans chaque cas particulier ces homogénes forment une férie infinie, & même dans quelques formules, ils ont d'abord une ferie finie qui arrive au zéro, après lequel commence la férie infinie, & toutes ces féries d'homogénes compris dans les colonnes des tables, font des progreffions arithmétiques du même degré que l'équation, qui ont une derniere différence toujours égale & conftante, qui a pour expofant celui du degré de l'équation, ce Théorême a été démontré par M^r. de Lagny dans les Mémoires de l'Académie des années 1705, & 1706. C'eft fur le fondement que j'établis la conftruction & l'ufage de mes tables, avec les différens moyens que je donne pour les abréger, qui font une démonftration fenfible de cette vérité.

Premier moïen d'abréger les Tables, en fe fervant pour les grands nombres des petites Tables, comme des plus grandes.

Je fuppofe qu'on ait feulement les petites tables imprimées de dix rangs horifontaux pour les valeurs de $x = 0$, jufqu'à $x = 10$. de $a = 0$, jufqu'à $a = 10$. pour trouver par leur moïen des équations exprimées par de grands nombres, il y a trois cas pour trouver tout d'un coup un terme très-éloigné.

Le premier cas eft de le trouver promtement dans un rang horifontal.

Le fecond cas eft de le trouver dans un rang vertical.

Le troifiéme cas eft de trouver un terme très-éloigné, & dans un rang horifontal, & dans un rang vertical tout enfemble.

Premier cas pour trouver tout d'un coup un terme très-éloigné dans un rang horifontal déterminé, dans la troifiéme formule du fecond degré, par exemple, dans le neuviéme rang horifontal, fi on demande le nonante-

ſeptiéme terme, je n'ai qu'à écrire ſimplement $a = 97$.

Dans les degrez ſupérieurs où il y a des a de pluſieurs dimenſions, on trouvera de même les valeurs de a, mais pour les valeurs de a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, &c. Il faut conſidérer la progreſſion qui regne dans leur ſérie exprimée dans la table où ils ſe trouvent, pour en prendre la différence & la multiplier par l'expoſant du terme propoſé, par exemple, pour avoir le nonante-ſeptiéme de la ſérie de a^{II}, dont la progreſſion croit de 7 d'un terme au ſuivant, il faut multiplier par 7 l'expoſant 97, qui marque le rang que doit occuper le terme propoſé dans la ſérie des a de deux dimenſions, & le produit 679 donne a^{II}, $=679$, pour la valeur du terme propoſé.

Pour avoir un homogéne ou une valeur de b très-éloignée dans un rang horiſontal déterminé, par exemple, le nonante-ſeptiéme terme dans le huitiéme rang horiſontal de la premiere table ſur la troiſiéme formule $x^2 + ax = b^{II}$. (car dans toutes les tables il faut toujours que les b de l'échiquier aïent autant de dimenſions ſous-entenduës ou exprimées en chifres romains, que l'expoſant de la haute puiſſance de l'inconnuë x contient d'unitez.) Je conſidere la différence qui regne dans le rang horiſontal eſt égale à la valeur de $x = 8$ du même rang. Ainſi je multiplie 8 par 97 expoſant du terme propoſé, le produit 776 eſt la valeur des 96 termes précédens, auſquels il faut ajoûter le quarré $x^2 = 64$, car le premier terme $a = 1$ donne pour le premier homogéne $b^{II} = 72 = 8 + 64$. Or $776 + 64$ donne $b^{II} = 840$ qui eſt le nonante-ſeptiéme homogéne déſiré.

Mais pour avoir le nonante-ſeptiéme homogéne dans la ſeconde table du ſecond degré ſuivant la quatriéme formule $x^2 - ax = b^{II}$, comme les termes ſe trouvent

par soustraction à cause du signe moins de la formule, je multiplie l'exposant 8 du rang donné par 97, exposant du terme proposé, le produit est 776, dont j'ôte $x^2 = 64$, la somme $776 - 64 = 712$, donne pour le terme désiré $b'' = -712$. La raison en est évidente, puisqu'il y a deux séries, l'une finie qui arrive au zéro, l'autre infinie toujours croissante, suivant la quatriéme formule le huitiéme rang, ou $x = 8$ ne croit de -8 qu'au dixiéme terme qui est $b'' = -8$, le neuviéme est zéro, & le huitiéme est $b'' = 8$. Ainsi il faut retrancher pour ces huit termes le quarré de $8 = 64$.

Dans tout autre rang, il faut toujours retrancher le quarré de la valeur de x prise dans le même rang, & qui est son exposant, car je ne compte point le premier rang de $x = 0$, qui n'est mis que par simple analogie seulement, & pour faire partir les séries verticales des homogénes du zéro, d'ou partent toutes les grandeurs numériques, pour partir d'aussi loin qu'il est possible.

Le second cas, est pour trouver un ou plusieurs termes très-éloignez dans un rang vertical, chaque rang vertical ou colonne contient une série d'homogénes d'équations Arithmétiquement semblables; c'est-à-dire, des équations qui ont les mêmes termes moïens avec les mêmes facteurs, & qui ne différent uniquement que dans leur homogéne seul, 2°. que tous ces homogénes sont du même degré que l'équation, par conséquent ils font une progression du même degré qui a une derniere différence toujours égale & constante, & dont l'exposant est celui du même degré, c'est la seconde différence dans le second degré, la troisiéme dans le troisiéme degré, &c.

Pour trouver un terme très-éloigné dans une colonne de la bordure qui est à gauche dans la premiere table

du ſecond degré, ſi on demande le ſoixante-troiſiéme terme de la premiére colonne, c'eſt cet expoſant propoſé qui donne lui-même $x = 63$; ſi on demande ce ſoixante-troiſiéme terme dans la ſeconde colonne de x il faut élever 63 à la ſeconde puiſſance pour avoir $x^2 = 3969$ qui eſt le terme déſiré.

Si on demande le nonante-ſeptiéme homogéne, dans une autre colonne déterminée par la valeur de a, comme $a = 3$, contenuë dans l'échiquier entre les valeurs de b^{II} ; c'eſt à-dire, le nonante-ſeptiéme homogéne dans la même table premiére, ſur la troiſiéme formule $x^2 + ax = b^{II}$, je cherche d'abord ce nonante-ſeptiéme terme pour la bordure à gauche, j'ai pour la premiére colonne $x = 97$, & ſon quarré donne pour la ſeconde colonne $x^2 = 9409$, & opérant ſuivant la formule & ſubſtituant ces nombres, dans $x^2 + ax = b^{II}$, j'ai $9409 + 3 \times 97 = b^{II}$, qui donne $9700 = b^{II}$, c'eſt le nonante-ſeptiéme homogéne déſiré.

Pour avoir de ſuite pluſieurs homogénes très-éloignez dans une même colonne, il faut d'abord en trouver pluſieurs de ſuite; Sçavoir, un de plus que l'expoſant du degré, afin de trouver leurs différences pour la ſouſtraction expliquée ci-deſſus, & on continuëra leur ſérie auſſi loin qu'on voudra par l'addition de leurs différences trouvées.

Par exemple. J'ai trois homogénes dans la troiſiéme formule du ſecond degré $x^2 + ax = b^{II}$; Sçavoir, 595, 648, 703, dans une même colonne de $a = 18$. Je trouverai la ſérie entiere par l'addition de leurs différences comme il ſuit.

valeurs

Valeurs de $x =$	17.	18.	17.	20.	21.	22,&c.
Valeurs de $x^2 =$	595.	648.	703.	760.	819.	880,&c.
ôtez	595.	648.	703.	760.	819,&c.	
Premiére difference.	53.	55.	57.	59.	61,&c.	
ôtez	53.	55.	57.	59,&c.		
Seconde difference constante.	2.	2.	2.	2,&c.		

Le troisiéme cas ne renferme aucune difficulté, puisqu'il contient les deux premiers que nous venons d'expliquer.

Deuxiéme moïen d'abréger les Tables afin d'employer les petites Tables pour les grands nombres.

Le moïen le plus court & le plus simple est de faire des petites tables qui puissent servir pour de grands nombres, & de substituer dans la formule qui sert à construire chaque table les nombres premiers, au lieu de la suite ordinaire des nombres naturels, & d'écrire dans les bordures en haut & à gauche la suite de ces nombres premiers tels qu'ils suivent. 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59 61. 67. 71. 73. 79. 83. 89. 97. 101. &c. Il sera facile par ce moïen d'avoir les autres nombres moindres compris dans leur interval qui ne sont point ici, puisqu'ils sont des multiples de quelque nombre premier qui les précéde.

On peut aussi employer la suite des nombres naturels dans l'une des bordures, & la suite des nombres premiers dans l'autre bordure lorsque l'on voudra des tables plus am les.

Lorsqu'on veut des tables pour des grands nombres, on peut d'abord substituer 100, ou 1000, ou tout autre nombre plus grand dans la formule au lieu de 1, 2, 3, &c.

que nous avons ſubſtitué pour former les petites tables. Ce qui eſt facile, & ce qui ne demande pas un plus grand détail.

Troiſiéme moïen d'abréger les Tables.

On peut encore pour abréger la conſtruction des tables ſauter pluſieurs termes de 3 en 3, ou de 5 en 5, ou dans telle autre progreſſion que l'on voudra.

Quatriéme moïen en réduiſant l'Equation à ſes moindres termes.

Lorſqu'une Equation eſt propoſée en grands nombres, dans le ſecond degré, j'ôte du ſecond terme le plus grand nombre poſſible, & j'ôte le quarré du même nombre de ſon homogéne, & par ce moïen je réduis l'équation à de très petits nombres, de ſorte que je peux la réſoudre par de très-petites tables.

Dans le troiſiéme degré j'ôte la troiſiéme puiſſance d'un nombre, & j'ôte les puiſſances inférieures du même nombre des cœfficiens ou facteurs des termes moïens, chacun ſuivant le nombre de ſes dimenſions, pour réduire l'équation à ſa plus ſimple expreſſion, & aux moindres nombres, afin de pouvoir la réſoudre par de petites tables; mais après avoir trouvé la racine, il faut l'augmenter de la racine qui a été retranchée, & par ce moïen on pourra ſe ſervir facilement des petites tables pour les grands nombres : mais le lecteur trouvera toujours beaucoup à profiter en continuant d'abord aſſez loin les tables pour conſidérer dans le détail leurs progreſſions, qui ſont une ſource très-abondante de Theorémes & de Problêmes que je ſupprime ici pour abréger ce Traité; on tirera même pluſieurs Méthodes génerales pour réſoudre les équations de tous les degrez à l'infini, par exemple. Dans le

ſecond degré la valeur de *a* eſt toujours le diviſeur exact de l'homogéne, il contient toujours deux puiſſances de *a* qui différent de la valeur de *a*, ce qui donne une méthode ſimple & facile pour réſoudre les équations affectées de termes moïens dans le ſecond degré.

Par exemple. Soit une équation quelconque dans la quatriéme formule du ſecond degré $x^2 - 4x = b''$, ſoit $a = 7$. la ſérie des homogénes ou des valeurs de b'' dans cette colonne eſt double l'une finie, & l'autre infinie; la ſérie finie eſt 0. 6. 10. 12. 12. 10. 6. 0. & la ſérie infinie qui commence après le zéro eſt 8. 18. 30. 44. 60. 68. 98. 120. 144. 170. 198. 228. &c.

Le premier homogéne 6. dans la ſérie infinie a pour racine deux puiſſances de $a = 7$, dont la différence eſt $a = 7$. la premiére racine eſt $1 = 7 \times 1 - 6$. la ſeconde eſt $6 = 7 \times 1 - 1$. Le ſecond homogéne 10, a pour racines 2 & 5. Or $2 = \underline{7 \times 1} - 5$ & $5 = \underline{7 \times 1} - 2$.

De même dans la ſérie infinie l'homogéne 8, a pour racines 8 & 1. Or $8 = \underline{7 \times 1} + 1$, & $1 = \underline{7 \times 1} - 6$.

Dans l'homogéne 18 ſes racines ſont $+ 2$ & $- 9$. Or $2 = \underline{7 \times 1} - 5$ & $9 = \underline{7 \times 1} + 2$.

Dans l'homogéne 228. les racines ſont $+ 12$ & $- 19$. Or $12 = \underline{7 \times 2} - 2$, & $19 = \underline{7 \times 2} + 5$.

Ce qui montre évidemment que les racines de l'homogéne ſont deux puiſſances ſemblables de *a*, dont la différence l'une poſitive & l'autre négative ſont toujours une ſomme égale à la valeur déterminée de $a = 7$ dans ce cas particulier,

Il ſeroit à déſirer qu'on pût trouver une Méthode auſſi ſimple pour tous les degrez ſupérieurs; je l'ai tenté, mais il me reſte encore des difficultez à ſurmonter pour la rendre génerale pour tous les degrez ſupérieurs à l'infini.

Suivent les Tables pour la Résolution des Equations de tous les degrez à l'infini. J'en ai mis seulement 25 pour servir d'exemples pour en dresser de semblables.

Pour le second degré, il y a quatre tables, deux de la premiére, & deux de la seconde espéce.

Pour le troisiéme degré, il y a dix-neuf tables, & on peut augmenter leur nombre, & mettre à part les Equations qui ont des racines imaginaires d'un côté, & de l'autre celles dont les racines sont réelles, comme on le voit dans la sixiéme table qui a trois feüilles, la premiére est pour la premiére espéce des tables, mais la seconde espéce des tables a deux feüilles, l'une pour les racines réelles, l'autre pour les racines imaginaires.

La seconde classe du troisiéme degré a cinq tables, la troisiéme classe en a dix, dont la formation est évidente. Les deux derniéres tables sont pour la seconde classe du cinquiéme degré; on pourra en construire de même pour toutes les formules de tous les degrez à l'infini.

Premiére Table

Premiere Table de la 1re espéce.

Pour les formules.
1re $x^2 = b'$. $\left\{ \begin{array}{l} 2^{de}.\ x^2 + a'x' = b''. \ldots \\ 3^{e}.\ x^2 + a'x' = -b''. \ldots \end{array} \right.$

2^d. dégré.		a=0	a=1	a=2	a=3	a=4
x=0	x^2=0	b=0	b=0	b=0	b=0	b=0
x=1	x^2=1	b=1	b=2	b=3	b=4	b=5
x=2	x^2=4	b=4	b=6	b=8	b=10	b=12
x=3	x^2=9	b=9	b=12	b=15	b=18	b=21
x=4	x^2=16	b=16	b=20	b=24	b=28	b=32
x=5	x^2=25	b=25	b=30	b=35	b=40	b=45
x=6	x^2=36	b=36	b=42	b=48	b=54	b=60
x=7	x^2=49	b=49	b=56	b=63	b=70	b=77
x=8	x^2=64	b=64	b=72	b=80	b=88	b=96
x=9	x^2=81	b=81	b=90	b=99	b=108	b=117
x=10	x^2=100	b=100	b=110	b=120	b=130	b=140
x=11	x^2=121	b=121	b=132	b=143	b=154	b=165
x=12	x^2=144	b=144	b=156	b=168	b=180	b=192
x=13	x^2=169	b=169	b=182	b=195	b=208	b=221
x=14	x^2=196	b=196	b=210	b=224	b=238	b=252

I[re] Table de la 2[de] eſpéce.

Pour les formules $\begin{cases} x^2 + 0x = + b'' \\ x^2 + ax = b'' \\ x^2 + ax = - b'' \end{cases}$

2[d]. dégré.		$a=0$	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$
$x=0$	$x=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x-1$	$b=1$ $x-1$	$b=2$ $x-2$	$b=3$ $x-3$	$b=4$ $x-4$	$b=5$ $x-5$
$x=2$	$x-2$	$b=4$ $x-2$	$b=6$ $x-3$	$b=8$ $x-4$	$b=10$ $x-5$	$b=12$ $x-6$
3	$x-3$	$b=9$ -3	$b=12$ -4	$b=15$ -5	$b=18$ -6	$b=21$ -7
4	$x-4$	$b=16$ -4	$b=20$ -5	$b=24$ -6	$b=28$ -7	$b=32$ -8
5x	-5	$b=25$ -5	$b=30$ -6	$b=35$ -7	$b=40$ -8	$b=45$ -9
6x	-6	$b=36$ -6	$b=42$ -7	$b=48$ -8	$b=54$ -9	$b=60$ -10
7x	-7	$b=49$ -7	$b=56$ -8	$b=63$ -9	$b=70$ -10	$b=77$ -11
8x	-8	$b=64$ -8	$b=72$ -9	$b=80$ -10	$b=88$ -11	$b=96$ -12
9x	-9	$b=81$ -9	$b=90$ -10	$b=99$ -11	$b=108$ -12	$b=117$ -13
10x	-10	$b=100$ -10	$b=110$ -11	$b=120$ -12	$b=130$ -13	$b=140$ -14

. . . . . Equations pures & ſimples 1re claſſe.

. . . . . 2de claſſe Equations réelles rationelles.

a=5	a=6	a=7	a=8	a=9	a=10	a=11
b=0	b=0.	b=0	b=0	b=0	b=0	b=0
b=6 x—6	b=7 x—7	b=8 x—8	b=9 x—9	b=10 x=10	b=11 x—11	b=12 x—12
b=14 x—7	b=16 x—8	b=18 x—9	b=20 x—10	b=22 x—11	b=24 x—12	b=26 x—13
b=24 —8	b=27 —9	b=30 —10	b=33 —11	b=36 —12	b=39 —13	b=42 —14
b=36 —9	b=40 —10	b=44 —11	b=48 —12	b=52 —13	b=56 —14	b=60 —15
b=50 —10	b=55 —11	b=60 —12	b=65 —13	b=70 —14	b=75 —15	b=80 —16
b=66 —11	b=72 —12	b=78 —13	b=84 —14	b=90 —15	b=96 —16	b=102 —17
b=84 —12	b=91 —13	b=98 —14	b=105 —15	b=112 —16	b=119 —17	b=126 —18
b=104 —13	b=112 —14	b=120 —15	b=128 —16	b=136 —17	b=144 —18	b=152 —19
b=126 —14	b—135 —15	b=144 —16	b=153 —17	b=162 —18	b=171 —19	b=180 —20
b=150 —15	b=160 —16	b=170 —17	b=180 —18	b=190 —19	b=200 —20	b=210 —21

2de Table de la 1re espéce. Pour les formules 1re classe $x^2 = -b''$ 2de formule

2d. dégré.		$a=0$	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$
$x=0$	$x^2=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$	$b=-2$	$b=-3$
$x=2$	$x^2=4$	$b=4$	$b=2$	$b=0$	$b=-2$	$b=-4$
$x=3$	$x^2=9$	$b=9$	$b=6$	$b=3$	$b=0$	$b=-3$
$x=4$	$x^2=16$	$b=16$	$b=12$	$b=8$	$b=4$	$b=0$
$x=5$	$x^2=25$	$b=25$	$b=20$	$b=15$	$b=10$	$b=5$
$x=6$	$x^2=36$	$b=36$	$b=30$	$b=24$	$b=18$	$b=12$
$x=7$	$x^2=49$	$b=49$	$b=42$	$b=35$	$b=28$	$b=21$
$x=8$	$x^2=64$	$b=64$	$b=56$	$b=48$	$b=40$	$b=32$
$x=9$	$x^2=81$	$b=81$	$b=72$	$b=63$	$b=54$	$b=45$
$x=10$	$x^2=100$	$b=100$	$b=90$	$b=80$	$b=70$	$b=60$

. . 2de classe $\begin{cases} x^2 - a'x' = b'' \ldots & 4^e \text{ formule.} \\ x^2 - a'x' = -b'' \ldots & 5^e \text{ formule.} \\ x^2 + a'x' = -b'' \ldots & 6^e \text{ formule.} \end{cases}$

$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$	$a=11$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$	$b=-8$	$b=-9$	$b=-10$
$b=-6$	$b=-8$	$b=-10$	$b=-12$	$b=-14$	$b=-16$	$b=-18$
$b=-6$	$b=-9$	$b=-12$	$b=-15$	$b=-18$	$b=-21$	$b=-24$
$b=-4$	$b=-8$	$b=-12$	$b=-16$	$b=-20$	$b=-24$	$b=-28$
$b=0$	$b=-5$	$b=-10$	$b=-15$	$b=-20$	$b=-25$	$b=-30$
$b=6$	$b=0$	$b=-6$	$b=-12$	$b=-18$	$b=-24$	$b=-30$
$b=14$	$b=7$	$b=0$	$b=-7$	$b=-14$	$b=-21$	$b=-28$
$b=24$	$b=16$	$b=8$	$b=0$	$b=-8$	$b=-16$	$b=-24$
$b=36$	$b=27$	$b=18$	$b=9$	$b=0$	$b=-9$	$b=-18$
$b=50$	$b=40$	$b=30$	$b=20$	$b=10$	$b=0$	$b=-10$

2de Table de la 2de espéce.

Pour les formules 2de formules $x^2 \pm ox = \overset{+}{-} b'''$

2d. dégré.		$a=0$	$a=1$	$a=2$
$x=0$	$x^2=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$b=1$ $\pm\sqrt{-1}$	$b=0$	$b=-1$ -1×-1
$x=2$	$x^2=4$	$b=4$ $\pm\sqrt{-4}$	$b=2$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-2}$	$b=0$
$x=3$	$x^2=9$	$b=9$ $\pm\sqrt{-9}$	$b=6$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-6}$	$b=3$ $1\pm\sqrt{1-3}$
$x=4$	$x^2=16$	$b=16$ $\pm\sqrt{-16}$	$b=12$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-12}$	$b=8$ $1\pm\sqrt{1-8}$
$x=5$	$x^2=25$	$b=25$ $\pm\sqrt{-25}$	$b=20$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-20}$	$b=15$ $1\pm\sqrt{1-15}$
$x=6$	$x^2=36$	$b=36$ $\pm\sqrt{-36}$	$b=30$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{2}-30}$	$b=24$ $1\pm\sqrt{1-24}$
$x=7$	$x^2=49$	$b=49$ $\pm\sqrt{-49}$	$b=42$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-42}$	$b=35$ $1\pm\sqrt{1-35}$
$x=8$	$x^2=64$	$b=64$ $\pm\sqrt{-64}$	$b=56$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-56}$	$b=48$ $1\pm\sqrt{1-48}$
$x=9$	$x^2=81$	$b=81$ $\pm\sqrt{-81}$	$b=72$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-27}$	$b=63$ $1\pm\sqrt{1-37}$

$$2^{de}\ \text{classe}\begin{cases} x^2 - ax = b'' \ldots 4^e\ \text{formule.}\\ x \qquad\qquad\quad \ldots 5^e\ \text{formule.}\\ x^2 + \qquad\quad\ \ldots 6^e\ \text{formule.}\end{cases}$$

$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$ -1×-2	$b=-3$ -1×-3	$b=-4$ -1×-4	$b=-5$ -1×-5	$b=-6$ -1×-6
$b=-2$ -1×-2	$b=-4$ -2×-2	$b=-6$ -2×-3	$b=-8$ -2×-4	$b=-10$ -2×-5
$b=0$	$b=-3$ -1×-3	$b=-6$ -2×-3	$b=-9$ -3×-3	$b=-12$ -3×-4
$b=4$ $1\frac{1}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$	$b=0$	$b=-4$ -1×-4	$b=-8$ -2×-4	$b=-12$ -3×-4
$b=10$	$b=5$ $2\pm\sqrt{4-5}$	$b=0$	$b=-5$ -1×-5	$b=-10$ -2×-5
$b=18$	$b=12$ $2\pm\sqrt{4-12}$	$b=6$ $2\frac{1}{2}\pm\sqrt{6\frac{1}{4}-6}$	$b=0$	$b=-6$ -1×-6
$b=28$	$b=21$ $2\pm\sqrt{4-21}$	$b=24$	$b=7$ $3\pm\sqrt{9-7}$	$b=0$
$b=40$	$b=32$ $2\pm\sqrt{4-32}$	$b=24$	$b=16$ $3\pm\sqrt{9-16}$	$b=8$ $3\frac{1}{2}\pm\sqrt{12\frac{1}{4}-8}$
$b=54$	$b=45$ $2\pm\sqrt{4-45}$	$b=36$	$b=27$ $3\pm\sqrt{9-27}$	$b=18$

3e Table de la 1re eſpéce.

$$\begin{cases} x^3 + a'x^2 \pm 0''x' = b''' \quad . \ . \ . \ . \ . \\ x^3 + a'x^2 \pm 0''x' = -b''' \quad . \ . \ . \ . \end{cases}$$

3e. dégré.			$a^1=0$, $a^2=0$	$a^1=1$ conſtant	$a^1=2$	$a^1=3$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=12$	$b=16$	$b=20$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=36$	$b=45$	$b=54$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=80$	$b=96$	$b=112$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=150$	$b=175$	$b=200$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=252$	$b=288$	$b=324$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=392$	$b=441$	$b=490$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=576$	$b=640$	$b=704$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=810$	$b=891$	$b=972$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1100$	$b=1200$	$b=1300$

. . . . formule

. . . . 1re formule.
. . . . 2de formule.

$a^1=4$	$a^1=5$	$a^1=6$	$a^1=7$	$a^1=8$	$a^1=9$	$a^1=0$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$
$b=24$	$b=28$	$b=32$	$b=36$	$b=40$	$b=44$	$b=48$
$b=63$	$b=72$	$b=81$	$b=90$	$b=99$	$b=108$	$b=117$
$b=128$	$b=144$	$b=160$	$b=176$	$b=192$	$b=208$	$b=224$
$b=225$	$b=250$	$b=275$	$b=300$	$b=325$	$b=350$	$b=375$
$b=360$	$b=396$	$b=432$	$b=468$	$b=504$	$b=540$	$b=576$
$b=539$	$b=588$	$b=637$	$b=686$	$b=735$	$b=784$	$b=833$
$b=768$	$b=832$	$b=896$	$b=960$	$b=1024$	$b=6088$	$b=1152$
$b=1053$	$b=1134$	$b=6215$	$b=1296$	$b=1377$	$b=1458$	$b=1539$
$b=1400$	$b=1500$	$b=1600$	$b=1700$	$b=1800$	$b=1900$	$b=2000$

3e Table de la 2de espéce. Pour les formules $\begin{cases} x^3 + a'x^2 \pm o''x' = b.''' \\ x^3 + a'x^2 \pm o''x' = -b.''' \end{cases}$

3e. dégré.	$a' = 1$ $a = o^2$ *constant*	$a' - 2$
$x = 0$	$b = 0$	$b = 0$
$x - 1$	$b = 2$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2} \times 1$	$b = 3$ $-1 \pm \sqrt{1 - 3} \times 1$
$x = 2$	$b = 12$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 6} \times 2$	$b = 16$ $1 - \frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 8} \times 2$
$x = 3$	$b = 36$ $-2 \pm \sqrt{4 - 12} \times 3$	$b = 45$ $-2 \pm \sqrt{4 - 15} \times 3$
$x = 4$	$b = 80$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 20} \times 4$	$b = 96$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 24} \times 4$
$x = 5$	$b = 150$ $-3 \pm \sqrt{9 - 30} \times 5$	$b = 175$ $-3 \pm \sqrt{9 - 35} \times 5$
$x = 6$	$b = 252$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 42} \times 6$	$b = 288$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 48} \times 6$
$x = 7$	$b = 392$ $-4 \pm \sqrt{16 - 56} \times 7$	$b = 441$ $-4 \pm \sqrt{16 - 63} \times 7$
$x = 8$	$b = 576$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 72} \times 8$	$b = 640$ $-4\frac{1}{4} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 80} \times 8$
$x = 9$	$b = 810$ $-5 \pm \sqrt{25 - 90} \times 9$	$b = 891$ $-5 \pm \sqrt{25 - 99} \times 9$
$x = 10$	$b = 1100$ $-5\frac{1}{2} \pm \sqrt{30\frac{1}{4} - 110} \times 10$	$b = 1200$ $-5\frac{1}{2} \pm \sqrt{30\frac{1}{1} - 120} \times 10$

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 + a'x^2 \pm o''x' = b.''' \\ x^3 + a'x^2 \pm o''x' = -b.''' \end{array}\right.$$

$a'=3$	$a'=4$	&c.
$b=0$	$b=0$	&c.
$b=4$ $-1 \pm \sqrt{1-4\times1}$	$b=5$ $-1 \pm \sqrt{1-5\times1}$	&c.
$b=20$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}-10\times2}$	$b=24$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}-12\times2}$	&c.
$b=54$ $-2 \pm \sqrt{4-18\times3}$	$b=63$ $-2 \pm \sqrt{4-21\times3}$	&c.
$b=112$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}-28\times4}$	$b=128$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}-32\times4}$	&c.
$b=200$ $-3 \pm \sqrt{9-40\times5}$	$b=225$ $-3 \pm \sqrt{9-45\times5}$	&c.
$b=324$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}-54\times6}$	$b=360$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}-60\times6}$	&c.
$b=490$ $-4 \pm \sqrt{16-70\times7}$	$b=539$ $-4 \pm \sqrt{16-77\times7}$	&c.
$b=704$ $-4\frac{1}{4} \pm \sqrt{20\frac{1}{4}-88\times8}$	$b=768$ $-5\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{9}-96\times8}$	&c.
$b=972$ $-5 \pm \sqrt{25-108\times9}$	$b=1053$ $-5 \pm \sqrt{25-117\times9}$	&c.
$b=1306$ $-5\frac{1}{2} \pm \sqrt{30\frac{1}{2}-130\times10}$	$b=1400$ $-5\frac{1}{2} \pm \sqrt{30\frac{1}{4}-140\times10}$	&c.

4e Table de la 1re eſpéce. Pour les formules de la 2de claſſe $\begin{cases} x^3 - a'x^2 + o''x' = b.''' \\ x^3 - a'x^2 + o''x' = -b.''' \end{cases}$

3e dégré.			$a^1=0$ $a^2=0$	$a^1=1$ *conſtant.*	$a^1=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=4$	$b=0$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=18$	$b=9$
$=4$	$2^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=48$	$b=32$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=100$	$b=75$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=180$	$b=144$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=294$	$b=245$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=448$	$b=384$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=648$	$b=567$
$x=10$	$x^2=100$	$x =1000$	$b=1000$	$b=900$	$b=800$

1re classe $x^3 = b'''$ 2de classe $\begin{cases} x^3 - a'x^2 \pm o''x' = b''' \\ x^3 - a'x^2 \pm o''x' = -b''' \end{cases}$

$a' = 3$	$a' = 4$	$a' = 5$	$a' = 6$	$a' = 7$	$a' = 8$
$b = 0$	$b = 0$	$b = 0$	$b = 0$	$b = 0$	$b = 0$
$b = -2$	$b = -3$	$b = -4$	$b = -5$	$b = -6$	$b = -7$
$b = -4$	$b = -8$	$b = -12$	$b = -16$	$b = -20$	$b = -24$
$b = 0$	$b = -9$	$b = -18$	$b = -27$	$b = -36$	$b = -45$
$b = 16$	$b = 0$	$b = -16$	$b = -32$	$b = -48$	$b = -64$
$b = 50$	$b = 25$	$b = 0$	$b = -25$	$b = -50$	$b = -75$
$b = 108$	$b = 72$	$b = 36$	$b = 0$	$b = -36$	$b = -72$
$b = 196$	$b = 147$	$b = 98$	$b = 49$	$b = 0$	$b = -49$
$b = 320$	$= 256$	$b = 192$	$b = 128$	$b = 64$	$b = 0$
$b = 486$	$b = 405$	$b = 324$	$b = 243$	$b = 162$	$b = 81$
$b = 700$	$b = 600$	$b = 500$	$b = 400$	$b = 300$	$b = 200$

4e Table de la 2de espéce. Pour les formules $\left\{ \begin{array}{l} x^3 - a'x^2 \pm o''x' = b.''' \\ x^3 - a'x^2 \mp o''x' = -b.''' \end{array} \right.$

3e dégré.	$a^1 = 0$ *constant* $a^2 = 0$	$a^2 = 1$
$x = 1$	$b = 1$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1 \times 1}$	$b = 0$
$x = 2$	$b = 8$ $-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2}$	$b = 4$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2 \times 2}$
$x = 3$	$b = 27$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 9 \times 3}$	$b = 18$ $-1 \pm \sqrt{1 - 6 \times 3}$
$x = 4$	$b = 64$ $-2 \pm \sqrt{4 - 16 \times 4}$	$b = 48$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 12 \times 4}$
$x = 5$	$b = 125$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 25 \times 5}$	$b = 100$ $-2 \pm \sqrt{4 - 20 \times 5}$
$x = 6$	$b = 216$ $-3 \pm \sqrt{9 - 36 \times 6}$	$b = 180$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 30 \times 6}$
$x = 7$	$b = 343$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 49 \times 7}$	$b = 294$ $-3 \pm \sqrt{9 - 42 \times 7}$
$x = 8$	$b = 512$ $-4 \pm \sqrt{16 - 64 \times 8}$	$b = 448$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 56 \times 8}$
$x = 9$	$b = 729$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 81 \times 9}$	$b - 648$ $-4 \pm \sqrt{16 - 72 \times 9}$
$x = 10$	$b = 10.\ 00.$ $-5 \pm \sqrt{25 - 100 \times 10.}$	$b = 900$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 90 \times 10}$
$x = 11$	$b = 1331$ $-5\frac{1}{2} \pm \sqrt{30\frac{1}{4} - 121 \times 11}$	$b = 1210$ $-5 \pm \sqrt{25 - 110 \times 11}$

; . . . & pour l'Equation pure & simple $x^3 = b$.'''

$a^2 = 2$	$a^2 = 3$	&c.
$b = -1$ $+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \times 1$	$b = -2$ $1 \pm \sqrt{1 - 2} \times 1$	&c.
$b = 0$ $-1 \pm \sqrt{1 - 2} \times 0$	$b = -4$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \times 2$	&c.
$b = 9$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3} \times 3$	$b = 0$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}} \times 0$	&c.
$b = 32$ $-1 \pm \sqrt{1 - 8} \times 4$	$b = 16$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4} \times 4$	&c.
$b = 75$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 15} \times 5$	$b = 50$ $-1 \pm \sqrt{1 - 10} \times 5$	&c.
$b = 144$ $-2 \pm \sqrt{4 - 24} \times 6$	$b = 108$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 18} \times 6$	&c.
$b = 245$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 35} \times 7$	$b = 196$ $-2 \pm \sqrt{4 - 28} \times 7$	&c.
$b = 384$ $-3 \pm \sqrt{9 - 48} \times 8$	$b = 320$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 40} \times 8$	&c.
$b = 567$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 63} \times 9$	$b = 486$ $-3 \pm \sqrt{9 - 54} \times 9$	&c.
$b = 800$ $-4 \pm \sqrt{16 - 80} \times 10$	$b = 700$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 70} \times 10$	&c.
$b = 1089$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 99} \times 11$	$b = 68$ $-4 \pm \sqrt{16 - 88} \times 11$	&c.

5e Table de la 1re espéce. — Pour les formules 1re classe: $x^3 = b'''$ …; $x^3 = -b''$ …

3e. dégré.			$a=0$, $a^2=0$	constant $a^2=1$	$a^3=2$	$a^2=3$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=10$	$b=12$	$b=14$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=30$	$b=33$	$b=36$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=68$	$b=72$	$b=76$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=130$	$b=135$	$b=140$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=222$	$b=228$	$b=234$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=350$	$b=357$	$b=364$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=520$	$b=528$	$b=536$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=738$	$b=747$	$b=756$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1010$	$b=1020$	$b=1030$

2de classe

. . . . 2de classe $\begin{cases} x^3 \pm 0x^2 + a''x = b.''' \\ x^3 \pm 0x^2 + a''x = -b.''' \end{cases}$

$a^2=4$	$a^2=5$	$a^3=6$	$a^2=7$	$a^2=8$	$a^2=9$	$a^2=10$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$
$b=16$	$b=18$	$b=20$	$b=22$	$b=24$	$b=26$	$b=28$
$b=39$	$b=42$	$b=45$	$b=48$	$b=51$	$b=54$	$b=57$
$b=80$	$b=84$	$b=88$	$b=92$	$b=96$	$b=100$	$b=104$
$b=145$	$b=150$	$b=155$	$b=160$	$b=165$	$b=170$	$b=175$
$b=240$	$b=246$	$b=252$	$b=258$	$b=264$	$b=270$	$b=276$
$b=371$	$b=378$	$b=385$	$b=392$	$b=399$	$b=406$	$b=413$
$b=544$	$b=552$	$b=560$	$b=568$	$b=576$	$b=584$	$b=592$
$b=765$	$b=774$	$b=783$	$b=792$	$b=800$	$b=809$	$b=818$
$b=1040$	$b=1050$	$b=1060$	$b=1070$	$b=1080$	$b=1090$	$b=1100$

5e Table de la 2de espéce. Pour les formules 2de classe. $\begin{cases} x^3 \pm 0x^2 + a''x' = b.''' \\ x^3 \pm 0x^2 + a''x' = -b.''' \end{cases}$

3e. dégré.	$a=1$	$a=2$
$x=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$b=2$ $-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-1\frac{3}{4}}\times 1$	$b=3$ $-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-2\frac{3}{4}}\times 1$
$x=2$	$b=10$ $-1\pm\sqrt{-4}\times 2$	$b=12$ $-1\pm\sqrt{-5}\times 2$
$x=3$	$b=30$ $-1\frac{1}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-10}\times 3$	$b=33$ $-1\frac{1}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-11}\times 3$
$x=4$	$b=68$ $-2\pm\sqrt{4-17}\times 4$	$b=72$ $-2\pm\sqrt{4-18}\times 4$
$x=5$	$b=130$ $-2\frac{1}{2}\pm\sqrt{6\frac{1}{4}-26}\times 5$	$b=135$ $-2\frac{1}{2}\pm\sqrt{6\frac{1}{4}-27}\times 5$
$x=6$	$b=222$ $-3\pm\sqrt{9-37}\times 6$	$b=228$ $-3\pm\sqrt{9-38}\times 6$
$x=7$	$b=350$ $-3\frac{1}{2}\pm\sqrt{12\frac{1}{4}-50}\times 7$	$b=357$ $-3\frac{1}{2}\pm\sqrt{12\frac{1}{4}-51}\times 7$
$x=8$	$b=520$ $-4\pm\sqrt{16-65}\times 8$	$b=528$ $-4\pm\sqrt{16-66}\times 8$
$x=9$	$b=738$ $-4\frac{1}{2}\pm\sqrt{20\frac{1}{4}-82}\times 9$	$b=747$ $-4\frac{1}{2}\pm\sqrt{20\frac{1}{4}-83}\times 9$
$x=10$	$b=1010$ $-5\pm\sqrt{25-101}\times 10$	$b=1020$ $-5\pm\sqrt{25-102}\times 10$

1re formule.
2de formule. { Equations rationelles imaginaires du 3e dégré.

$a = 3$	$a = 4$	&c.
$b = 0$	$b = 0$	&c.
$b = 4$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-3\frac{3}{4}} \times 1$	$b = 5$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-4\frac{3}{4}} \times 1$	&c.
$b = 14$ $-1 \pm \sqrt{-6} \times 2$	$b = 16$ $-1 \pm \sqrt{-7} \times 2$	&c.
$b = 36$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 12} \times 3$	$b = 39$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 13} \times 3$	&c.
$b = 76$ $-2 \pm \sqrt{4 - 19} \times 4$	$b = 80$ $-2 \pm \sqrt{4 - 20} \times 4$	&c.
$b = 110$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 28} \times 5$	$b = 145$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 29} \times 5$	&c.
$b = 234$ $-3 \pm \sqrt{9 - 39} \times 6$	$b = 240$ $-3 \pm \sqrt{9 - 40} \times 6$	&c.
$b = 364$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 52} \times 7$	$b = 371$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 53} \times 7$	&c.
$b = 536$ $-4 \pm \sqrt{16 - 67} \times 8$	$b = 544$ $-4 \pm \sqrt{16 - 68} \times 8$	&c.
$b = 756$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 84} \times 9$	$b = 765$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 85} \times 9$	&c.
$b = 1030$ $-5 \pm \sqrt{25 - 103} \times 10$	$b = 1040$ $-5 \pm \sqrt{25 - 104} \times 10$	&c.

6e Table de la 1re espéce. 1re & 2de classe. { Pour les formules. 1ere classe. { $x^3 = b'''$ . . . . $x^3 = -b'''$ . . .

3e dégré.			$a=0$ $a^2=0$	$a=0$ $a^2=1$	*constant.* $a^2=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=6$	$b=4$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=24$	$b=21$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=60$	$b=56$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=120$	$b=115$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=210$	$b=204$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=336$	$b=329$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=504$	$b=496$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=720$	$b=711$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=990$	$b=980$

. . . . 2de classe $\begin{cases} x^3 \pm 0x^2 - a''x = b.''' \\ x^3 \pm 0x^2 - a''x = -b.''' \end{cases}$

$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$	$a^2=8$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=2$	$b=-0$	$b=-2$	$b=-4$	$b=-6$	$b=-8$
$b=18$	$b=15$	$b=12$	$b=9$	$b=6$	$b=3$
$b=52$	$b=48$	$b=44$	$b=40$	$b=36$	$b=32$
$b=110$	$b=105$	$b=100$	$b=95$	$b=90$	$b=85$
$b=198$	$b=192$	$b=186$	$b=180$	$b=174$	$b=168$
$b=322$	$b=315$	$b=308$	$b=301$	$b=294$	$b=287$
$b=488$	$=480$	$b=472$	$b=464$	$b=456$	$b=448$
$b=702$	$b=693$	$b=684$	$b=675$	$b=666$	$b=657$
$b=970$	$b=960$	$b=950$	$b=940$	$b=930$	$b=920$

6e Table de la 1re espéce. 1re & 2de classe. { Pour les formules. 1ere classe. { $x^3 = b'''$ . . . . $x^3 = -b'''$ . . .

3e dégré.			$a=0$ $a^2=0$	$a=0$ $a^2=1$	constant. $a^2=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=6$	$b=4$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=24$	$b=21$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=60$	$b=56$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=120$	$b=115$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=210$	$b=204$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=336$	$b=329$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=504$	$b=496$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=720$	$b=711$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=990$	$b=980$

. . . . 2de classe $\begin{cases} x^3 \pm 0x^2 - a''x = b.''' \\ x^3 \mp 0x^2 - a''x = -b.''' \end{cases}$

$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$	$a^2=8$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=2$	$b=-0$	$b=-2$	$b=-4$	$b=-6$	$b=-8$
$b=18$	$b=15$	$b=12$	$b=9$	$b=6$	$b=3$
$b=52$	$b=48$	$b=44$	$b=40$	$b=36$	$b=32$
$b=110$	$b=105$	$b=100$	$b=95$	$b=90$	$b=85$
$b=198$	$b=192$	$b=186$	$b=180$	$b=174$	$b=168$
$b=322$	$b=315$	$b=308$	$b=301$	$b=294$	$b=287$
$b=488$	$=480$	$b=472$	$b=464$	$b=456$	$b=448$
$b=702$	$b=693$	$b=684$	$b=675$	$b=666$	$b=657$
$b=970$	$b=960$	$b=950$	$b=940$	$b=930$	$b=920$

6e Table de la 2e espéce. Pour les formules $x^3 \pm 0x^2 - a''x' = b'''$ . . .
3e. dégré. $a = 0$. *constant*. . . . .

$x=-1$	$x-1$	$x+1$	*impossible*	$x=-2$	$x-2$	$x+4$	$a^2=12$ $b=16$
$x=-1$	$x-1$	$x+2$	$a^2=3$ $b=2$	$x=-2$	$x-3$	$x+5$	$a^2=19$ $b=30$
$x=-1$	$x-2$	$x+3$	$a^2=7$ $b=6$	$x=-2$	$x-4$	$x+6$	$a^2=28$ $b=48$
$x=-1$	$x-3$	$x+4$	$a^2=13$ $b=12$	$x=-2$	$x-5$	$x+7$	$a^2=39$ $b=70$
$x=-1$	$x-4$	$x+5$	$a^2=21$ $b=20$	$x=-2$	$x-6$	$x+8$	$a^2=52$ $b=96$
$x=-1$	$x-5$	$x+6$	$a^2=31$ $b=30$	$x=-2$	$x-7$	$x+9$	$a^2=67$ $b=126$
$x=-1$	$x-6$	$x+7$	$a^2=43$ $b=42$	$x=-2$	$x-8$	$x+10$	$a^2=84$ $b=160$
$x=-1$	$x-7$	$x+8$	$a^2=57$ $b=56$	$x=-2$	$x-9$	$x+11$	$a^2=103$ $b=198$
$x=-1$	$x-8$	$x+9$	$a^2=73$ $b=72$	$x=-2$	$x-10$	$x+12$	$a^2=124$ $b=240$
$x=-1$	$x-9$	$x+10$	$a^2=91$ $b=90$	$x=-2$	$x-11$	$x+13$	$a^2=147$ $b=286$
$x=-1$	$x-10$	$x+11$	$a^2=111$ $b=110$	$x=-2$	$x-12$	$x+14$	$a^2=172$ $b=336$
$x=-1$	$x-11$	$x+12$	$a^2=133$ $b=132$	$x=-2$	$x-13$	$x+15$	$a^2=199$ $b=390$

. . . . & la formule $x^3 \pm 0x^2 - a''x' = -b'''$

3e dégré. *a=0 constant.*

$x=-3$	$x-3$	$x+6$	$a^3=27$ $b=54$	$x=-4$	$x-4$	$x+8$	$a^2=48$ $b=128$
$x=-3$	$x-4$	$x+7$	$a^2=37$ $b=84$	$x=-4$	$x-5$	$x+9$	$a^2=65$ $b=180$
$x=-3$	$x-5$	$x+8$	$a^2=49$ $b=120$	$x=-4$	$x-6$	$x+10$	$a^2=84$ $b=240$
$x=-3$	$x-6$	$x+9$	$a^2=63$ $b=162$	$x=-4$	$x-7$	$x+11$	$a^2=105$ $b=308$
$x=-3$	$x-7$	$x+10$	$a^2=79$ $b=210$	$x=-4$	$x-8$	$x+12$	$a^2=128$ $b=384$
$x=-3$	$x-8$	$x+11$	$a^2=97$ $b=264$	$x=-4$	$x-9$	$x+13$	$a^2=153$ $b=468$
$x=-3$	$x-9$	$x+12$	$a^2=117$ $b=324$	$x=-4$	$x-10$	$x+14$	$a^2=180$ $b=560$
$x=-3$	$x-10$	$x+13$	$a^2=139$ $b=390$	$x=-4$	$x-11$	$x+15$	$a^2=209$ $b=660$
$x=-3$	$x-11$	$x+14$	$a^2=163$ $b=462$	$x=-4$	$x-12$	$x+16$	$a^2=240$ $b=768$
$x=-3$	$x-12$	$x+15$	$a^2=189$ $b=540$	$x=-4$	$x-13$	$x+17$	$a^2=273$ $b=884$
$x=-3$	$x-13$	$x+16$	$a^2=217$ $b=324$	$x=-4$	$x-14$	$x+18$	$a^2=308$ $b=1008$
$x=-3$	$x-14$	$x+17$	$a^2=247$ $b=714$	$x=-4$	$x-15$	$x+19$	$a^2=301$ $b=1140$

6e Table de la 2de espéce. Pour les formules 1re classe $\left\{\begin{array}{l} x^3 = b''' \\ x^3 = -b''' \end{array}\right.$ . . . .

3e dégré.	$a=0$ $a^2=0$	$b=0$ *constant* $a^2=1$
$x=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$b=1$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1} \times 1$	$b=0$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-0} \times 1$
$x=2$	$b=8$ $-1 \pm \sqrt{1-4} \times 2$	$b=6$ $-1 \pm \sqrt{1-3} \times 2$
$x=3$	$b=27$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}-9} \times 3$	$b=24$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}-8} \times 3$
$x=4$	$b=64$ $-2 \pm \sqrt{4-16} \times 4$	$b=60$ $-2 \pm \sqrt{4-15} \times 4$
$x=5$	$b=125$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}-25} \times 5$	$b=120$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}-24} \times 5$
$x=6$	$b=216$ $-3 \pm \sqrt{9-36} \times 6$	$b=210$ $-3 \pm \sqrt{9-35} \times 6$
$x=7$	$b=343$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}-49} \times 7$	$b=336$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}-48} \times 7$
$x=8$	$b=512$ $-4 \pm \sqrt{16-64} \times 8$	$b=504$ $-4 \pm \sqrt{16-63} \times 8$
$x=9$	$b=729$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4}-81} \times 9$	$b=720$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4}-80} \times 9$
$x=10$	$b=10.00.$ $-5 \pm \sqrt{25-100} \times 10.$	$b=990$ $-5 \pm \sqrt{25-99} \times 10$

2de classe

2de classe $\left\{ \begin{array}{l} x^3 \pm 0x^2 - a''x' = b.''' \\ x^3 \pm 0x^2 - a''x' = -b.''' \end{array} \right\}$ Pour les Equations imaginaires.

$a^2 = 2$	$a^2 = 3$	&c.
$b = 0$	$b = 0$	&c.
$b = -1$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \times 1$	$b = -2$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \times 1$	&c.
$b = 4$ $-1 \pm \sqrt{1 - 2} \times 2$	$b = 2$ $-1 \pm \sqrt{1 - 1} \times 2$	&c.
$b = 21$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 7} \times 3$	$b = 18$ $-1 \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 6} \times 3$	&c.
$b = 56$ $-2 \pm \sqrt{4 - 14} \times 4$	$b = 52$ $-2 \pm \sqrt{4 - 13} \times 4$	&c.
$b = 115$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 23} \times 5$	$b = 110$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4} - 22} \times 5$	&c.
$b = 204$ $-3 \pm \sqrt{9 - 34} \times 6$	$b = 198$ $-3 \pm \sqrt{9 - 33} \times 6$	&c.
$b = 329$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 47} \times 7$	$b = 322$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4} - 46} \times 7$	&c.
$b = 496$ $-4 \pm \sqrt{16 - 62} \times 8$	$b = 488$ $-4 \pm \sqrt{16 - 61} \times 8$	&c.
$b = 711$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 79} \times 9$	$b = 702$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4} - 78} \times 9$	&c.
$b = 980$ $-5 \pm \sqrt{25 - 98} \times 10$	$b = 970$ $-5 \pm \sqrt{25 - 97} \times 9$	&c.

7e Table de la 1re eſpéce. Pour les formules $\begin{cases} x^3 + a'x^2 + a''x' = b.''' \\ x^3 + a'x^2 + a''x' = -b''' \end{cases}$

3e claſſe.

3e. dégré.

			$a^1=0$ $a^2=0$	$a^1=1$ $a^2=0$	conſtant $a^2=1$	$a^2=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=12$	$b=14$	$b=16$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=36$	$b=39$	$b=42$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=80$	$b=84$	$b=88$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=150$	$b=155$	$b=160$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=252$	$b=258$	$b=264$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=392$	$q=399$	$b=406$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=576$	$b=584$	$b=592$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=810$	$b=819$	$b=828$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=$ 1000	$b=1000$	$b=1100$	$b=1110$	$b=1120$

1ere formule, deux Racines négatives, la 3e positive.
2de formule, ou en changeant tous les signes $x^3 - a'x^2 - a''x' = +b.'''$

$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$	$a^2=8$	$a^2=9$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$
$b=18$	$b=20$	$b=22$	$b=24$	$b=26$	$b=28$	$b=30$
$b=45$	$b=48$	$b=51$	$b=54$	$b=57$	$b=60$	$b=63$
$b=92$	$b=96$	$b=100$	$b=104$	$b=108$	$b=112$	$b=116$
$b=165$	$b=170$	$b=175$	$b=180$	$b=185$	$b=190$	$b=195$
$b=270$	$b=276$	$b=282$	$b=288$	$b=294$	$b=300$	$b=306$
$b=413$	$b=420$	$b=427$	$b=434$	$b=441$	$b=448$	$b=455$
$b=600$	$b=608$	$b=616$	$b=624$	$b=632$	$b=640$	$b=648$
$b=837$	$b=846$	$b=855$	$b=864$	$b=873$	$b=882$	$b=891$
$b=1130$	$b=1140$	$b=1150$	$b=1160$	$b=1170$	$b=1180$	$b=1190$

7e Table de la 2de espéce. 3e classe. 3e dégré

Equations rationelles pour la 1re formule $x^3 + a'x^2 + a''x' = b.'''$ les 2. racines négatives, la 3e positive.

$x = -2$	$x - 2$	$x1$	*diff. 1.* *impossible dans*	*diff. 2.* *cette formule.*	*diff. 3.*
$x = -2$	$x - 3$	$x1$	$a = 4.$ $a^2 = 1$ 2×3 $b = 6$	$a = 7.$ $a^2 = 4$ 2×6 $b = 12$	$a = 10.$ $a^2 = 7$ 2×9 $b = 18$
$x = -2$	$x - 4$	$x1$	$a = 5.$ $a^2 = 2$ 2×4 $b = 8$	$a = 9.$ $a^2 = 6$ 2×8 $b = 16$	$a = 13$ $a^2 = 10$ 2×12 $b = 24$
$x = -2$	$x - 5$	$x1$	$a = 6.$ $a^2 = 3$ 2×5 $b = 10$	$a = 11.$ $a^2 = 8$ 2×10 $b = 20$	$a = 16.$ $a^2 = 13$ 2×15 $b = 30$
$x = -2$	$x - 6$	$x1$	$a = 7.$ $a^2 = 4$ 2×6 $b = 12$	$a = 13.$ $a^2 = 10$ 2×12 $b = 24$	$a = 19.$ $a^2 = 16$ 2×18 $b = 36$
$x = -2$	$x - 7$	$x1$	$a = 8.$ $a^2 = 5$ 2×7 $b = 14$	$a = 15.$ $a^2 = 12$ 2×14 $b = 28$	$a = 22.$ $a^2 = 19$ 2×21 $b = 42$
$x = -2$	$x - 8$	$x1$	$a = 9.$ $a^2 = 6$ 2×8 $b = 16$	$a = 17.$ $a^2 = 14$ 2×16 $b = 32$	$a = 25.$ $a^2 = 22$ 2×24 $b = 48$
$x = -2$	$x - 9$	$x1$	$a = 10.$ $a^2 = 7$ 2×9 $b = 18$	$a = 19.$ $a^2 = 16$ 2×18 $b = 36$	$a = 28.$ $a^2 = 25$ 2×27 $b = 54$
$x = -2$	$x - 10$	$x1$	$a = 11.$ $a^2 = 8$ 2×10 $b = 20$	$a = 21.$ $a^2 = 18$ 2×20 $b = 40$	$a = 31.$ $a^2 = 28$ 2×30 $b = 60$
$x = -2$	$x - 11$	$x1$	$a = 12.$ $a^2 = 9$ 2×11 $b = 22$	$a = 23.$ $a^2 = 20$ 2×22 $b = 44$	$a = 34.$ $a^2 = 31$ 2×33 $b = 66$
$x = -2$	$x - 12$	$x1$	$a = 13.$ $a^2 = 10$ 2×12 $b = 24$	$a = 25.$ $a^2 = 22$ 2×24 $b = 48$	$a = 37.$ $a^2 = 34$ 2×36 $b = 72$
$x = -2$	$x - 13$	$x1$	$a = 14.$ $a^2 = 11$ 2×13 $b = 26$	$a = 27.$ $a^2 = 24$ 2×26 $b = 52$	$a = 40.$ $a^2 = 37$ 2×39 $b = 78$

. . . . Et pour la 8e formule soû-contraire $x^3 - a'x^2 + a''x' = b'''$
. . . . qui a les mêmes Racines ; mais ses deux Racines sont positives, & la 3e négative.

diff. 4.	*diff.* 5.	*diff.* 6.	*diff.* 7.	*diff.* 8.
$a=13$. $a'=10$ 2×12 $b=24$	$a=16$. $a'=13$ 2×15 $b=30$	$a=19$. $a'=16$ 2×18 $b=36$	$a=22$. $a'=19$ 2×21 $b=42$	$a=25$. $a'=22$ 2×24 $b=48$
$a=17$. $a'=14$ 2×16 $b=32$	$a=21$. $a'=18$ 2×20 $b=40$	$a=25$. $a'=22$ 2×24 $b=48$	$a=29$. $a'=26$ 2×28 $b=56$	$a=33$. $a'=30$ 2×32 $b=64$
$a=21$. $a'=18$ 2×20 $b=40$	$a=26$. $a'=23$ 2×25 $b=50$	$a=31$. $a'=28$ 2×30 $b=60$	$a=36$. $a'=33$ 2×35 $b=70$	$a=41$. $a'=38$ 2×40 $b=80$
$a=25$. $a'=22$ 2×24 $b=48$	$a=31$. $a'=28$ 2×30 $b=60$	$a=37$. $a'=34$ 2×36 $b=72$	$a=43$. $a'=40$ 2×42 $b=84$	$a=49$. $a'=46$ 2×48 $b=96$
$a=29$. $a'=26$ 2×28 $b=56$	$a=36$. $a'=33$ 2×35 $b=70$	$a=43$. $a'=40$ 2×42 $b=84$	$a=50$. $a'=47$ 2×49 $b=98$	$a=57$. $a'=54$ 2×56 $b=112$
$a=33$. $a'=30$ 2×32 $b=64$	$a=41$. $a'=38$ 2×40 $b=80$	$a=49$. $a'=46$ 2×48 $b=96$	$a=57$. $a'=54$ 2×56 $b=112$	$a=65$. $a'=62$ 2×64 $b=128$
$a=37$. $a'=34$ 2×36 $b=72$	$a=46$. $a'=43$ 2×45 $b=90$	$a=55$. $a'=52$ 2×54 $b=108$	$a=64$. $a'=61$ 2×63 $b=126$	$a=73$. $a'=70$ 2×72 $b=144$
$a=41$, $a'=38$ 2×40 $b=80$	$a=51$. $a'=48$ 2×50 $b=100$	$a=61$. $a'=58$ 2×60 $b=120$	$a=71$. $a'=68$ 2×70 $b=140$	$a=81$. $a'=78$ 2×80 $b=160$
$a=45$. $a'=42$ 2×44 $b=88$	$a=56$. $a'=53$ 2×55 $b=110$	$a=67$. $a'=64$ 2×66 $b=132$	$a=78$. $a'=75$ 2×77 $b=154$	$a=89$. $a'=86$ 2×88 $b=176$
$a=49$. $a'=46$ 2×48 $b=96$	$a=61$. $a'=58$ 2×60 $b=120$	$a=73$. $a'=70$ 2×72 $b=144$	$a=85$. $a'=82$ 2×84 $b=168$	$a=97$. $a'=94$ 2×96 $b=192$
$a=53$. $a'=50$ 2×52 $b=104$	$a=66$. $a'=63$ 2×65 $b=130$	$a=79$. $a'=76$ 2×78 $b=156$	$a=92$. $a'=89$ 2×91 $b=182$	$a=105$. $a'=102$ 2×104 $b=208$

8e Table. Pour la 2de formule $\left\{ \begin{array}{l} x^3 + a'x^2 + a''x' = -b.''' \\ \text{qui a trois racines négatives.} \end{array} \right.$

3e classe. 3e. dégré.			*Troisiéme Racine* $\times-1$	*variable.* $\times-2$
$x=-1$	$\times-1$	$\times-1$	$a=3.\ a'=3$ $\times-1$ $b=-1$	$a=4.\ a'=5$ $\times-2$ $b=-2$
$x=-2$	$\times-2$	$\times-1$	$a=5.\ a'=8$ $\times-1$ $b=-4$	$a=6.\ a'=12$ $\times-2$ $b=-8$
$x=-3$	$\times-3$	$\times-1$	$a=7.\ a'=15$ $\times-1$ $b=-9$	$a=8.\ a'=21$ $\times-2$ $b=-18$
$x=-4$	$\times-4$	$\times-1$	$a=9.\ a'=24$ $\times-1$ $b=-16$	$a=10.\ a'=32$ $\times-2$ $b=-32$
$x=-5$	$\times-5$	$\times-1$	$a=11.\ a'=35$ $\times-1$ $b=-25$	$a=12.\ a'=45$ $\times-2$ $b=-50$
$x=-6$	$\times-6$	$\times-1$	$a=13.\ a'=48$ $\times-1$ $b=-36$	$a=14.\ a'=60$ $b=-72$
$x=-7$	$\times-7$	$\times-1$	$a=15.\ a'=63$ $\times-1$ $b=-49$	$a=16.\ a'=77$ $b=-98$
$x=-8$	$\times-8$	$\times-1$	$a=17.\ a'=63$ $\times-1$ $b=-64$	$a=18.\ a'=96$ $b=-128$
$x=-9$	$\times-9$	$\times-1$	$a=19.\ a'-99$ $\times-1$ $b=-81$	$a=20.\ a'=117$ $b=-162$
$x=-10$	$\times-10$	$\times-1$	$a=21.\ a'=120$ $\times-1$ $b=-100$	$a=22.\ a'=140$ $b=-200$

. . . . . ou bien $-x^3 - a'x^2 - a''x' = + b.'''$

. . . . changeant tous les ſignes.

$x-3$	$x-4$	$x-5$	$x-6$
$a=5$. $a^2=7$ $x-3$ $b=-3$	$a=6$. $a^2=9$ $x-4$ $b=-4$	$a=7$. $a^2=11$ $b=-5$	$a=8$. $a^2=13$ $b=-6$
$a=7$. $a^2=16$ $b=-12$	$a=8$. $a^2=20$ $b=-16$	$a=9$. $a^2=24$ $b=-20$	$a=10$. $a^2=28$ $b=-24$
$a=9$. $a^2=27$ $b=-27$	$a=10$. $a^2=33$ $b=-36$	$a=11$. $a^2=39$ $b=-45$	$a=12$. $a^2=45$ $b=-54$
$a=11$. $a^2=40$ $b=-48$	$a=12$. $a^2=48$ $b=-64$	$a=13$. $a^2=56$ $b=-80$	$a=14$. $a^2=64$ $b=-96$
$a=13$. $a^2=55$ $b=-75$	$a=14$. $a^2=65$ $b=-100$	$a=15$. $a^2=75$ $b=-125$	$a=16$. $a^2=85$ $b=-150$
$a=15$. $a^2=72$ $b=-108$	$a=16$. $a^2=84$ $b=-144$	$a=17$. $a^2=96$ $b=-180$	$a=18$. $a^2=108$ $b=-216$
$a=17$. $a^2=91$ $b=-147$	$a=18$. $a^2=105$ $b=-196$	$a=19$. $a^2=119$ $b=-245$	$a=20$. $a^2=133$ $b=-294$
$a=19$. $a^2=112$ $b=-192$	$a=20$. $a^2=128$ $b=-256$	$a=21$. $a^2=144$ $b=-320$	$a=22$. $a^2=160$ $b=-384$
$a=21$. $a^2=135$ $b=-243$	$a=22$. $a^2=153$ $b=-324$	$a=23$. $a^2=171$ $b=-405$	$a=24$. $a^2=189$ $b=-486$
$a=23$. $a^2=160$ $b=-300$	$a=24$. $a^2=180$ $b=-400$	$a=25$. $a^2=200$ $b=-500$	$a=26$. $a^2=220$ $b=-600$

9e Table. Pour la 4e form. $x^3 + a'x^2 - a''x' = b.'''$ . . . . . .
& la 3e formule $x^3 + a'x^2 - a''x' = - b.'''$ . . . .

3e classe. 3e dégré.			$a=0$ $a^2=0$	$a=1$ $a^2=0$	*constant.* $a^2=1$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=12$	$b=10$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=36$	$b=33$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=80$	$b=76$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=150$	$b=145$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=252$	$b=246$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=392$	$b=385$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=576$	$b=588$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=810$	$b=801$
$x=10$	$x^2=100$	$x=1000$	$b=1000$	$b=1100$	$b=1090$

. . . . qui commence après les zeros à droite
. . . . qui est à gauche avant les zeros où elle finit.

$a^2=2$	$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=0$	$b=-1$	$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$
$b=8$	$b=6$	$b=4$	$b=2$	$b=0$	$b=-2$
$b=30$	$b=27$	$b=24$	$b=21$	$b=18$	$b=15$
$b=72$	$b=68$	$b=64$	$b=60$	$b=56$	$b=52$
$b=140$	$b=135$	$b=130$	$b=125$	$b=120$	$b=115$
$b=240$	$b=234$	$b=228$	$b=222$	$b=216$	$b=210$
$b=378$	$b=371$	$b=364$	$b=357$	$b=350$	$b=343$
$b=580$	$=572$	$b=564$	$b=556$	$b=548$	$b=540$
$b=792$	$b=783$	$b=774$	$b=765$	$b=756$	$b=747$
$b=1080$	$b=1070$	$b=1060$	$b=1050$	$b=1040$	$b=1030$

11e Table de la 1re espéce. Pour les formules $\begin{cases} x^3 - a'x^2 + a''x' = b.''' \\ x^3 - a'x^2 + a''x' = -b''' \end{cases}$

3e classe.

3e. dégré.

			$a=0$ $a^2=0$	$a=0$ $a^2=1$	$a=1$	$a=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=1$	$b=0$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=10$	$b=6$	$b=2$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=30$	$b=21$	$b=12$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=68$	$b=52$	$b=36$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=130$	$b=105$	$b=80$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=222$	$b=186$	$b=150$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=350$	$b=301$	$b=252$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=520$	$b=456$	$b=392$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=738$	$b=657$	$b=576$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1010$	$b=910$	$b=810$

. . . . 7^e formule.
. . . . 8^e formule.

$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-1$	$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=-2$	$b=-6$	$b=-10$	$b=-14$	$b=-18$	$b=-22$	$b=-26$
$b=3$	$b=-6$	$b=-15$	$b=-24$	$b=-33$	$b=-42$	$b=-51$
$b=20$	$b=4$	$b=-12$	$b=-28$	$b=-44$	$b=-60$	$b=-76$
$b=55$	$b=30$	$b=5$	$b=-20$	$b=-45$	$b=-70$	$b=-85$
$b=114$	$b=78$	$b=42$	$b=6$	$b=-30$	$b=-66$	$b=-102$
$b=203$	$b=154$	$b=105$	$b=56$	$b=7$	$b=-42$	$b=-91$
$b=328$	$b=264$	$b=200$	$b=136$	$b=72$	$b=8$	$b=-56$
$b=495$	$b=414$	$b=333$	$b=152$	$b=171$	$b=90$	$b=9$
$b=710$	$b=610$	$b=510$	$b=410$	$b=310$	$b=210$	$b=110$

12e Table Pour les formules $\begin{cases} 3^e \ldots x^3 + a'x^2 - a''x' = b.''' \ldots \\ \text{contenuë dans la } 1^{re} \text{ colonne seule.} \end{cases}$

2de espéce.
3e classe. 3e dégré.

			$a=1$	$a=2$	$a=3$
$x=-1$	$\times-1$	$\times 1$	$a^2=1$ ×1 $b=1$	$a^2=1$ ×2 $b=0$	$a^2=3$ ×1 $b=-1$
$x=-1$	$\times-2$	$\times 2$	$a^2=4$ 2 $b=4$	$a^2=1$ 3 $b=2$	$a^2=-2$ 4 $b=0$
$x=-1$	$\times-3$	$\times 3$	$a^2=9$ 3 $b=9$	$a^2=5$ 4 $b=6$	$a^2=1$ 5 $b=3$
$x=-1$	$\times-4$	$\times 4$	$a^2=16$ 4 $b=16$	$a^2=11$ 5 $b=12$	$a^2=6$ 6 $b=10$
$x=-1$	$\times-5$	$\times 5$	$a^2=25$ 5 $b=25$	$a^2=19$ 6 $b=20$	$a^2=13$ 7 $b=15$
$x=-1$	$\times-6$	$\times 6$	$a^2=36$ 6 $b=36$	$a^2=29$ 7 $b=30$	$a^2=22$ 8 $b=24$
$x=-1$	$\times-7$	$\times 7$	$a^2=49$ 7 $b=49$	$a^2=41$ 8 $b=42$	$a^2=33$ 9 $b=35$
$x=-1$	$\times-8$	$\times 8$	$a^2=64$ 8 $b=64$	$a^2=55$ 9 $b=56$	$a^2=46$ 10 $b=48$
$x=-1$	$\times-9$	$\times 9$	$a^2=81$ 9 $b=81$	$a^2=71$ 10 $b=72$	$a^2=61$ 11 $b=63$
$x=-1$	$\times-10$	$\times 10$	$a^2=100$ 10 $b=100$	$a^2=89$ 11 $b=90$	$a^2=78$ 12 $b=80$
$x=-1$	$\times-11$	$\times 11$	$a^2=121$ 11 $b=121$	$a^2=109$ 12 $b=110$	$a^2=97$ 13 $b=99$

$$7^e \ldots \left\{ \begin{array}{l} x^3 - a'x^2 + a''x' = b.''' \\ x^3 + a'x^2 - a''x' = -b.''' \end{array} \right.$$
8e...

contenuës dans le reste de la Table.

$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$
$a^2=5$ ×2 $b=-2$	$a^2=7$ ×3 $b=-3$	$a^2=9$ ×4 $b=-4$	$a^2=11$ ×5 $b=-5$	$a^2=13$ 6 $b=-6$	$a^2=15$ 7 $b=-7$
$a^2=5$ 1 $b=-2$	$a^2=8$ 2 $b=-4$	$a^2=11$ 3 $b=-6$	$a^2=14$ 4 $b=-8$	$a^2=17$ 5 $b=-10$	$a^2=20$ 6 $b=-12$
$a^2=-3$ 6 $b=0$	$a^2=7$ 1 $b=-3$	$a^2=11$ 2 $b=-6$	$a^2=15$ 3 $b=-9$	$a^2=19$ 4 $b=-12$	$a^2=23$ 5 $b=-15$
$a^2=1$ 7 $b=5$	$a^2=-4$ 8 $b=0$	$a^2=9$ 1 $b=-4$	$a^2=14$ 2 $b=-8$	$a^2=19$ 3 $b--12$	$a^2=24$ 4 $b=-16$
$a^2=7$ 8 $b=10$	$a^2=1$ 9 $b=5$	$a^2=-5$ 10 $b=0$	$a^2=-11$ 1 $b=-5$	a^2-17 2 $b=-10$	$a^2=-23$ 3 $b=-15$
$a^2=15$ 9 $b=18$	$a^2=8$ 10 $b=12$	$a^2=1$ 11 $b=6$	$a^2=-6$ 12 $b=0$	$a^2=-13$ 1 $b=-6$	$a^2=-20$ 2 $b=-12$
$a^2=25$ 10 $b=28$	$a^2=17$ 11 $b=21$	$a^2=9$ 12 $b=14$	$a^2=1$ 13 $b=7$	$a^2=-7$ 14 $b=0$	$a^2=-15$ 1 $b=-7$
$a^2=37$ 11 $b=40$	$a^2=28$ 12 $b=32$	$a^2=19$ 13 $b=24$	$a^2=10$ 14 $b=16$	$a^2=1$ 15 $b=8$	$a^2=-8$ 16 $b=0$
$a^2=51$ 12 $b=54$	$a^2=41$ 13 $b=45$	$a^2=31$ 14 $b=36$	$a^2=21$ 15 $b=27$	$a^2=11$ 16 $b=18$	$a^2=1$ 17 $b=9$
$a^2=67$ 13 $b=70$	$a^2=56$ 14 $b=60$	$a^2=45$ 15 $b=50$	$a^2=34$ 16 $b=40$	$a^2=23$ 17 $b=30$	$a^2=12$ 18 $b=20$
$a^2=85$ 14 $b=88$	$a^2=73$ 15 $b=77$	$a^2=61$ 16 $b=66$	$a^2=49$ 17 $b=55$	$a^2=37$ 18 $b=44$	$a^2=25$ 19 $b=33$

13[e] Table. Pour les formules $\begin{cases} x^3 - a'x^2 - a''x' = b.''' \\ x^3 - a'x^2 - a''x' = -b.''' \end{cases}$

1[re] eſpéce. 3[e] claſſe.

3[e] dégré.

			$a=0$ $a^2=0$	$a^1=0$ $a^2=1$	$a^1=1$ *conſtant.*
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=6$	$b=2$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=24$	$b=15$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=60$	$b=44$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=120$	$b=95$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=210$	$b=174$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=336$	$b=287$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=504$	$b=440$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=720$	$b=639$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=990$	$b=890$

. . . . 5^e formule.
. . . . 6^e formule.

$a^1=2$	$a^1=3$	$a^1=4$	$a^1=5$	$a^1=6$	$a^1=7$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=-2$	$b=-6$	$b=-10$	$b=-14$	$b=-18$	$b=-22$
$b=6$	$b=-3$	$b=-12$	$b=-21$	$b=-30$	$b=-39$
$b=28$	$b=12$	$b=-4$	$b=-20$	$b=-36$	$b=-52$
$b=70$	$b=45$	$b=20$	$b=-5$	$b=-30$	$b=-55$
$b=138$	$b=102$	$b=66$	$b=30$	$b=-6$	$b=-42$
$b=238$	$b=189$	$b=140$	$b=91$	$b=42$	$b=-7$
$b=376$	$b=312$	$b=248$	$b=184$	$b=120$	$b=56$
$b=558$	$b=477$	$b=396$	$b=315$	$b=234$	$b=153$
$b=790$	$b=690$	$b=590$	$b=490$	$b=390$	$b=290$

14e Table. Pour la 5e formule $x^3 - a'x^2 - a''x' = b.'''$

2de espéce. 3e dégré.			$a=1$			$a=2$			$a=3$		
$x=-1$	$x-1$	$\times 3$	$\times 3$	$a^2=5$	$b=3$	$\times 4$	$a^2=7$	$b=4$	$\times 5$	$a^2=9$	$b=5$
$x=-2$	$x-1$	$\times 4$	$\times 4$	$a^2=10$	$b=8$	$\times 5$	$a^2=13$	$b=10$	$\times 6$	$a^2=16$	$b=12$
$x=-3$	$x-1$	$\times 5$	$\times 5$	$a^2=17$	$b=15$	$\times 6$	$a^2=21$	$b=18$	$\times 7$	$a^2=25$	$b=21$
$x=-4$	$x-1$	$\times 6$	$\times 6$	$a^2=26$	$b=24$	$\times 7$	$a^2=31$	$b=28$	$\times 8$	$a^2=36$	$b=32$
$x=-5$	$x-1$	$\times 7$	$\times 7$	$a^2=37$	$b=35$	$\times 8$	$a^2=43$	$b=40$	$\times 9$	$a^2=49$	$b=45$
$x=-6$	$x-1$	$\times 8$	$\times 8$	$a^2=50$	$b=48$	$\times 9$	$a^2=57$	$b=54$	$\times 10$	$a^2=64$	$b=60$
$x=-7$	$x-1$	$\times 9$	$\times 9$	$a^2=65$	$b=63$	$\times 10$	$a^2=73$	$b=70$	$\times 11$	$a^2=81$	$b=77$
$x=-8$	$x-1$	$\times 10$	$\times 10$	$a^2=81$	$b=90$	$\times 11$	$a^2=90$	$b=98$	$\times 12$	$a^2=99$	$b=106$
$x=-9$	$x-1$	$\times 11$	$\times 11$	$a^2=101$	$b=99$	$\times 12$	$a^2=111$	$b=108$	$\times 13$	$a^2=121$	$b=117$
$x=-10$	$x-1$	$\times 12$	$\times 12$	$a^2=122$	$b=120$	$\times 13$	$a^2=133$	$b=130$	$\times 14$	$a^2=144$	$b=140$
$x=-11$	$x-1$	$\times 13$	$\times 13$	$a^2=145$	$b=143$	$\times 14$	$a^2=157$	$b=154$	$\times 15$	$a^2=168$	$b=165$

. . . . . { qui a deux premieres racines négatives, & la 3ᵉ positive plus grande que leur somme.

$a=4$			$a=5$			$a=6$			$a=7$			$a=8$		
x6	$a^2=11$	$b=6$	x7	$a^2=13$	$b=7$	x8	$a^2=15$	$b=8$	x9	$a^2=17$	$b=9$	x10	$a^2=19$	$b=10$
x7	$a^2=19$	$b=14$	x8	$a^2=22$	$b=16$	x9	$a^2=25$	$b=18$	x10	$a^2=28$	$b=20$	x11	$a^2=31$	$b=22$
x8	$a^2=29$	$b=24$	x9	$a^2=33$	$b=27$	x10	$a^2=37$	$b=30$	x11	$a^2=41$	$b=33$	x12	$a^2=45$	$b=36$
x9	$a^2=41$	$b=36$	x10	$a^2=46$	$b=40$	x11	$a^2=51$	$b=44$	x12	$a^2=56$	$b=48$	x13	$a^2=61$	$b=52$
x10	$a^2=55$	$b=50$	x11	$a^2=61$	$b=55$	x12	$a^2=67$	$b=60$	x13	$a^2=73$	$b=65$	x14	$a^2=79$	$b=70$
x11	$a^2=71$	$b=66$	x12	$a^2=78$	$b=72$	x13	$a^2=85$	$b=78$	x14	$a^2=92$	$b=84$	x15	$a^2=99$	$b=90$
x12	$a^2=89$	$b=84$	x13	$a^2=97$	$b=91$	x14	$a^2=605$	$b=98$	x15	$a^2=113$	$b=105$	x16	$a^2=121$	$b=112$
x13	$a^2=108$	$b=114$	x14	$a^2=117$	$b=122$	x15	$a^2=126$	$b=130$	x16	$a^2=135$	$b=138$	x17	$a^2=144$	$b=146$
x14	$a^2=131$	$b=126$	x15	$a^2=141$	$b=135$	x16	$a^2=151$	$b=144$	x17	$a^2=161$	$b=153$	x18	$a^2=171$	$b=162$
x15	$a^2=155$	$b=150$	x16	$a^2=166$	$b=160$	x17	$a^2=177$	$b=170$	x18	$a^2=188$	$b=180$	x19	$a^2=199$	$b=190$
x16	$a^2=179$	$b=176$	x17	$a^2=191$	$b=187$	x18	$a^2=203$	$b=198$	x19	$a^2=215$	$b=209$	x20	$a^2=227$	$b=220$

14e Table. Pour la 5e formule $x^3 - a'x^2 - a''x' = b.'''$

2de espéce. 3e dégré.			$a=1$			$a=2$			$a=3$		
$x=-1$	$\times -1$	$\times 3$	$\times 3$	$a''=5$	$b=3$	$\times 4$	$a''=7$	$b=4$	$\times 5$	$a''=9$	$b=5$
$x=-2$	$\times -1$	$\times 4$	$\times 4$	$a''=10$	$b=8$	$\times 5$	$a''=13$	$b=10$	$\times 6$	$a''=16$	$b=12$
$x=-3$	$\times -1$	$\times 5$	$\times 5$	$a''=17$	$b=15$	$\times 6$	$a''=21$	$b=18$	$\times 7$	$a''=25$	$b=21$
$x=-4$	$\times -1$	$\times 6$	$\times 6$	$a''=26$	$b=24$	$\times 7$	$a''=31$	$b=28$	$\times 8$	$a''=36$	$b=32$
$x=-5$	$\times -1$	$\times 7$	$\times 7$	$a''=37$	$b=35$	$\times 8$	$a''=43$	$b=40$	$\times 9$	$a''=49$	$b=45$
$x=-6$	$\times -1$	$\times 8$	$\times 8$	$a''=50$	$b=48$	$\times 9$	$a''=57$	$b=54$	$\times 10$	$a''=64$	$b=60$
$x=-7$	$\times -1$	$\times 9$	$\times 9$	$a''=65$	$b=63$	$\times 10$	$a''=73$	$b=70$	$\times 11$	$a''=81$	$b=77$
$x=-8$	$\times -1$	$\times 10$	$\times 10$	$a''=81$	$b=90$	$\times 11$	$a''=90$	$b=98$	$\times 12$	$a''=99$	$b=106$
$x=-9$	$\times -1$	$\times 11$	$\times 11$	$a''=101$	$b=99$	$\times 12$	$a''=111$	$b=108$	$\times 13$	$a''=121$	$b=117$
$x=-10$	$\times -1$	$\times 12$	$\times 12$	$a''=122$	$b=120$	$\times 13$	$a''=133$	$b=130$	$\times 14$	$a''=144$	$b=140$
$x=-11$	$\times -1$	$\times 13$	$\times 13$	$a''=145$	$b=143$	$\times 14$	$a''=157$	$b=154$	$\times 15$	$a''=168$	$b=165$

. . . . . { qui a deux premieres racines négatives, & la 3e positive plus grande que leur somme.

$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$
x6 $a^2=11$ $b=6$	x7 $a^2=13$ $b=7$	x8 $a^2=15$ $b=8$	x9 $a^2=17$ $b=9$	x10 $a^2=19$ $b=10$
x7 $a^2=19$ $b=14$	x8 $a^2=22$ $b=16$	x9 $a^2=25$ $b=18$	x10 $a^2=28$ $b=20$	x11 $a^2=31$ $b=22$
x8 $a^2=29$ $b=24$	x9 $a^2=33$ $b=27$	x10 $a^2=37$ $b=30$	x11 $a^2=41$ $b=33$	x12 $a^2=45$ $b=36$
x9 $a^2=41$ $b=36$	x10 $a^2=46$ $b=40$	x11 $a^2=51$ $b=44$	x12 $a^2=56$ $b=48$	x13 $a^2=61$ $b=52$
x10 $a^2=55$ $b=50$	x11 $a^2=61$ $b=55$	x12 $a^2=67$ $b=60$	x13 $a^2=73$ $b=65$	x14 $a^2=79$ $b=70$
x11 $a^2=71$ $b=66$	x12 $a^2=78$ $b=72$	x13 $a^2=85$ $b=78$	x14 $a^2=92$ $b=84$	x15 $a^2=99$ $l=90$
x12 $a^2=89$ $b=84$	x13 $a^2=97$ $b=91$	x14 $a^2=605$ $b=98$	x15 $a^2=113$ $b=105$	x16 $a^2=121$ $b=112$
x13 $a^2=108$ $b=114$	x14 $a^2=117$ $b=122$	x15 $a^2=126$ $b=130$	x16 $a^2=135$ $b=138$	x17 $a^2=144$ $b=146$
x14 $a^2=131$ $b=126$	x15 $a^2=141$ $b=135$	x16 $a^2=151$ $b=144$	x17 $a^2=161$ $b=153$	x18 $a^2=171$ $b=162$
x15 $a^2=155$ $b=150$	x16 $a^2=166$ $b=160$	x17 $a^2=177$ $b=170$	x18 $a^2=188$ $b=180$	x19 $a^2=199$ $b=190$
x16 $a^2=179$ $b=176$	x17 $a^2=191$ $b=187$	x18 $a^2=203$ $b=198$	x19 $a^2=215$ $b=209$	x20 $a^2=227$ $b=220$

15e Table. Pour la 6e formule $x^3 - a'x^2 - a^2 x' + b.''' = o$

2de espéce. 3e dégré.			$a=1$	$a=2$	$a=3$
$x=-2$	$x-1$	$x+2$	×2 $a^2=4$ $b=4$	×3 $a^2=5$ $b=6$	×4 $a^2=6$ $b=8$
$x=-3$	$x-2$	$x+2$	2 $a^2=8$ $b=12$	3 $a=9$ $b=18$	4 $a^2=10$ $b=24$
$x=-4$	$x-3$	$x+2$	2 $a^2=14$ $b=24$	3 $a^2=15$ $b=36$	4 $a^2=16$ $b=48$
$x=-5$	$x-4$	$x+2$	2 $a^2=22$ $b=40$	3 $a^2=23$ $b=60$	4 $a^2=24$ $b=80$
$x=-6$	$x-5$	×2	2 $a^2=32$ $b=60$	3 $a^2=33$ $b=90$	4 $a^2=34$ $b=120$
$x=-7$	$x-6$	×2	2 $a^2=44$ $b=84$	3 $a^2=45$ $b=120$	4 $a^2=46$ $b=168$
$x=-8$	$x-7$	×2	2 $a^2=58$ $b=112$	3 $a^2=59$ $b=168$	4 $a^2=60$ $b=224$
$x=-9$	$x-8$	×2	2 $a^2=74$ $b=144$	3 $a^2=75$ $b=216$	4 $a^2=67$ $b=288$
$x=-10$	$x-9$	×2	2 $a^2=92$ $b=180$	3 $a^2=93$ $b=270$	4 $a^2=94$ $b=360$
$x=-11$	$x-10$	×2	2 $a^2=112$ $b=220$	3 $a^2=114$ $b=330$	4 $a^2=114$ $b=440$
$x=-12$	$x-11$	×2	2 $a^2=134$ $b=264$	3 $a^2=135$ $b=396$	4 $a^2=136$ $b=528$

. . . . { deux Racines négatives, & la 3[e] positive toujours constante.

$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$
$a^2=7$ ×5 $b=10$	$a^2=8$ ×6 $b=12$	$a^2=9$ ×7 $b=14$	$a^2=10$ ×8 $b=16$	$a^2=11$ 9 $b=18$	$a^2=12$ 10 $b=20$
$a^2=11$ 5 $b=30$	$a^2=12$ 6 $b=36$	$a^2=13$ 7 $b=42$	$a^2=14$ 8 $b=48$	$a^2=15$ 9 $b=54$	$a^2=16$ 10 $b=60$
$a^2=17$ 5 $b=60$	$a^2=18$ 6 $b=72$	$a^2=19$ 7 $b=84$	$a^2=20$ 8 $b=96$	$a^2=21$ 9 $b=108$	$a^2=22$ 10 $b=120$
$a^2=25$ 5 $b=100$	$a^2=26$ 6 $b=120$	$a^2=27$ 7 $b=140$	$a^2=28$ 8 $b=160$	$a^2=29$ 9 $b=180$	$a^2=30$ 10 $b=200$
$a^2=35$ 5 $b=150$	$a^2=36$ 6 $b=180$	$a^2=37$ 7 $b=210$	$a^2=38$ 8 $b=240$	a^2-39 9 $b=270$	$a^2=40$ 10 $b=300$
$a^2=47$ 5 $b=210$	$a^2=48$ 6 $b=252$	$a^2=49$ 7 $b=294$	$a^2=50$ 8 $b=336$	$a^2=51$ 9 $b=378$	$a^2=52$ 10 $b=420$
$a^2=61$ 5 $b=280$	$a^2=62$ 6 $b=336$	$a^2=63$ 7 $b=392$	$a^2=64$ 8 $b=438$	$a^2=65$ 9 $b=494$	$a^2=66$ 10 $b=550$
$a^2=77$ 5 $b=360$	$a^2=78$ 6 $b=432$	$a^2=79$ 7 $b=504$	$a^2=80$ 8 $b=576$	$a^2=81$ 9 $b=648$	$a^2=82$ 10 $b=720$
$a^2=95$ 5 $b=450$	$a^2=96$ 6 $b=540$	$a^2=97$ 7 $b=630$	$a^2=98$ 8 $b=720$	$a^2=99$ 9 $b=810$	$a^2=100$ 10 $b=900$
$a^2=115$ 5 $b=550$	$a^2=116$ 6 $b=660$	$a^2=117$ 7 $b=770$	$a^2=118$ 8 $b=880$	$a^2=119$ 9 $b=990$	$a^2=120$ 10 $b=1100$
$a^2=137$ 5 $b=660$	$a^2=138$ 6 $b=792$	$a^2=139$ 7 $b=924$	$a^2=140$ 8 $b=1056$	$a^2=141$ 9 $b=44$	$a^2=142$ 10 $b=1320$

1re espéce. 1ere & 2de classe. 5e dégré.				a^{iv}—0	$a^{iii}=1$	$a^{iv}=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$x^4=0$	$x^5=0$ $b^v=0$	$b^v=0$	$b^v=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$x^4=1$	$x^5=1$ $b^v=1$	$b^v=2$	$b^v=3$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$x^4=16$	$x^5=32$ $b^v=32$	$b^v=34$	$b^v=36$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	x^4—81	$x^5=243$ $b^v=243$	$b^v=246$	$b^v=249$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$x^4=256$	x^5 & b^v 1024	$b^v=1028$	$b^v=1032$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	625	x^5 & b^v 3125	$b^v=3130$	$b^v=3135$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	1296	x^5 & b^v 7776	$b^v=7782$	$b^v=7788$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	2401	x^5 & b^v 16807	$b^v=16814$	$b^v=16821$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	4096	x^5 & b^v 32768	$b^v=32776$	$b^v=32784$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	6561	x^5 & b^v 59049	$b^v=59058$	$b^v=59067$
$x=10$	$x^2=100$	100. 0	100. 00	x^5 & b^v 1000000	$b^v=$ 100. 01. 0.	$b^v=$ 100. 020

. . . . Et $x^{v} + a^{iv}x' = b^{v}$.

$a^{iv}=3$	$a^{iv}=4$	$a^{iv}=5$	$a^{iv}=6$	$a^{iv}=7$
$b^{v}=0$	$b^{v}=0$	$b^{v}=0$	$b^{v}=0$	$b^{v}=0$
$b^{v}=4$	$b^{v}=5$	$b^{v}=6$	$b^{v}=7$	$b^{v}=8$
$b^{v}=38$	$b^{v}=40$	$b^{v}=42$	$b^{v}=44$	$b^{v}=46$
$b^{v}=252$	$b^{v}=255$	$b^{v}=258$	$b^{v}=261$	$b^{v}=264$
$b^{v}=1036$	$b^{v}=1040$	$b^{v}=1044$	$b^{v}=1048$	$b^{v}=1052$
$b^{v}=3140$	$b^{v}=3145$	$b^{v}=3150$	$b^{v}=3155$	$b^{v}=3160$
$b^{v}=7794$	$b^{v}=7800$	$b^{v}=7806$	$b^{v}=7812$	$b^{v}=7818$
$b^{v}=16828$	$b^{v}=16835$	$b^{v}=16842$	$b^{v}=16849$	$b_{v}=16856$
$b^{v}=32792$	$b^{v}=32800$	$b^{v}=32808$	$b^{v}=32816$	$b^{v}=32824$
$b^{v}=59076$	$b^{v}=59085$	$b^{v}=59094$	$b^{v}=59103$	$b^{v}=59112$
$b^{v}=100.030$	$b^{v}=100.040$	$b^{v}=100.050$	$b^{v}=100.060$	$b^{v}=100.070$

17[e] Table Pour les formules $x^5 = b^{v}$ . . & . . .

1[re] eſpece.
5[e]. dégré.

				$a^{iv}=0$	$a^{iv}=1$	$a^{iv}=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$x^4=0$	$x^5=0$ $b^{v}=0$	$b^{v}=0$	$b^{v}=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$x^4=1$	$x^5=1$ $b^{v}=1$	$b^{v}=0$	$b^{v}=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$x^4=16$	$x^5=32$ $b^{v}=32$	$b^{v}=30$	$b^{v}=28$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$x^4=81$	$x^5=243$ $b^{v}=243$	$b^{v}=240$	$b^{v}=237$
$x=4$	$=16$	64	256	x^5 & b^{v} $=1024$	$b^{v}=1020$	$b^{v}=1016$
$x=5$	$x^2=25$	125	625	x^5 & b^{v} $=3125$	$b^{v}=3120$	$b^{v}=3115$
$x=6$	36	216	1296	x^5 & b^{v} $=7776$	$b^{v}=7770$	$b^{v}=7764$
$x=7$	49	343	2401	x^5 & b^{v} $=16807$	$b^{v}=16800$	$b^{v}=16793$
$x=8$	64	512	4096	x^5 & b^{v} $=32768$	$b^{v}=32760$	$b^{v}=32752$
$x=9$	81	729	6561	x^5 & b^{v} 59049	$b^{v}=59040$	$b^{v}=59031$
$x=10$	100	100.0	100.00	x^5 & b^{v} 100.00.0.	$b^{v}=99.99.0$	$b^{v}=99.98.0$

. . . .

. . . . $\begin{cases} x^{5} - a^{IV}x^{1} = b^{V} \\ x^{5} - a^{IV}x^{1} = -b^{V} \end{cases}$

$a^{IV}=3$	$a^{IV}=4$	$a^{IV}=5$	$a^{IV}=6$	$a^{IV}=7$
$b^{V}=0$	$b^{V}=0$	$b^{V}=0$	$b^{V}=0$	$b^{V}=0$
$b^{V}=-2$	$b^{V}=-3$	$b^{V}=-4$	$b^{V}=-5$	$b^{V}=-6$
$b^{V}=26$	$b^{V}=24$	$b^{V}=22$	$b^{V}=20$	$b^{V}=18$
$b^{V}=234$	$b^{V}=231$	$b^{V}=228$	$b^{V}=225$	$b^{V}=222$
$b^{V}=1012$	$b^{V}=1008$	$b^{V}=1004$	$b^{V}=1000$	$b^{V}=996$
$b^{V}=3110$	$b^{V}=3105$	$b^{V}=3100$	$b^{V}=3095$	$b^{V}=3090$
$b^{V}=7758$	$b^{V}=7752$	$b^{V}=7746$	$b^{V}=7740$	$b^{V}=7734$
$b^{V}=16786$	$b^{V}=16779$	$b^{V}=16772$	$b^{V}=16765$	$b^{V}=16758$
$b^{V}=32744$	$b^{V}=32736$	$b^{V}=32728$	$b^{V}=32720$	$b^{V}=32712$
$b^{V}=59022$	$b^{V}=59013$	$b^{V}=59004$	$b^{V}=58995$	$b^{V}=58986$
$b^{V}=99.970$	$b^{V}=99.960$	$b^{V}=99.950$	$b^{V}=89.940$	$b^{V}=99.930$

ANALYSE GENERALE,

OU

LES REGLES GENERALES DE L'ANALYSE.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE

SUR L'ANALYSE,

Où l'on explique ſa nature, ſon objet, & comment elle procéde.

NALYSE eſt tiré du mot Grec *Analyſis*, qui ſignifie réſolution, diviſion, diſſection, comparaiſon; il a paſſé dans la langue françoiſe avec toutes ces diverſes ſignifications qu'on employe dans leur ſens naturel & ſouvent même dans un ſens figuré. On dit faire l'Analyſe d'un diſcours, lorſqu'on

divise ou sépare ses parties pour les comparer, ou pour en examiner les défauts ou les perfections ; faire l'Analyse d'une plante, c'est séparer ses parties par l'art de la Chimie pour en déveloper les principes ; faire l'Analyse d'un métal, c'est rechercher les élemens dont il est composé en séparant ses parties sensibles par le feu ou par quelque dissolvant, &c.

L'Analyse des Géométres, qui est l'art de découvrir les véritez Géométriques, & qui est la source & le fondement de toutes les Mathématiques, renferme toutes les différentes significations de son nom. C'est la science de comparer les grandeurs, elle en fait la division, la dissection & la résolution, comme on le verra dans la suite.

Son objet principal est la résolution des Problêmes de tous les genres & de tous les degrez à l'infini. Un Problême étant proposé l'Analyse en exprime les grandeurs par des lettres, les conditions par des signes, & les rapports par des égalitez.

Il y trois cas en général dans tous les Problêmes possibles. Le premier cas est lorsqu'il y a autant de rapports connus qu'ils y a de grandeurs inconnuës, suivant les conditions proposées, alors chaque inconnuë a une égalité, & le Problême est déterminé.

Le second cas est lorsqu'il y a moins de rapports connus qu'il y a de grandeurs inconnuës, alors comme chaque inconnuë ne peut pas avoir son égalité, il y a quelque égalité qui a deux inconnuës, & le Problême est indéterminé.

Le troisiéme cas est lorsque suivant les conditions proposées dans le Problême, on connoît plus de rapports qu'il n'y a d'inconnuës; alors on peut former plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnuës, & le Problême est plus que déterminé.

Voilà les trois genres des Problêmes que l'Analyse considére, elle les réduit à des expressions simples & faciles pour ménager la capacité de l'esprit humain, elle dépoüille

les

les grandeurs de tout ce qu'elles ont de particulier & de ſenſible, & les nomme chacune par une lettre de l'Alphabet, ſçavoir les grandeurs connuës par les premiéres lettres & les inconnuës par les derniéres lettres de l'Alphabet. Une expreſſion ſi ſimple ne partage point inutilement l'attention de l'eſprit & lui laiſſe toute ſon étenduë pour comparer ces grandeurs & leur appliquer les différentes opérations du calcul que les conditions du Problême exigent.

Comment l'Analyſe procéde à la réſolution des Problêmes.

1°. Elle les prépare. 2°. Elle les réſoud.

1°. Un problême étant propoſé, l'Analyſe donne des noms aux grandeurs, elle exprime leurs rapports par des égalitez, elle prépare ces égalitez pour avoir la valeur des grandeurs inconnës qu'elles contiennent; c'eſt-à-dire, elle prend ſoin de chaſſer ou de faire évanoüir ſucceſſivement chacune des grandeurs inconnuës dans chacune de ces égalitez, pour avoir une inconnuë ſeule dans le premier membre; & faiſant paſſer dans le ſecond membre les autres grandeurs, Si toutes les grandeurs du ſecond membre ſont des lettres connuës, elles donnent la valeur de l'inconnuë qui eſt dans le premier membre.

Premier cas. Si l'on trouve par ce moïen les valeurs de toutes les inconnuës, alors le Problême eſt réſolu, ce qui arrive dans tous les Problêmes déterminez & du premier degré ou l'inconnuë eſt linéaire. Car les égalitez donnent les valeurs des inconnuës par ordre, on trouve d'abord la valeur d'une inconnuë qui eſt ſeule dans une égalité, on ſubſtituë cette valeur trouvée dans une autre égalité où eſt la même inconnuë avec une autre, ce qui donne moïen de trouver la valeur de cette ſeconde inconnuë, ſubſtituant enſuite la valeur de ces deux inconnuës dans une égalité où il y a trois inconnuës, ſçavoir les deux dont

on a déja trouvé la valeur avec une troisiéme ; on trouvera de même la valeur de cette troisiéme inconnuë en lettres connuës ou en nombres ; & continuant de la sorte, on trouvera la valeur de toutes les inconnuës, ce qui donnera la résolution parfaite du Problême ; car il n'y a qu'à substituer des nombres à la place des lettres connuës qui sont les valeurs trouvées des grandeurs inconnuës, & s'il y a des fractions, on les fera évanoüir par la multiplication, & on réduira la résolution à sa plus simple expression ce qui est nécessaire dans tous les cas & même dans toutes les opérations qui se font pour préparer une Equation.

C'est ainsi que la préparation seule donne la résolution des Problêmes déterminez du premier degré où il n'y a qu'une inconnuë principale à laquelle toutes les autres se rapportent & qui est du premier degré : mais dans les autres cas la seule préparation ne suffit pas pour avoir la résolution, il y a d'autres regles à observer.

Second cas. Il y a toujours plusieurs inconnuës dans un Problême proposé, car s'il n'y en avoit qu'une seule, le Problême seroit résolu : mais il y a une inconnuë principale à laquelle les autres se rapportent, dont on ne peut pas toujours trouver la valeur par la préparation parce qu'on n'a pû la dégager ou la faire évanoüir, ce qui arrive lorsqu'elle est multipliée par elle-même. Et c'est l'origine des Equations de tous les degrez à l'infini. Par exemple, après la préparation si on trouve une égalité $x^2 = ax$, dans laquelle l'inconnuë se trouve au second degré dans le premier terme, & au premier degré dans le second terme, je divise tout par x, j'ai $x = a$, & le Problême est résolu.

2°. Si je trouve $x^2 = b$, je tire la racine quarrée des deux membres, & j'ai $x = \sqrt{b}$. c'est une équation pure & simple du second degré. De même si j'ai $x^3 = b$, qui est une équation pure & simple du troisiéme degré, je tire

la racine cubique de chaque membre & j'ai $x = \sqrt[3]{b}$. Il en est de même des équations pures & simples de tous les degrez à l'infini.

3°. S'il résulte de la préparation une équation quelconque dont le premier membre soit la puissance parfaite d'un binôme, comme $x^2 - 2ax + aa = b$, qui est une équation du second degré, dont le premier membre contient la puissance parfaite du binôme $x + a$. De même $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = b^3 + c^3$. dont le premier membre est la troisiéme puissance parfaite du binôme $\overline{x+a}$. Il en est de même des autres puissances à l'infini d'un binôme quelconque. Je nomme ces égalitez qui résultent de la préparation du Problême des équations & il y en a de tous les degrez à l'infini, comme des puissances; l'exposant de la haute puissance de l'inconnuë marque le degré de l'équation. Or la préparation seule ne peut pas donner la valeur de cette inconnuë, il faut que l'Analyse fournisse d'autres regles pour les résoudre & pour les cas suivans.

4°. Quelquefois la préparation se réduit à plusieurs égalitez où se trouve la même inconnuë élevée à des degrez differens, & en ajoûtant ensemble ces égalitez, on peut former une équation dont le premier membre est encore une puissance parfaite d'un binôme.

Par exemple, si le Problême proposé se réduit à ces deux équations du second degré $x^2 - 3ax = b$, & $aa + ax = c$. j'ajoûte ces deux équations j'ai $x^2 - 2ax + aa = bc$. dont le premier membre est une 2de. puissance parfaite du binôme $x + a$.

De même si le Problême proposé se réduit à ces deux équations du troisiéme degré, $x^3 + 3a^2x = b^3$, & $3ax^2 + a^3 = c^3$. j'ajoûte ces deux équations & j'ai $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = b^3 + c^3$, dont le premier membre est la troisiéme puissance parfaite du binôme $\overline{x+a}$.

Souvent le Problême se réduit à deux équations qui ont des fractions comme $x^2 - y^2 = \frac{1}{3} p$. & $x^3 + 3xy^2 = \frac{1}{2} q$.

Pour ôter les fractions. 1°. J'éleve la premiére égalité à la troisiéme puissance, parce que le dénominateur 3 de la fraction du dernier terme est l'exposant de la troisiéme puissance. Ce qui donne $x^6 - 3x\ y^2 + 3x^2 y^4 - y^6 = \frac{1}{27} p^3$.

2°. J'éleve la seconde égalité à la seconde puissance, parce qu'il faut la multiplier par le dénominateur 2 de la fraction du dernier terme qui est l'exposant de la seconde puissance ; ce qui donne $x^6 + 6x^4y^2 + 9x^2 y^4 = \frac{1}{4} qq$.

Ensuite je retranche le premier membre de la premiére égalité élevée au cube du premier membre de la seconde élevée au quarré, & le second membre de la premiére du second membre de la seconde.

$$2^{de}.\quad x^6 + 6x^4y^2 + 9x^2y^4 \qquad = \frac{1}{4} qq.$$
$$1^{re}.\quad x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6 = \frac{1}{27} p^3.$$

Ce qui se fait en changeant tous les signes dans les termes de la premiére, & les ajoûtant à ceux de la seconde, ce qui donne.

$$2^{de}.\quad x^6 + 6x^4y^2 + 9x^2y^4 \qquad = \frac{1}{4} qq.$$
$$1^{re}.\quad x^6 + 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + y^6 = - \frac{1}{27} p^3.$$

Addition $+ 9x^4y^2 + 6x^2y^4 + y^6 = \frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3$.

Cette somme est une Equation dont le premier membre est la seconde puissance parfaite de $3x^2 y + y^3$.

3°. Je tire la racine quarrée de chaque membre de cette

derniere Equation, j'ai $3xy^2 + y^3 = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ à laquelle j'ajoute l'Equation $x^3 + 3xy^2 = \frac{1}{2}q$.

La somme donne l'Equation $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ dont le premier membre est le cube parfait du binôme $\overline{x+y}$. donc tirant la racine cubique de chaque membre, je trouve l'Equation simple qui en est la racine $x + y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{27}p^3}}$ & le Problême est résolu.

5°. Quelquefois la préparation réduit un Problême à une égalité dont le premier membre ne contient pas une puissance parfaite d'un binôme, mais il y manque quelques termes qu'on peut ajouter, ou soustraire de part & d'autre pour avoir cette puissance parfaite dans le premier membre, par exemple. Si le Problême se réduit à cette seule égalité $x^2 - 2ax = bc$; il est évident qu'il faut ajouter de part & d'autre $+ aa$, ce qui donne $x^2 - 2ax + aa = aa + bc$, alors le premier membre est de la seconde puissance parfaite du binôme $x - a$. Et tirant la racine quarrée de chaque membre, j'ai $x - a = \sqrt{aa + bc}$ qui donne par transposition $x = a + \sqrt{aa + bc}$.

De même si j'ai $x^3 - 3bx^2 + 3bx^2 = c^3$; si je mets $- b^3$ dans les deux membres, j'aurai dans le premier membre la troisiéme puissance parfaite de $x - b$. Ainsi $x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3 = c^3 - b^3$, donc tirant la racine cubique de chaque membre, j'aurai la racine ou l'Equation simple $x - b = \sqrt[3]{c^3 - b^3}$, & par transposition $x = b + \sqrt[3]{c^3 - b^3}$. Souvent on trouve deux égalitez qui jointes ensemble donnent une Equation où

le ſecond terme eſt détruit, &c.

Voilà l'origine des égalitez qu'on nomme les Equations; c'eſt ainſi qu'elles naiſſent de la préparation des Problêmes déterminez, dans leſquels il n'y a qu'une ſeule inconnuë principale qu'on n'a pu faire évanoüir.

Troiſiéme cas. Lorſqu'on n'a pû former d'abord autant d'égalitez que d'inconnuës, le Problême ſe réduit à une ou à pluſieurs égalitez, qui renferment deux inconnuës ou trois inconnuës qu'on ne peut faire évanoüir, parce qu'on ne peut en trouver la valeur; en ce cas le Problême eſt indéterminé, il a une infinité de ſolutions, & l'Analyſe fournit d'autres regles pour ce ſecond genre de Problêmes.

Quatriéme cas. Lorſqu'il y a par les conditions du Problême plus de rapports connus qu'il n'y a de grandeurs inconnuës, on peut former plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnuës, puiſque chaque rapport donne une égalité, d'où il ſuit que le Problême propoſé eſt plus que déterminé, dans ce cas il y a des regles pour éviter les réſolutions qui ſont impoſſibles, parce qu'elles renferment une abſurdité, ces Problêmes ont un nombre limité de ſolutions.

Ainſi l'Analyſe a pour objet la réſolution des Problêmes qui ſe réduiſent à trois genres, qui ſont, 1°. les Problêmes déterminez, qui n'ont qu'une ſeule inconnuë, ils ont un nombre fini de réſolutions, ils en ont préciſément autant que l'expoſant de la haute puiſſance de l'inconnuë contient d'unitez.

Ces Problêmes contiennent les Equations, il y en a de tous les degrez à l'infini, & leur réſolution conſiſte à trouver les racines de ces équations.

2°. Les Problêmes indéterminez ſont ceux qui ont pluſieurs inconnuës, ils ont une infinité de ſolutions à l'infini, ils ſe réduiſent à des égalitez, qui prennent leur nom de la multitude de leurs inconnuës, les doubles

égalitez ſont celles où il reſte deux inconnuës, les triples égalitez celles où il reſte trois inconnuës, &c.

L'élégance de ces Problêmes conſiſte à éviter les fractions, & à donner des ſolutions à l'infini toujours en nombres entiers, la ſimple égalité n'eſt point un Problême indéterminé, c'eſt un Problême déterminé du premier dégré ou un Problême ſimple.

3°. Les Problêmes plus que déterminez ſont ceux dans leſquels on connoît plus de rapports que d'inconnuës, le nombre de leurs ſolutions eſt toujours fini & limité.

Voilà l'objet général de l'Analyſe, elle donne des Régles pour préparer ces Problêmes & pour les réſoudre, elle y applique avec art les Régles du calcul, & cet art ſont les Méthodes générales qu'elle preſcrit pour tous ces trois genres de Problêmes, ainſi l'Analyſe ſuppoſe les Régles du calcul, il faut ſe les rendre très-familiéres dans la pratique, & ſur-tout toutes les opérations qui concernent les fractions; ſans ce ſecours c'eſt perdre le tems que de vouloir s'appliquer à l'Analyſe.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIE'RE.

De l'Analyſe en général, & de la Réſolution des Problêmes déterminez du premier degré.

L'Analyſe qui eſt le fondement & la ſource de toutes les découvertes qu'on peut faire dans les Mathématiques, tire ſon nom d'un mot grec qui ſignifie réſolution, elle a pour objet la réſolution de tous les Problêmes ou queſtions qu'on peut former ſur les grandeurs comparées enſemble: cette réſolution ſe réduit toujours

à découvrir une ou pluſieurs grandeurs inconnuës, par le moïen des grandeurs connuës & des rapports qu'elles ont avec la grandeur ou les grandeurs inconnuës, exprimez par les conditions du Problême, ce qui ſe fait en augmentant ou diminuant ces grandeurs ſuivant les regles du calcul pour parvenir à l'égalité qui donne enfin la valeur déſirée de l'inconnuë.

Il y a entre les Problêmes pluſieurs degrez, pluſieurs genres, & pluſieurs eſpéces.

Il y a pluſieurs degrez dans les Problêmes comme dans les puiſſances, les Problêmes du premier degré ſont ceux où l'inconnuë n'eſt point multipliée par elle-même. c'eſt un Problême ſimple ou linéaire.

Les Problêmes du ſecond degré ſont ceux où l'inconnuë eſt multipliée une fois par elle-même, & où par conſéquent elle ſe trouve élevée au ſecond degré.

De même ſi l'inconnuë eſt élevée au troiſiéme degré, le Problême eſt du troiſiéme degré, & ainſi de tous les degrez ſupérieurs; il en eſt de même des Problêmes compoſez qui ont pluſieurs inconnuës, la haute puiſſance où l'inconnuë eſt élevée eſt le degré du Problême.

Il y a deux genres de Problêmes, le premier genre contient les Problêmes ſimples, ce ſont les Problêmes où il n'y a qu'une ſeule inconnuë, ou bien ceux où l'inconnuë n'a qu'une ſeule valeur, ce qui ne ſe trouve que dans les Problêmes du premier degré. Les Problêmes compoſez ſont le 2[d]. genre, ils ſont de deux ſortes.

1°. Ce ſont ceux qui renferment pluſieurs inconnuës.

2°. Ce ſont ceux qui, quoiqu'ils n'ayent qu'une ſeule inconnuë, cependant elle ſe trouve élevée à la ſeconde ou à la troiſiéme puiſſance, ce qui fait que cette inconnuë a pluſieurs valeurs différentes, & préciſément autant que l'expoſant de la haute puiſſance contient d'unitez Ainſi cet expoſant marque le nombre des racines de l'Equation.

Il y a trois eſpéces de Problêmes en général.

La premiére eſpéce contient les Problêmes indéterminez, ce ſont ceux qui ont pluſieurs inconnuës, & qui ſe réduiſent à pluſieurs égalitez, & par conſéquent ils ont une infinité de ſolutions ; il y en a de tous les degrez à l'infini.

La ſeconde eſpéce contient les Problêmes déterminez, ce ſont ceux qui ſe réduiſent à une ſeule égalité qui ne contient qu'une ſeule inconnuë, laquelle peut être du premier degré, du ſecond, du troiſiéme, &c. à l'infini, ces Problêmes n'ont qu'une ſeule réſolution dans le premier degré, & dans les degrez ſupérieurs le nombre des réſolutions eſt déterminé, il eſt toujours égal à l'expoſant de la puiſſance à laquelle l'inconnuë ſe trouve élevée, puiſque la réſolution conſiſte à trouver les racines ou les différentes valeurs de l'inconnuë.

La troiſiéme eſpéce contient les Problêmes plus que déterminez, ce ſont les Problêmes dont les conditions donnent plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnuës ; de ſorte qu'on peut choiſir entre les ſolutions poſſibles celles qui ſont les plus commodes, mais il faut éviter les ſolutions fauſſes qui renferment une contradiction.

Le but & la fin de toutes les regles de l'Analyſe conſiſte à trouver la valeur de l'inconnuë dans un Problême ſimple, ce qui ſe nomme faire évanoüir l'inconnuë, car en ſubſtituant la valeur trouvée à la place de l'inconnuë, elle diſparoît & s'évanoüit.

Dans les Problêmes compoſez. 1°. S'il y a pluſieurs inconnuës, il s'agit de trouver leurs valeurs, & même toutes leurs valeurs poſſibles à l'infini, ſi le Problême eſt indéterminé, car en ce cas il a une infinité de ſolutions.

2°. S'il n'y a qu'une ſeule inconnuë élevée à differens degrez, comme il ſe trouve dans les Equations, il s'agit de trouver autant de valeurs de l'inconnuë que l'expoſant de la haute puiſſance contient d'unitez.

à découvrir une ou pluſieurs grandeurs inconnuës, par le moïen des grandeurs connuës & des rapports qu'elles ont avec la grandeur ou les grandeurs inconnuës, exprimez par les conditions du Problême, ce qui ſe fait en augmentant ou diminuant ces grandeurs ſuivant les regles du calcul pour parvenir à l'égalité qui donne enfin la valeur déſirée de l'inconnuë.

Il y a entre les Problêmes pluſieurs degrez, pluſieurs genres, & pluſieurs eſpéces.

Il y a pluſieurs degrez dans les Problêmes comme dans les puiſſances, les Problêmes du premier degré ſont ceux où l'inconnuë n'eſt point multipliée par elle-même.. c'eſt un Problême ſimple ou linéaire.

Les Problêmes du ſecond degré ſont ceux où l'inconnuë eſt multipliée une fois par elle-même, & où par conſéquent elle ſe trouve élevée au ſecond degré.

De même ſi l'inconnuë eſt élevée au troiſiéme degré, le Problême eſt du troiſiéme degré, & ainſi de tous les degrez ſupérieurs; il en eſt de même des Problêmes compoſez qui ont pluſieurs inconnuës, la haute puiſſance où l'inconnuë eſt élevée eſt le degré du Problême.

Il y a deux genres de Problêmes, le premier genre contient les Problêmes ſimples, ce ſont les Problêmes où il n'y a qu'une ſeule inconnuë, ou bien ceux où l'inconnuë n'a qu'une ſeule valeur, ce qui ne ſe trouve que dans les Problêmes du premier degré. Les Problêmes compoſez ſont le 2d. genre, ils ſont de deux ſortes.

1°. Ce ſont ceux qui renferment pluſieurs inconnuës.

2°. Ce ſont ceux qui, quoiqu'ils n'ayent qu'une ſeule inconnuë, cependant elle ſe trouve élevée à la ſeconde ou à la troiſiéme puiſſance, ce qui fait que cette inconnuë a pluſieurs valeurs différentes, & préciſément autant que l'expoſant de la haute puiſſance contient d'unitez Ainſi cet expoſant marque le nombre des racines de l'Equation.

Il

Il y a trois eſpéces de Problêmes en général.

La premiére eſpéce contient les Problêmes indéterminez, ce ſont ceux qui ont pluſieurs inconnuës, & qui ſe réduiſent à pluſieurs égalitez, & par conſéquent ils ont une infinité de ſolutions; il y en a de tous les degrez à l'infini.

La ſeconde eſpéce contient les Problêmes déterminez, ce ſont ceux qui ſe réduiſent à une ſeule égalité qui ne contient qu'une ſeule inconnuë, laquelle peut être du premier degré, du ſecond, du troiſiéme, &c. à l'infini, ces Problêmes n'ont qu'une ſeule réſolution dans le premier degré, & dans les degrez ſupérieurs le nombre des réſolutions eſt déterminé, il eſt toujours égal à l'expoſant de la puiſſance à laquelle l'inconnuë ſe trouve élevée, puiſque la réſolution conſiſte à trouver les racines ou les différentes valeurs de l'inconnuë.

La troiſiéme eſpéce contient les Problêmes plus que déterminez, ce ſont les Problêmes dont les conditions donnent plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnuës; de ſorte qu'on peut choiſir entre les ſolutions poſſibles celles qui ſont les plus commodes, mais il faut éviter les ſolutions fauſſes qui renferment une contradiction.

Le but & la fin de toutes les regles de l'Analyſe conſiſte à trouver la valeur de l'inconnuë dans un Problême ſimple, ce qui ſe nomme faire évanoüir l'inconnuë, car en ſubſtituant la valeur trouvée à la place de l'inconnuë, elle diſparoît & s'évanoüit.

Dans les Problêmes compoſez. 1°. S'il y a pluſieurs inconnuës, il s'agit de trouver leurs valeurs, & même toutes leurs valeurs poſſibles à l'infini, ſi le Problême eſt indéterminé, car en ce cas il a une infinité de ſolutions.

2°. S'il n'y a qu'une ſeule inconnuë élevée à differens degrez, comme il ſe trouve dans les Equations, il s'agit de trouver autant de valeurs de l'inconnuë que l'expoſant de la haute puiſſance contient d'unitez.

Pour résoudre un Problême d'Analyse, il faut, 1°. exprimer par les lettres de l'Alphabet toutes les grandeurs du Problême. 2°. Former des égalitez suivant les conditions proposées. 3°. Résoudre ces égalitez en trouvant la valeur de l'inconnuë, s'il n'y en a qu'une, ou des inconnuës s'il y en a plusieurs.

Dans tout Problême d'Analyse, on exprime les grandeurs par les lettres de l'Alphabet; sçavoir, les grandeurs connuës par les premieres lettres a, b, c, d, &c. & les grandeurs inconnuës par les dernieres lettres.

Les conditions du problême sont les rapports donnez entre les grandeurs connuës & les grandeurs inconnuës, ou entre les seules grandeurs connuës, leur expression se fait par les mêmes lettres des grandeurs qu'ils represen-tent.

Les égalitez se font ainsi, pour égaler a avec b, je les joints ensemble par le signe d'égalité $=$, ainsi $a = b$, ce sont deux expressions égales de la même grandeur si a vaut 2, j'ai par cette égalité $2 = 2$. égaler deux grandeur, c'est les joindre ensemble par le signe d'égalité $=$.

Toute égalité a deux membres séparez par le signe $=$, je nomme le premier membre celui qui est à gauche du signe $=$ c'est a, je nomme le second membre celui qui est à droite, c'est b.

Le premier membre & le second peuvent avoir plusieurs termes, dans $x^2 - a = b$, le premier membre contient deux termes liez ensemble par le signe $-$; sçavoir, une inconnuë x élevée à la seconde puissance, & la grandeur a. Il peut y avoir dans ces deux membres des termes complexes : c'est-à-dire exprimez, par deux ou plusieurs lettres & des termes incomplexes, comme dans $xx + ax - bc = d$. Le second membre contient la seule lettre d qui est un terme incomplexe ; mais le premier membre contient trois termes complexes exprimez chacun par deux lettres.

Je nomme en général une égalité les deux expreſſions d'une même grandeur jointes enſemble par le ſigne $=$ qui eſt le ſigne de l'égalité, ſoit que les deux membres ſoient connus comme $a = b$, ou inconnus comme $x = y$, ſoit qu'il y ait une ou pluſieurs inconnuës dans le premier membre comme $x + ay = b$, ou $x + z - y = b$. De quelque maniere que les inconnuës ſoient exprimées, ou par addirion $x + y$, ou par ſouſtraction $x - y$, par multiplication xy, ou par diviſion $\frac{x}{y}$; ſoit enfin que les inconnuës ſoient élevées à différentes puiſſances $x^2 + y^3 = a$, ou ſoit que les inconnuës ſoient une racine d'une puiſſance quelconque p, comme $\sqrt[3]{xp} + \sqrt[2]{yy} - 3z^2 = b$.

Mais je nomme une *Equation*, une égalité dans laquelle il n'y a qu'une ſeule inconnuë ou linéaire comme $x = a$, ou élevée à la ſeconde puiſſance comme $x^2 = b$, & $x^2 + ax = b$, ou élevée à la troiſiéme puiſſance dans le premier terme, & à toutes ſes puiſſances inférieures dans les autres termes moiens comme $x^3 + ax^2 - bx = c$. Enfin une Equation eſt une égalité dont la haute puiſſance de l'inconnuë eſt élevée à un degré quelconque, tandis que la même inconnuë unique eſt élevée dans les autres termes moïens à des puiſſances inférieures, ainſi l'égalité eſt le genre, & l'Equation eſt l'eſpéce; il y a des égalitez qui ne ſont point des Equations, telles ſont les égalitez doubles qui ſont celles qui ont deux inconnuës, les égalitez triples qui ont trois inconnuës, les égalitez quadruples qui ont quatre inconnuës, &c.

Mais toute Equation eſt une égalité ſimple, & il y en a d'une infinité de degrez, puiſqu'on peut élever une inconnuë à tous les degrez ou puiſſances à l'infini.

Si une Equation contient le zéro ſeul dans le ſecond membre, cela ſe nomme une *Equation* égalée à zéro, comme $x^2 + ax - b = 0$, ou $x^2 + 3x - 18$

$=$ o, qui eſt une *Equation du ſecond degré*, puiſque l'inconnuë x eſt élevée à la ſeconde puiſſance, & la même inconnuë x eſt linéaire, ou au premier degré dans le ſecond terme ax que je nomme le *terme moyen*; de même je nomme tous les termes où l'inconnuë x ſe trouve dans différens degrez multipliée par des nombres ou par des lettres connuës, les termes moïens de l'Equation.

Les extrêmes ſont le premier terme de l'Equation & le dernier terme.

Le premier terme d'une Equation contient la plus haute puiſſance de l'inconnuë, il eſt par conſéquent entierement inconnu.

Les termes moïens ſont auſſi entierement inconnus, parce qu'ils ſont exprimez par différens degrez de la lettre inconnuë multipliée par un nombre ou par une lettre connuë.

Le dernier terme eſt entierement connu, il contient un nombre ou une lettre connuë ou pluſieurs.

Je le nomme l'homogéne de comparaiſon aprés Viette, car c'eſt à ce terme qu'il faut comparer tous les autres (quoiqu'ils ſoient tous homogénes) pour avoir la réſolution de l'Equation, puiſque ce dernier terme contient le produit de toutes les racines de l'Equation.

Des Problêmes ſimples ou des égalitez ſimples qui n'ont qu'une inconnuë, & des Equations ſimples ou du premier degré, leur formation & leur réſolution.

Les Problêmes ſimples ſont ceux qui ſe réduiſent à une ſeule inconnuë.

Les égalitez ſimples ſont celles qui n'ont qu'une ſeule inconnuë, dont on cherche la valeur.

Les Equations pures & ſimples ne ſont que des égalitez ſimples, ainſi elles ſe réſoudent de la même maniére par des ſimples opérations du calcul que nous ex-

pliquerons ici en détail dans les différens cas possibles en faveur des commençans, parce que ces mêmes opérations sont les préparations nécessaires pour résoudre les Equations composées ou des degrez supérieurs.

PROBLE'ME I.

Résolu par transposition & substitution.

Trouver un nombre inconnu x, *qui étant augmenté d'une grandeur connuë* a, *soit égal à* b *nombre connu.*

1°. Par les conditions du Problême, j'ai $x + a = b$. Voilà une Equation pure & simple qui me donne un rapport, 2°. par transposition je fais passer la grandeur $+ a$ du premier membre dans le second en lui donnant un signe contraire $- a$, j'ai $x = b - a$. 3°. Puisque a & b sont des nombres connus par hypothése, en substituant leurs valeurs dans cette Equation, par exemple, soit $a = 6$ & $b = 10$, ce qui donne $x = 10 - 6$. 4°. Abrégeant par soustraction les termes du second membre, j'ai $10 - 6 = 4$, donc $x = 4$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLE'ME II.

Résolu par transposition & substitution.

Trouver un nombre x *qui étant ajouté à* 37, *égale* 71.

1°. Par les conditions du Problême, j'ai $x + 37 = 71$, voilà l'Equation formée qui me donne le rapport désiré, 2°. Par transposition je fais passer $+ 37$ dans le second membre, en l'effaçant dans le premier membre, & l'écrivant dans le second membre avec le signe contraire $- 37$, ce qui donne $x = 71 - 37$, or $71 - 37 = 34$; d'où je conclus que $x = 34$, c'est la valeur désirée.

PROBLE'ME III.

Par diviſion & par tranſpoſition.

Trouver un nombre inconnu x *qui étant multiplié par une grandeur inconnuë* a, *ſoit égal au nombre donné* b.

1°. J'ai par les conditions du Problême $a \times x$, ou $ax = b$. 2°. Soit $a = 6$, $b = 42$, ſubſtituant dans $ax = b$, les valeurs de a & de b, j'ai $6 \times x = 42$. 2°. Tranſpoſant & diviſant tout par 6, j'ai $x = \frac{42}{6}$; or diviſant 42 par 6, le quotient eſt 7, ce qui donne $x = 7$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLE'ME IV.

Réſolu par multiplication.

Trouver un nombre inconnu x *qui étant diviſé par un nombre connu* a, *ſoit égal à un nombre connu* b.

1°. Par les conditions du Problême, $\frac{x}{a} = b$.

2°. Je multiplie tout par a, ce qui donne $x = ab$, & le Problême eſt réſolu, car puiſque a & b ſont des nombres connus, ſoit $a = 6$, $b = 7$, j'ai par ſubſtitution dans la derniére Equation $x = 6 \times 7 = 42$, donc $x = 42$, donc auſſi la ſubſtitution donne dans la premiére Equation $\frac{x}{a} = 7$, ou $\frac{42}{6} = 7$, or puiſque diviſant 42 par 6, le quotient eſt 7, donc $42 = 6 \times 7$, donc $x = 42$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLE'ME V.

Par diviſion.

Trouver un nombre quarré inconnu xx, *qui ſoit égal à la racine* x *multipliée par un nombre connu* a.

1°. Par les conditions du Problême j'ai cette Equation

$x^2 = ax$. 2°. Divisant tout par x, j'ai $x = a$, puisque a est un nombre connu, soit $a = 6$, j'ai $x = 6$, & $x = 36$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME VI.

Par l'extraction de la racine.

Trouver un nombre quarré inconnu xx *qui soit égal à un produit du nombre connu* a *multiplié par un autre nombre connu* b.

1°. Par les conditions du Problême, j'ai $x^2 = ab$. Cette premiére Equation me donne le rapport connu, 2°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, ce qui donne $x = \sqrt{ab}$. 3°. Puisque a & b sont des nombres connus, soit $a = 7$, $b = 5$, je substituë leurs valeurs après avoir multiplié $7 \times 5 = 35$, ce qui donne $x^2 = 35$, & tirant la racine quarrée, j'ai $x = \sqrt{35}$.

REGLE GENERALE

Pour résoudre les égalitez qui n'ont qu'une seule inconnuë linéaire & les Equations du premier degré.

Leur résolution consiste à faire évanoüir l'inconnuë, en la mettant seule dans le premier membre, & les autres grandeurs toutes connuës dans le second membre, ce qui donne la valeur de l'inconnuë.

Pour y parvenir, il faut, 1°. par transposition faire passer les grandeurs connuës dans le second membre; & si l'inconnuë affecte quelque grandeur connuë, il faut la dégager comme dans les exemples précédens, par l'addition, ou par soustraction, ou par multiplication, ou par division, ou par extraction de la racine selon la maniére dont l'inconnuë qu'on veut dégager est affectée par des grandeurs connuës.

PROBLEME VII.

Trois grandeurs étant connuës, a, b, c, *trouver une quatriéme grandeur* x, *qui ait même rapport à la troisiéme* c, *que la seconde* b *à la premiére* a.

1°. Le rapport de la seconde grandeur connuë b à la premiére a, est connu, puisqu'il suffit pour avoir ce rapport d'en faire une fraction, dont la premiere a soit l'antécédent, & la seconde b le conséquent, comme $\frac{a}{b}$ c'est proprement diviser la premiére par la seconde, & comme ces deux grandeurs sont connuës, leur quotient $\frac{a}{b}$ est connu aussi.

2°. Le rapport de l'inconnuë x à la troisiéme grandeur c est le quotient ou la fraction $\frac{c}{x}$ qui est connuë en partie, puisqu'on sçait par les conditions du Problême que $\frac{c}{x} = \frac{a}{b}$; mais comme c est inconnuë & x est inconnuë, ce rapport $\frac{c}{x}$ est en partie connû, & en partie inconnû.

3°. Par les conditions du Problême, j'ai cette équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ qui renferme toutes les grandeurs connuës & l'inconnuë avec leurs rapports, dans laquelle il faut ôter les fractions par la multiplication comme il suit.

4°. Je multiplie les deux membres par b, ce qui se fait en l'effaçant simplement dans le premier membre, & multipliant par b le seul numérateur du second membre, ce qui donne $a = \frac{cb}{x}$, voilà la premiére fraction détruite.

5°.

5°. Pour ôter la ſeconde fraction, je multiplie dans cette derniére équation les deux membres par x, ce qui donne $ax = bc$, voilà une équation préparée & ſans fraction.

6°. Pour la réſoudre, je diviſe tout par a, ce qui donne $x = \frac{bc}{a}$, & le Problême eſt réſolu, puiſque dans cette équation le ſecond membre ne contient que des grandeurs connuës ſans aucune inconnuë.

Réſolution en nombres. ſi on ſubſtituë en la place des lettres connuës leurs valeurs en nombres, on aura un quotient. Exemple. Soit $a = 5$, $b = 3$, $c = 15$, la ſubſtitution donne $\frac{bc}{a} = \frac{3 \times 15}{5} = \frac{45}{5} = 9$, donc $x \frac{45}{5}$, ou $x = 9$.

Remarques importantes & fondamentales.

1°. L'équation $x = \frac{bc}{a}$ eſt une formule ou une regle abrégée qui preſcrit ce qu'il faut faire pour trouver une quatriéme grandeur proportionelle à trois grandeurs données ; c'eſt le fondement de la regle de trois ou de proportion.

2°. L'équation préparée $ax = bc$, démontre que le produit des termes extrêmes eſt égal au produit des termes moïens, c'eſt un Théorême fondamental de la proportion géométrique.

3. On peut trouver de même une infinité de Théorêmes & de Problêmes ſur la proportion & ſur la progreſſion géométrique & ſur les autres proportions,

PROBLEME VIII.

Trouver la ſomme d'une progreſſion géométrique continuë & décroiſſante à l'infini 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. *&c.* 0. *dont le premier terme eſt* 8, *& le dernier eſt zéro.*

Soit en général la ſomme inconnuë $= x$. ſoit le premier terme $= a = 8$, le ſecond terme $= b = 4$.

1°. La ſomme cherchée $= x$.

Le premier terme $a = 8$ eſt ſeulement antécédent.

Le dernier terme zéro n'eſt ſeulement que conſéquent, mais tous les termes moïens compris entre ces deux extrêmes ſont antécédens & conſéquens tout enſemble.

Donc la ſomme de tous les antécédens eſt $x - 0$, ou ſimplement x; mais la ſomme des conſéquens eſt $x + 0 - a$, ou ſimplement $x - a$.

2°. Puiſque tous les termes ſont en proportion géométrique, donc tous leurs rapports ſont égaux, ce qui donne cette analogie $x : x - a :: a : b$, c'eſt-à-dire la ſomme x de tous les antécédens eſt à la ſomme x de tous les termes moins le premier a, comme le premier a eſt au ſecond b.

Ce qu'on peut auſſi exprimer par cette égalité $\frac{x}{x - a} = \frac{a}{b}$.

3°. Puiſque par le Problême précédent le produit des extrêmes eſt égal au produit des termes moïens, cette multiplication donne xxb. & $ax - aa$. d'où je tire l'égalité $bx = ax - aa$.

4°. Par tranſpoſition je fais paſſer $- aa$ du ſecond membre dans le premier, & bx du premier membre dans le ſecond en changeant leurs ſignes, & j'ai $aa = ax - bx$, ou bien par arrangement pour avoir l'inconnuë poſitive dans le premier membre, j'écris $ax - bx = aa$.

5°. Pour dégager l'inconnuë, je divise les deux membres par $a - b$ qui affecte l'inconnuë, ce qui se fait en mettant x seul dans le premier membre, & divisant le second membre par a, ce qui donne $x = \frac{aa}{a-b}$.

Voilà la valeur de la somme cherchée x.

Car Substitüant en la place des lettres connuës leurs valeurs en nombres, j'ai $\frac{aa}{a-b} = \frac{8 \times 8}{8-4} = \frac{64}{4} = 16$.

Donc la somme désirée $x = 16$. ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME IX.

Trouver un quatriéme nombre qui soit en proportion Arithmétique avec trois nombres donnez.

Ou bien, trois nombres étant donnez $\underline{abc}$. trouver un quatriéme x dont l'excés sur le troisiéme c, soit égal à l'excés du second b sur le premier a.

1°. Par les conditions du Problême, j'ai cette égalité $x - c = b - a$, donc transposant $- c$ dans le second membre avec un signe contraire $+ c$, j'ai $x = b + c - a$, & le problême est résolu.

2°. Substitüant en la place des lettres connuës leurs valeurs, soit $a = 3$. $b = 5$. $c = 13$, j'ai $x = 5 + 13 - 3 = 15$, donc $x = 15$, c'est le quatriéme nombre désiré en proportion Arithmétique.

Remarque importante.

Si je change par transposition l'égalité $x - c = b - a$ en la suivante $x + a = b + c$, dans laquelle les termes extrêmes sont dans le premier membre & les moïens dans le second membre, j'aurai la démonstration de ce Théorême important, que la somme des extrêmes dans la proportion Arithmétique, est toujours

égale à la somme des termes moïens.

On pourra découvrir & démontrer de la même maniére tous les Théorêmes & les Problêmes de la proportion, & de la progression Arithmétique.

REGLE

Pour les Egalitez simples qui ont deux inconnuës avec plusieurs solutions.

PROBLEME X.

Soient deux nombres connus a & b, trouver un troisiéme nombre inconnu x, avec cette condition, qu'en multipliant par ce troisiéme nombre restant, chaque somme de deux de ces nombres pris à discrétion, on ait trois produits qui soient en progression Arithmétique.

1°. Suivant les conditions du Problême, j'ai $a + b \times x$, c'est le premier produit que j'écris à part en A.

A . . $a + b \times x$, ou . . $ax + bx$. premier produit.
B . . $a + x \times b$, ou . . $ab + bx$. second produit.
C . . $b + x \times a$, ou . . $ab + ax$. troisiéme produit.

2°. J'ai $a + x$, & je multiplie leur somme par b, j'ai le second produit $ab + bx$ que j'écris aussi à part vers B.

3°. J'ai $b + x$, je multiplie leur somme par a, j'ai le troisiéme produit $ab + ax$ que j'écris encore à part vers C.

4°. Par les conditions du Problême ces trois produits doivent être en proportion Arithmétique, c'est-à-dire, que l'excés du premier sur le second, doit être égal à l'excés du second sur le troisiéme, ou ce qui revient au même la différence du premier au second, doit être égal à la différence du second au troisiéme.

5°. Pour accomplir cette condition, je compare ensemble ces produits deux à deux, dont je forme une équation, ce qui donne $ax + bx - ab = ab + bx - ab - ax$, dans laquelle le second produit est dans les deux membres avec des signes contraires & par transposition, mais le troisiéme produit a le signe $-$, parce qu'il est dans le second membre.

6°. Je prépare cette équation en faisant passer par transposition dans le premier membre toutes les grandeurs où l'inconnuë se rencontre, & je fais passer les autres grandeurs connuës du premier membre dans le second, en leur donnant des signes contraires, ce qui donne $ax + bx - bx - bx + ax = ab - ab + ab$.

J'abrége cette expression en effaçant les grandeurs qui se trouvent avec des signes contraires dans le même nombre, & ajoutant ensemble celles qui ont le même signe, ce qui donne l'équation abrégée, $2ax - bx = ab$.

7°. Je divise les deux membres de cette derniere équation par $2a - b$ qui affecte l'inconnuë x que je veux dégager, ce qui donne $x = \frac{ab}{2a - b}$ & le problême est résolu, mais il ne l'est pas pleinement, car on peut encore combiner ensemble ces trois produits, & les arranger ensemble de deux maniéres qui donneront encore deux autres valeurs de x.

8°. La premiére maniére en prenant en A le premier produit avec les signes $+$, & le troisiéme produit vers C avec les signes $-$ pour en faire le premier membre d'une équation, & pour le second membre de cette équation suivante le troisiéme produit C avec les signes $+$, avec le second produit B avec les signes $-$ comme il suit.

A.	C.	C.	B

$$ax + bx - ab - ax = ab + ax - ab - bx.$$

qui donne par transposition $ax + bx - ax - ax + bx = ab + ab - ab$. & abrégeant cette expression; J'ai $2bx - ax = ab$, divisant cette égalité par $\underline{2b - a}$ qui affecte l'inconnuë x pour la dégager, j'ai $x = \frac{ab}{2b - a}$ qui est une seconde valeur de x.

9°. La seconde maniére de combiner ces produits consiste à former une équation, dont le premier membre contienne le second produit B avec les signes $+$ avec le premier produit A & les signes $-$ dont le second membre contienne le premier produit A avec les signes $+$, & le troisiéme produit C avec les signes $-$ comme il suit

B.	A.	A.	C.

$$ab + bx + ax - ab = ax + bx - ab - ax.$$

Je fais passer par transposition tous les termes où est l'inconnuë x, du second membre dans le premier; & les autres termes où l'inconnuë ne se trouve pas du premier membre dans le second en changeant leurs signes, ce qui donne $bx - ax - bx - ax - bx + ax = - ab - ab$.

J'abrége cette expression par l'addition des grandeurs semblables qui ont le même signe, & par la soustraction de celles qui ont des signes differens, ce qui donne $- ax - bx = - 2ab$, comme toutes ces grandeurs sont négatives je les rends positives par transposition, ainsi $2ab = ax + bx$.

Pour dégager l'inconnuë x qui est affectée; c'est-à-dire, multipliée par $a + b$, je divise les deux membres par $\underline{a + b}$ ce qui se fait en divisant le premier membre par cette grandeur, & mettant x seul dans le second membre ainsi $\frac{2ab}{a + b} = x$ & par arrangement $x = \frac{2ab}{a + b}$ c'est la troisiéme valeur de x.

D'où il suit que dans ce problême il y a trois solu-

tions, puiſqu'il y a trois valeurs de x qui ſatisfont, & qui ſatisfont ſeules aux conditions propoſées, car on ne peut pas former d'autres équations pour avoir d'autres valeurs de x dont il y a trois valeurs de x, & par conſéquent pas davantage.

Réſolution en nombre.

Soit $a = 5$. $3 = b$. ſubſtituant ces valeurs à la place de ces lettres dans la premiére valeur $x = \frac{ab}{2a - b}$, j'ai $x = \frac{5 \times 3}{10 - 3} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

Dans la ſeconde valeur $x = \frac{ab}{2b - a}$, j'ai $x = \frac{5 \times 3}{6 - 5} = \frac{15}{1} = 15$.

Et dans la troiſiéme valeur $x = \frac{ab}{a + b}$, j'ai $x = \frac{2 \times 5 \times 3}{5 + 3} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Or ces trois nombres trouvez $2\frac{1}{7}$, 15, $3\frac{3}{4}$. ſatisfont tous également aux conditions propoſées dans le Problême, & ils ſatisfont ſeuls, parce qu'il eſt impoſſible d'en trouver d'autres qui puiſſent ſatisfaire à ces mêmes conditions.

Démonſtration.

1°. Je dis que le nombre entier 15 ſatisfait aux conditions propoſées, car prenant ſucceſſivement deux de ces trois nombres $\frac{a}{3}, \frac{b}{5}, \frac{x}{15}$, comme on voudra, en multipliant la ſomme des deux par le troiſiéme, j'aurai trois produits qui ſeront en progreſſion Arithmétique.

Car $3 + 5 = 8$, or $8 \times 15 = 120$. premier produit.
De même $3 + 15 = 18$, or $18 \times 5 = 90$. ſecond prod.

Pareillement $5+15=20$, or $20\times3=60$. 3me. prod.

Or ces trois produits 120, 90, 60, font en proportion Arithmétique, puisque l'exès du premier sur le second est 30, & l'excès du second sur le troisiéme est encore 30. puisque $120-90=30$, & $90-60=30$, or $30=30$, ce qu'il falloit trouver.

2°. Le nombre $2\frac{1}{7}$ satisfait aussi, car en prenant successivement deux à deux les trois nombres 5, 3, & $2\frac{1}{7}$ comme on voudra & multipliant la somme de deux de ces nombres par le troisiéme restant, on aura les trois produits $\frac{180}{7}$, $\frac{150}{7}$, $\frac{120}{7}$, qui sont encore en progression Arithmétique, puisque l'excès ou la différence est toujours de 30.

3°. Le nombre $3\frac{3}{4}$ satisfait encore, car prenant deux à deux les trois nombres 5, 3, & $3\frac{3}{4}$, comme on voudra, & multipliant leur somme par le troisiéme restant, on aura les trois produits $\frac{135}{4}$, $\frac{120}{4}$, $\frac{105}{4}$, qui sont encore en proportion Arithmétique, puisque leur excès ou leur différence est toujours 15.

Remarque. La résolution la plus élégante est celle des nombres entiers 3. 5. 15. celle des fractions est moins parfaite. Mais on peut avoir une infinité d'autres nombres entiers que ces trois premiers, qui donneront une infinité de solutions ou valeurs de x, car si je suppose $a=64$, & $b=140$, substituant ces nombres à la place des lettres dans les trois égalitez ci-dessus j'aurai trois autres valeurs de x; sçavoir, 60, 105, 420: mais pour avoir la suite infinie de tous les nombres qui peuvent donner différentes valeurs de x à l'infini, c'est une nouvelle condition ajoutée à ce Problême qui en change la nature & le rend indéterminé, au lieu que les conditions précédentes le rendoient déterminé; dans ce cas il faut se servir des regles particuliéres aux Problêmes

indéterminez

indéterminez qui seront expliquées dans la suite.

PROBLEME XI.

Trouver deux grandeurs inconnuës dont on connoît la somme & la différence.

1°. Je nomme ces deux grandeurs, sçavoir la plus grande x & la petite y.

Soit leur somme $= a$, & leur différence $= b$.

Donc j'ai deux rapports connus par les conditions du problême, le premier rapport connu est, que leur somme $= a$, ce qui donne la premiére équation $x + y = a$.

Le second rapport connu, est que leur différence $= b$, ce qui donne la seconde équation $x - y = b$.

Le problême est déterminé, puisque j'ai autant d'équations que d'inconnuës.

Le Résolution consiste à trouver la valeur de chacune de ces deux inconnuës x & y, ce qui se fait en dégageant d'abord x, ensorte qu'elle demeure seule dans le premier membre d'une équation, & que le second membre ne contienne que des valeurs inconnuës, qui seront la valeur de x.

De même, il faut dans une autre équation mettre y seule dans le premier membre, & que le second membre ne contienne que des valeurs connuës qui seront la valeur de y comme il suit.

2°. Dans la premiére équation $x + y = a$, j'ai par transposition $x = a - y$, voilà la premiére équation préparée.

De même dans la seconde équation $x = b + y$, j'ai par transposition $x = b + y$, voilà la seconde équation préparée.

3°. Je compare les seconds membres de ces deux

équations, dont je fais cette troisiéme équation $a - y = b + y$, qui donne par transposition $a - b = 2y$, & par arrangement j'ai $2y = a - b$, où l'inconnuë est dans le premier membre.

4°. Je divise ces deux membres par 2, ce qui donne $y = \frac{a-b}{2}$, c'est la valeur de y.

5°. Je substituë cette valeur de y en sa place dans l'une ou l'autre des deux premiéres équations préparées pour trouver la valeur de l'inconnuë x.

Or dans la substitution, je conserve les signes de la valeur de y, lorsque je mets sa valeur en la place de $+y$, c'est $+\frac{a-b}{2}$: mais au contraire, lorsque je substituë cette valeur en la place de la grandeur négative $-y$, je change les signes de sa valeur & décris $-\frac{a+b}{2}$, cette remarque est générale pour toutes les substitutions.

6°. Si je substituë la valeur de $y = \frac{a+b}{2}$ dans la seconde équation préparée $x = b + y$, j'aurai $x = b + \frac{a-b}{2}$, & pour abréger cette expression ou la rendre plus simple, j'ôte de l'entier b, la fraction $\frac{-b}{2}$, le reste donne $+\frac{b}{2}$, ce qui me donne l'expression plus simple $x = \frac{a+b}{2}$, & le problême est résolu.

Cette résolution générale en lettres donne toutes les résolutions possibles en nombres; il suffit de substituër des nombres à la place des lettres connuës. Exemple. Soit $a = 8$, $b = 2$, la substitution de ces nombres dans la formule $x = \frac{a+b}{2}$ donne $x = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$, donc $x = 5$.

La même substitution dans la valeur en lettres de y,

$y = \frac{a-b}{2}$ donne $y = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$, donc $y = 3$.

Donc les deux nombres cherchez sont $x = 5$, & $y = 3$, dont la somme $= a = 8$, & la différence $= b = 2$, ce qu'il falloit trouver.

7°. Pareillement si je substituë la valeur de $y = \frac{a-b}{2}$ dans la premiére équation proposée $x = a - y$.

Comme $-y$ est négatif, je change les signes de sa valeur $+\frac{a-b}{2}$ ce qui donne $-\frac{a+b}{2}$, & substitüant, j'ai $x = a - \frac{a+b}{2}$, je réduis par soustraction ce second membre à sa plus simple expression en retranchant la fraction $-\frac{a}{2}$ de l'entier a, le reste est $+\frac{a}{2}$ ainsi j'ai le second membre réduit à cette expression plus simple $+\frac{a+b}{2}$ c'est la valeur de x cherchée par l'autre maniére.

PROBLEME XII.

Deux nombres a *&* b *étant donnez, trouver un troisiéme nombre inconnu* x *qui soit en proportion harmonique avec les deux nombres donnez.*

La proportion harmonique est celle qui se trouve entre trois nombres comme 3, 4, 6, qui ont cette propriété; Sçavoir, que l'excès du moïen 4 sur le plus petit 7, est à 2, l'excès du plus grand 6 sur le moïen 4, comme le plus petit nombre 3 est au plus grand 6, car $3 : 6 :: 4 - 3 : 6 - 4$; c'est-à-dire $3 : 6 :: 1 : 2$. Cette proportion harmonique renferme la proportion géométrique, puisqu'on y considére l'équimultiplicité 6 qui est double de trois, & la différence 2, qui est double de la différence 1. elle renferme aussi la proportion Arithmétique, puisqu'on y considére l'égalité dans l'ex-

cès & dans la différence, car $4 - 3 = 1$, l'excés ou la différence est égale au tiers du plus petit nombre 3: de même $6 - 4 = 2$, est l'excès ou la différence égale au tiers du plus grand nombre 6.

Comme cette proportion se trouve dans les accords de la Musique, & qu'elle détermine le rapport de l'unisson à l'octave par le rapport de 3 à 6, le rapport de la quinte à l'octave par 4 à 6, & le rapport de la quarte par 3 à 4, on nomme cette proportion harmonique.

Or les nombres donnez sont a & b, le nombre inconnu x que l'on cherche renferme trois cas, car on peut chercher le plus petit des trois nombres, ou le plus grand, ou le moïen.

Premier cas. Pour trouver le plus petit nombre x, des trois, soit le moïen $= a$, & le plus grand $= b$, c'est x, a, b.

Donc par les conditions du problême, j'ai $x : b :: a - x : b - a$. ensuite multipliant les extrêmes & les moïens, j'ai l'équation $bx - ax = ab - bx$.

Par transposition je fais passer l'inconnuë du second membre dans le premier, & j'ai $bx - ax + bx = ab$, & abrégeant, j'ai $2bx - ax = ab$.

Pour dégager l'inconnuë x dans le premier membre, où elle se trouve multipliée par $2b - a$, je divise les deux membres par ce binôme, ce qui donne $x = \frac{ab}{2b - a}$ & le problême est résolu en lettres.

Résolution en nombres. Je substituë les nombres connus en la place des lettres. Exemple. Soit $a = 4$, $b = 6$, dans $x = \frac{ab}{2b - a}$ la substitution donne $x = \frac{4 \times 6}{2 \times 6 - 4}$ $= \frac{24}{12 - 4} = \frac{24}{8} = 3$. donc 3 est le plus petit nombre cherché.

Second cas. Pour trouver le nombre moïen x de la proportion harmonique, soit a le plus petit, & b le plus

grand, j'ai ces trois nombres, dans cet ordre a, x, b.

Donc par les conditions du problême j'ai $a : b :: x - a : b - x$, en multipliant les extrêmes & les moïens, j'ai $ab - ax = bx - ab$, ensuite par transposition $-ax - bx = -ab - ab$, en changeant tous les signes, j'ai $ax + bx = 2ab$.

Ensuite pour dégager l'inconnuë x & la laisser seule dans le premier membre, je divise tout par $a + b$ qui affecte ou multiplie l'inconnuë, ce qui donne $x = \frac{2ab}{a+b}$ & le problême est résolu en lettres.

Résolution en nombres. Soit $a = 3$. $b = 6$, substitüant ces valeurs dans $x = \frac{2ab}{a+b}$ j'ai $\frac{2 \times 3 \times 6}{3+6} = \frac{36}{9} = 4$. donc $x = 4$, c'est le nombre moïen cherché en proportion harmonique.

Troisiéme cas. Pour trouver le plus grand nombre x des trois qui sont en proportion harmonique dans cet ordre a, b, x. par les conditions du Problême, j'ai $a : x :: b - a : x - b$. ensuite multipliant les extrêmes & les moïens, j'ai $ax - ab = bx - ax$, & par transposition & addition $2ax - bx = ab$.

Pour dégager l'inconnuë & la laisser seule dans le premier membre, je divise tout par $2a - b$, ce qui donne $x = \frac{ab}{2a-b}$, & le Problême est résolu en lettres.

Résolution en nombres. Il faut dans ce troisiéme cas que $2a$ soit plus grand que b, autrement on ne pourroit le soustraire. Soit $a = 3$. $b = 4$.

Substitüant ces valeurs en la place des lettres dans $x = \frac{ab}{2a-b}$, j'ai $x = \frac{3 \times 4}{2 \times 3 - 4} = \frac{12}{6-4} = \frac{12}{2} = 6$. donc $x = 6$ est le plus grand des trois nombres de la proportion harmonique désiré.

PROBLEME XIII.

Un Pere fait son Testament avec plusieurs conditions.

1°. Il laisse mil écus à l'aîné de ses enfans avec la onziéme partie du reste, il laisse au second deux mil écus & la onziéme partie du reste, il laisse au troisiéme trois mil écus & la onziéme partie de ce qui reste, & ainsi de suite jusqu'au dernier qui a le reste de ses freres.

2°. Il se trouve après le partage qu'ils ont tous également ; on demande quel étoit le bien du Pere, le nombre de ses enfans, & la part de chacun ?

D'abord je nomme le legs de mil écus de l'aîné $= a$, soit b la onziéme partie de ce qui reste, & soit x le bien du Pere.

Suivant les conditions du problême, la part de l'aîné est $a + \frac{x - a}{b}$, ou bien convertissant l'entier a en une fraction de même dénomination, sans changer sa valeur $\frac{ab}{b}$ j'ai pour la part de l'aîné $\frac{ab + x - a}{b}$ j'ôte cette part du bien total du pere $= x$, le reste est $x - \frac{ab + x - a}{b}$ ensuite convertissant l'entier x en une fraction sans changer sa valeur pour en soustraire la fraction, j'ai $\frac{bx}{b}$ qui donne par soustraction $\frac{bx - ab - x + a}{b}$ c'est le premier reste.

Or sur ce premier reste le second fils prend deux mil écus $= 2a$, donc le second reste est $\frac{bx - ab - x +}{b} - 2a$ mais pour ôter cet entier $2a$ de la fraction qui le précéde, je le convertis en une fraction d'égale valeur qui ait le même dénominateur $-\frac{2ab}{b}$ ce qui donne $\frac{bx - ab - 2ab - x + a}{b}$ & par addition $\frac{bx - 3ab - x + a}{b}$ pour le second reste, &

la onziéme partie eſt $\frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$.

Donc la part du ſecond fils eſt $2a + \frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$ mais en réduiſant l'entier $2a$ en fraction qui ait le même dénominateur bb, c'eſt $\frac{2abb}{bb}$ qui eſt de même valeur que $2a$, & qui donne $\frac{2abb}{bb} + \frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$, ou ſimplement $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb}$.

Préſentement par la ſeconde condition du problême, la part de l'aîné eſt égale à la part du ſecond, donc $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb} = \frac{ab + x - a}{b}$ pour réduire au même dénominateur ces deux fractions, je multiplie les deux termes de la ſeconde par b, ce qui donne $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb} = \frac{abb + bx - ab}{bb}$, enſuite j'efface le dénominateur commun, ce qui donne l'équation ſans fractions $2abb + bx - 3ab - x + a = abb + bx - ab$, qu'il faut réſoudre.

D'abord je la prépare par tranſpoſition, en faiſant paſſer dans le premier membre toutes les grandeurs inconnuës, & dans le ſecond membre les grandeurs connuës en changeant leurs ſignes, ce qui donne $bx - bx - x = abb - 2abb - ab + 3ab - a$, enſuite ôtant par ſouſtraction les moindres grandeurs ſemblables des plus grandes, j'ai $-x = -abb + 2ab - a$, changeant tous les ſignes pour rendre l'inconnuë poſitive, j'ai $x = abb - 2ab + a$, & le problême eſt réſolu en lettres.

Réſolution en nombres. Puiſque par les conditions du problême $a =$ mil écus ou 1000, $b = 11$, donc $bb = 121$ & $abb = 1000 \times 121000$, & $2ab = 2 \times 11000 = 22000$, ſubſtitüant ces nombres en la place des lettres, dans la valeur de $x = abb - 2ab + a$.

J'ai $abb =$ 12 10 00
$-2ab = -$ 2 20 00

$+abb - 2ab =$ 9 90 00
$+a =$ 10 00

---

donc $x =$ 10 00 00

$+abb =$ 12. 10. 00.
$+a =$ 10. 00.

$+abb + a =$ 12. 20. 00.
$-2ab = -$ 2. 20. 00.

---

donc $x =$ 10. 00. 00. bien du Pere.
ôtez
$-a = -$ 10. 00. legs de l'aîné.

---

reste 9. 90. 00.
sa $\frac{1}{11} =$ 0. 90. 00. $= \frac{ab + x - a}{b}$

$= \frac{11.000 + 10.00.00. - 10.00.}{11.}$

ou $+$ 10. 00. 00. $= x$
$+$ 1. 10. 00. $= ab$

$= +$ 11. 10. 00. $= ab + x$
$-a = -$ 10. 00.

$= + \frac{11.00.00.}{11} - \frac{ab + x - a}{b} = 90.00.$

Or le legs de l'aîné . . 10. 00.
plus la $\frac{1}{11}$ partie du reste 0. 90. 00.

Total de la part de l'aîné 1. 00. 00.
dix mil écus.

On

Ou bien je dis ſimplement le bien total du pere eſt $x = 100.\ 00.\ 0$, = cent mil écus, dont j'ôte la part de l'aîné égale à dix mil écus ; ſçavoir mil écus pour ſon legs, & neuf mil écus pour la onziéme partie du reſte. puiſque de cent mil écus, ôtant mil écus, le reſte eſt quatre-vingt-dix-neuf mil écus, dont la onziéme partie eſt neuf mil écus, donc la part de l'aîné eſt dix mil écus, & il reſte quatre-vingt-dix mil écus pour les autres enfans.

Sur quoi le ſecond fils prend deux mil écus pour ſon legs, il reſte quatre-vingt-huit mil écus, dont la onziéme partie eſt huit mil écus, donc la part du cadet eſt de dix mil écus, & par conſéquent égale à la part de ſon aîné.

Or ôtant dix mil écus de quatre-vingt-dix mil écus, il reſte quatre-vingt mil écus pour les autres enfans.

Sur quoi le troiſiéme enfant prend ſon legs de trois mil écus, il reſte ſoixante & dix-ſept mil écus, dont il prend encore la onziéme partie qui font ſept mil écus, ce troiſiéme fils a dix mil écus, & reſte pour les autres enfans ſoixante & dix mil écus.

Continuant ainſi la diviſion du reſte, en prenant d'abord un legs de mil écus plus fort pour chacun des enfans ſuivans & la onziéme partie du reſte ; je trouve enfin, 1°. que le bien du pere eſt de cent mil écus, 2°. qu'il y a dix enfans, 3°. qu'ils ont chacun dix mil écus & voilà toutes les conditions du Problême propoſé, ce qu'il falloit trouver.

Calcul.

Le bien total du pere		10.	00.	00.
j'ôte le legs de l'aîné	. . .		10.	00.
premier reſte	. . .	9.	90.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$	. . .		90.	00.

2[d]. reſte	. . .	9.	00.	00.
j'ôte le legs du 2[d]. fils	. . .		20.	00.
3[e]. reſte	. . .	8.	80.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$	. . .		80.	00.
4[e]. reſte	. . .	8	00.	00.
j'ôte le legs du 3[e]. fils	. . .		30.	00.
5[e]. reſte	. . .	7.	70.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ partie	. . .		70.	00.
6[e]. reſte	. . .	7.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 4[e]. fils	.		40.	00.
7[e]. reſte	. . .	6.	60.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ partie	. . .		60.	00.
8[e]. reſte	. . .	6.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 5[e]. fils	.		50.	00.
9[e]. reſte	. . .	5.	50.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ partie	. . .		00.	00.
10[e]. reſte	. . .	5.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 6[e]. fils	.		60.	00.
11[e]. reſte	. . .	4.	40.	00
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$	. . .		40.	00.
12[e]. reſte	. . .	4.	00.	00.
j'ôte le legs du 7[e]. fis	. . .		70.	00.
13[e]. reſte	. . .	3.	30.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$	. . .		30.	00.
14[e]. reſte	. . .	3.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 8[e]. fils	.		80.	00.

15^e. reſte	. . .	2.	20.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$	. . .		20.	00.
16^e. reſte	. . .	2.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 10e. fils.			90.	00.
17e. reſte	. . .	1.	10.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$	. . .		10.	00.
18e. reſte	. . .	1.	10.	00.
dont j'ôte le legs du 10e. fils.		1.	10.	00.
19e. reſte	. . .	0.	00.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ eſt	. . .		0.	

D'où il ſuit que le dixiéme des enfans a préciſément dix mil écus, par conſéquent ſa part eſt égale à celle de l'aîné, & tous les enfans ont également, cependant il n'a qu'un legs, & il ne peut avoir la onziéme partie du reſte, puiſqu'il ne reſte rien.

Remarque premiére. On peut réſoudre de la même maniére une infinité de Problêmes. Or le nombre des perſonnes qui partagent également eſt toujours égal au dénominateur moins un de la fraction qui exprime le premier reſte, ici ce dénominateur eſt $b = 11$, or $11 - 1 = 10$, c'eſt le nombre des enfans, c'eſt auſſi la racine quarrée du bien total du pere $= x = 100$ mil écus, en prenant mil écus pour l'unité.

Remarque ſeconde. Le legs des enfans croît toujours de l'unité depuis l'aîné juſqu'au dixiéme, c'eſt la progreſſion des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. ce qui fait que le dixiéme n'a ſeulement que ſon legs de dix mil écus, & n'a point le $\frac{1}{11}$ du reſtant, puiſqu'il reſte zero ou rien, cependant ſa part eſt égale à celle des autres enfans qui ont un legs particulier joint à la onziéme partie du reſtant dans le bien du pere.

Des égalitez simples qui ont trois inconnuës.

PROBLEME XIII.

Trouver trois grandeurs x, y, z, *en nombres avec ces conditions.*

1°. Que le premier nombre x avec la moitié des deux autres $= 25$.

2°. Que le second nombre y avec le tiers des deux autres x & $y = 26$.

3°. Que le troisiéme nombre z, avec la moitié des deux autres x & $y = 29$.

Par les conditions du Problême, j'ai les trois égalitez ou équations suivantes.

Premiére égalité. $x + \frac{y+z}{2} = 25$.

Seconde . . . $y + \frac{x+y}{3} = 26$.

Troisiéme égalité $z + \frac{x+y}{2} = 29$.

D'abord pour ôter les fractions de chacune de ces équations, je multiplie les deux termes par le dénominateur de la fraction, ce qui me donne les trois égalitez suivantes réduites sans fractions.

$2x + y + z = 50$. premiére égalité réduite.
$3y + x + z = 78$. seconde égalité réduite.
$2z + x + y = 29$. troisiéme égalité réduite.

Ensuite je choisis l'une de ces égalitez ou équations qui puisse me donner par transposition une valeur de l'une des inconnuës, par exemple, je trouve que la premiére me donne par transposition $y = 50 - 2x - z$, c'est la premiére valeur de y, que je nomme la premiére

égalité ou équation dérivée, que j'écris à part pour y avoir recours.

Par regle générale, je ſubſtituë cette valeur de y dans les deux autres égalitez réduites pour avoir autant d'égalitez dérivées comme il ſuit.

La ſubſtitution de cette valeur dans la ſeconde égalité réduite donne $\underline{150 - 6x - 3z} + x + z = 78$, ſeconde égalité dérivée.

La même ſubſtitution dans la troiſiéme égalité réduite donne $2z + x + \underline{50 - 2x - z} = 58$, c'eſt la troiſiéme égalité dérivée.

Enſuite je prépare ces trois égalitez dérivées, ainſi la ſeconde égalité dérivée donne par ſouſtraction $150 - 5x - 2z = 78$, laquelle par tranſpoſition donne $150 - 78 = 5x + 2z$, & par ſouſtraction $27 = 5x + 2z$, & par arrangement mettant les inconnuës dans le premier membre, j'ai $5x + 2z = 27$, c'eſt la ſeconde égalité dérivée préparée.

Je prépare de même la troiſiéme égalité dérivée, $2z + x + 50 - 2x - z = 58$, par ſouſtraction j'ai d'abord $z - x + 50 = 58$, & par tranſpoſition & ſouſtraction $z - x = 58 - 50 = 8$, ou $z - x = 8$, & enfin par tranſpoſition pour dégager z & la laiſſer ſeule dans le premier membre, j'ai $z = 8 + x$, c'eſt une valeur de la troiſiéme inconnuë z, mais encore inconnuë en partie.

Préſentement je ſubſtituë cette valeur de z dans la ſeconde égalité dérivée & préparée $5x + 2z = 72$, la ſubſtitution donne $5x + 16 + 2x = 72$, par tranſpoſition j'ai $5x + 2x = 72 - 16$, & par addition j'ai $7x = 56$, pour dégager l'inconnuë, je diviſe tout par 7 multiplicateur de l'inconnuë, j'ai $x = \frac{56}{7}$ or $\frac{16}{7} = 8$, donc $x = 8$, c'eſt la valeur trouvée de la premiére inconnuë, entiérement connuë.

Je ſubſtituë cette valeur entiérement connuë de x dans

l'égalité $z = x + 8$, qui est une valeur de z en partie inconnuë, ce qui donne $z = 8 + 8$, ou $z = 16$, c'est la valeur de la troisiéme inconnuë, qui est entiérement connuë.

Enfin pour avoir la valeur de y seconde inconnuë, je substituë ces valeurs trouvées de x & de z, 8 & 16 dans la premiére équation dérivée $y = 50 - 2x - z$, ce qui donne $y = 50 - 16 - 16$, ou $y = 50 - 32$, or $50 - 32 = 18$, donc $y = 18$, c'est la valeur entiérement connuë de y; par conséquent les trois grandeurs x, y, z, sont entiérement connuës, $x = 8$, $y = 18$, $z = 16$, donc le Problême est entiérement résolu en lettres.

Or substituant ces valeurs dans les trois premiéres égalitez, 1°. $x + \frac{y+z}{2} = 25$, donne $8 + \frac{18+16}{2} = 25$ ou $8 + 9 + 8 = 25$, 2°. $y + \frac{x+z}{3} = 26$, donne $18 + \frac{8+16}{3} = 26$, ou $18 + \frac{24}{3}$ ou $18 + 8 = 26$, 3°. $z + \frac{x+z}{2} = 29$, donne $16 + \frac{8+18}{2} = 29$, ou $16 + \frac{26}{2} = 16 + 13 = 29$; voilà une résolution entiére & parfaite qui peut servir de modéle pour tous les Problêmes semblables.

PROBLEME XIV.

Pour trois grandeurs inconnuës.

Trouver trois grandeurs inconnuës x, y, z, *avec ces conditions.*

1°. Qu'ajoutant une grandeur connuë a à la premiére inconnuë x, la somme soit égale à la somme des deux autres inconnuës y & z.

2°. Qu'ajoutant la même grandeur connuë a à la seconde inconnuë y, la somme soit égale au produit des deux autres inconnuës x, y, z, multipliée par une autre grandeur connuë b.

3°. Qu'ajoutant la même grandeur connuë a à la troisiéme inconnuë z, elle soit égale au produit des deux autres inconnuës x & y, multipliées par une troisiéme grandeur connuë c.

Le Problême est déterminé, puisqu'il n'y a que trois inconnuës x, y, z, & que je puis former par les conditions du Problême les trois équations ou égalitez suivantes.

Equations formées suivant les conditions du Problême.

1re. . . $x + a = y + z$.
2de. . . $y + a = bx + bz$.
3e. . . $z + a = cx + cy$.

Après avoir formé ainsi ces trois égalitez ou équations suivant les conditions proposées, il s'agit de trouver la valeur de chacune des trois inconnuës, x, y, z, comme il suit.

D'abord dans la premiére égalité $x + a = y + z$, j'ai par transposition $x = y + z - a$, c'est une premiére valeur de x.

Dans la seconde égalité $y + a = bx + bz$, j'ai par transposition $y = bx + bz - a$, c'est une premiére valeur de y.

Dans la troisiéme égalité $z + a = cx + cy$, j'ai par transposition $z = cx + cy - a$, c'est une premiére valeur de z.

Ces trois valeurs ne sont pas entiérement connuës, puisqu'elles sont mêlées de grandeurs connuës & d'inconnuës dans le second membre, pour avoir promtement une valeur de chacune de ces inconnuës, dans une égalité dont le second membre ne contienne que des gran-

deurs entiérement connuës, je compare ensemble ces trois égalitez comme il suit.

1°. Je cherche la valeur de la premiére inconnuë x. Or dans la premiére égalité $x + a = y + z$, j'ai par transposition $x = y + z - a$, c'est une premiére valeur de x, que j'écris à part en A, puisqu'elle n'est pas entiérement connuë, & je mettrai au dessous toutes les autres valeurs de x que je trouverai.

Valeurs de x mises à part.

A . . . . $x = y + z - a$. premiere valeur de x

B . . . . $x = \frac{y+a}{b} - z$. seconde valeur de x.

C . . . . $x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$. troisiéme valeur de x.

2°. Dans la seconde égalité $y + a = bx + bz$, en renversant l'ordre des membres, & mettant par arrangement le premier en la place du second, & le second en la place du premier, j'ai $bx + bz = y + a$, & par transposition laissant seule l'inconnuë x, j'ai $bx = y + a - bz$, pour dégager x je divise tout par b qui la multiplie, ce qui donne $x = \frac{y+a}{b} - z$, c'est une seconde valeur de x que j'écris à part en B.

3°. dans la troisiéme égalité $z + a = cx + cy$, j'ai par arrangement $cx + cy = z + a$, & par transposition $cx = z + a - cy$, pour dégager x qui est affectée ou multiplié par c, je divise tout par c, ce qui donne $x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$, c'est la troisiéme valeur de x que j'écris à part vers C.

4°. Pour comparer ensemble ces trois différentes valeurs de x, que je nomme les premiéres égalitez, il faut en former des égalitez ou équations, que je nomme les secondes égalitez, dans l'ordre & la maniére qui suit.

D'abord je prends en A le second membre de la premiére

miere valeur de x dont je fais le premier membre d'une nouvelle ou ſeconde égalité, & pour ſecond membre je prends en B le ſecond de la ſeconde valeur de x. ce qui me donne la premiére des ſecondes égalitez $y + z - a = \frac{y+a}{b} - z$, j'ai par tranſpoſition $2z - \frac{y}{b} + y = \frac{a}{b} + a$, dont le ſecond membre ne contient que des grandeurs toutes connues.

Je réduis ce ſecond membre à ſa plus ſimple expreſſion, de cette ſorte de l'entier a je fais une fraction ſans changer ſa valeur en le multipliant par le dénominateur b de la fraction $\frac{a}{b}$, & lui donnant le même dénominateur b, ce qui donne la plus ſimple expreſſion $\frac{ab+a}{b}$ pour le ſecond membre.

Pour réduire le premier membre à ſa plus ſimple expreſſion, je multiplie l'entier y par b dénominateur de la fraction $\frac{y}{b}$ & lui donnant le même dénominateur b pour avoir la plus ſimple expreſſion $+ \frac{by-y}{b}$.

Par ce moïen j'ai l'équation ou l'égalité réduite à ſa plus ſimple expreſſion $2z + \frac{by-y}{b} = \frac{ab+a}{b}$, c'eſt la premiére des ſecondes égalitez abrégées.

5°. Je compare de même la premiére valeur de x avec la troiſiéme, c'eſt-à-dire, j'en forme une égalité en prenant leurs ſeconds membres en A & en C, ce qui donne $y + z - a = \frac{z}{c} - y \frac{a}{c}$, qui donne par tranſpoſition $2y + z - \frac{z}{c} = \frac{a}{c} + a$.

Puiſqu'il y a encore des entiers & des fractions exprimées par les mêmes lettres y & a, je les réduis à leur plus ſimple expreſſion de cette ſorte.

Analyſe.

Dans le premier membre, de l'entier y je fais une fraction sans changer sa valeur en le multipliant au numérateur par le dénominateur c de la fraction $\frac{z}{c}$ & lui donnant ce même dénominateur c, ce qui donne la plus simple expression $\frac{cz - z}{c}$.

Dans le second membre, je réduis de même l'entier a & la fraction $\frac{a}{c}$ à leur simple expression $\frac{ac + a}{c}$ ce qui donne l'équation réduite à sa plus simple expression $2y + \frac{cz - z}{c} = \frac{ac + a}{c}$, c'est la seconde des secondes égalitez ou équations abrégées.

Les secondes égalitez ou équations abrégées sont.

D . . $2z + \frac{by - y}{b} = \frac{ab + a}{b}$. La premiére des secondes.

E . . $2y + \frac{cz - z}{c} = \frac{ac + a}{c}$. La seconde des secondes.

6°. Il faut dégager l'inconnuë y dans ces égalitez, qui sont en D & E.

Or la premiére en D donne par transposition $\frac{by - y}{b} = \frac{ab + a}{b} - 2z$, pour faciliter l'opération je convertis l'entier du second membre $+ 2z$ en fraction sans changer sa valeur, ce qui se fait en le multipliant au numérateur par le dénominateur b de la fraction, qui sera aussi son dénominateur commun, ainsi $\frac{ab + a - 2bz}{b}$, ce qui donne $\frac{by - y}{b} = \frac{ab + a - 2bz}{b}$ ensuite effaçant dans les deux membres le dénominateur commun b, j'ai $by - y = ab + a - 2bz$, ou $by - 1 = - 2bz + ab + a$.

Pour dégager l'inconnuë y, je divise tout par $b - 1$ qui

affecte ou multiplie cette inconnuë, ce qui donne $y = \frac{-2bz+ab+a}{b-1}$. C'est la premiére valeur de y trouvée, que j'écris à part en N ci-dessous sous le titre des Equations mises à part; & je mets en tête en M la premiére valeur de x trouvée d'abord, en partie inconnuë.

Equations mises à part.

M . . . $x = y + z - a$. La premiére des valeur de x:

N . . . $y = \frac{-2bz+ab+a}{b-1}$ La 1re. valeur de y.

O . . . .

Pour avoir une seconde valeur de y, j'opére de même sur la seconde ou derniére des secondes égalitez E, $2y + \frac{cz-z}{c} = \frac{ac+a}{c}$. dans laquelle je trouve par transposition $2y = \frac{ac+a-cz-z}{c}$

Pour ôter les fractions du second membre, je multiplie tout par le dénominateur c, ce qui donne

$2cy = ac + a - cz - z$.

Présentement pour dégager l'inconnuë y qui est affectée ou multipliée par $2c$, je divise tout par ce multiplicateur $2c$, ce qui donne $y = \frac{-cz-z+ac+a}{2c}$ c'est la seconde valeur de y.

7°. Puisque j'ai deux valeurs de y, sçavoir:

$$y = \frac{-2bz+ab+a}{b-1}$$

$$y = \frac{-cz-z+ac+a}{2c}$$

Pour les comparer je forme une égalité ou équation des seconds membres de ces deux valeurs différentes, & j'ai

$$\frac{-2bz+ab+a}{b-1} = \frac{-cz-z+ac+a}{2c}$$

Il n'y a plus que la ſeule inconnuë z dans cette égalité, je renverſe l'ordre des deux membres par arrangement & j'ai $\frac{-cz - z + ac + a}{2c} = \frac{-2bz + ab + a}{b - 1}.$

Pour ôter les fractions, je multiplie chaque numérateur par le dénominateur de l'autre fraction, & j'efface enſuite chaque dénominateur.

Ainſi effaçant le dénominateur $2c$ du premier membre, & multipliant ſon numérateur par $b-1$ qui eſt le dénominateur du ſecond membre, j'ai d'un côté pour le premier membre.

$$\left\{ \begin{array}{l} -bcz + bz + abc + ab \\ +1cz - 1z - 1ac - 1a \end{array} \right.$$

De l'autre côté j'efface le dénominateur $b-1$ du ſecond membre, & je multiplie ſon numérateur par $2c$ qui eſt le dénominateur du premier membre, ce qui donne pour le ſecond membre

$$-4bcz + 2abc + 2ac.$$

De ces deux produits je forme l'égalité ſuivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} -bcz + bz + abc + ab \\ +1cz - 1z - 1ac - 1a \end{array} \right\} =$$
$$= -4bcz + 2abc + 2ac.$$

Enſuite par tranſpoſition, je fais paſſer dans le premier membre toutes les grandeurs où ſe trouve l'inconnuë z, qui eſt la ſeule qui ſe trouve dans cette égalité, & je fais paſſer dans le ſecond membre toutes les grandeurs qui ſont entiérement connuës, & qui ſont dans le premier membre en leur donnant des ſignes contraires, & j'écris dans une colonne verticale les unes ſous les autres les grandeurs qui affectent z, & les mêmes gran-

deurs ou les ſemblables qui ſont exprimées par les mêmes lettres comme il ſuit.

$$\begin{array}{l} +4bcz = +2abc + 2ac \\ -\ bcz\ \ -\ abc - 1ac - 1ab + 1a \\ +\ bz \\ +\ 1cz \\ -\ 1z. \end{array}$$

Dans cette égalité j'efface de chaque membre les grandeurs ſemblables qui ſe détruiſent par des ſignes contraires, & j'ajoûte dans une ſomme les grandeurs ſemblables qui ont le même ſigne, ce qui donne

$$\begin{array}{l} +3bcz = +abc - 1ab + 3ac + 1a. \\ +\ bz \\ -\ 1z \end{array}$$

Pour dégager l'inconnuë bz dans cette derniére égalité, je diviſe les deux membres par les grandeurs qui affectent ou multiplient l'inconnuë z, ce qui me donne $z = \frac{abc - 1ab + 3ac + a}{3bc + b + c - 1}$ c'eſt la valeur toute connuë de z trouvée; puiſque dans cette égalité le ſecond membre ne contient que des grandeurs connuës.

8°. Pour trouver par le moyen de cette valeur de z, la valeur de la ſeconde inconnuë y je ſubſtituë cette valeur de z dans l'équation miſe à part ci-devant en N, c'eſt, $y = \frac{-2bz + ab + a}{b - 1}$, la ſubſtitution donne

$$y = \frac{-2b}{b-1} \times \frac{abc + 3ac - 1ab + a}{3bc + b + c - 1} + \frac{ab + a}{b - 1}$$

$$\text{ou } y = \frac{-2b \times \frac{ab + 3ac - 1ab + a}{3bc + b + c - 1} + ab + a}{b - 1}$$

Voilà trois fractions dans cette valeur de y, dont il faut

trouver la ſomme réduite, il faut donc les réduire d'abord au même dénominateur, en multipliant en croix comme il ſuit.

En premier lieu, je multiplie tout par le dénominateur commun $b - 1$ de la premiére & de la troiſiéme fraction, en l'effaçant ſimplement dans ces deux fractions; en ſecond lieu, je multiplie par le numerateur $2b$ de la 1re. fraction le numerateur de la ſeconde fraction qui eſt la valeur de z, c'eſt-à-dire, $+abc + 3ac - 1ab + a$

$$\times - 2b$$

Le premier produit eſt $- 2ab^2c - 6abc + 2ab^2 - 2ab$.

En troiſiéme lieu, je multiplie le dénominateur de la ſeconde fraction par le numerateur de la troiſiéme fraction, c'eſt-à-dire,

$$\begin{array}{l} +3bc + b + c - 1 \\ \times + ab + a. \\ \hline +3ab^2c + ab + abc - 1ab \\ \qquad\qquad +3abc + ab + ac - 1a. \\ \hline \end{array}$$

Le ſecond produit eſt $+ 3ab^2c + ab^2 + 4abc + ac - 1a$.

Je fais une ſomme de ces deux produits, abrégeant l'expreſſion par l'addition & la ſouſtraction des grandeurs ſemblables.

Premier produit.. $- 2ab^2c + 2ab^2 + 6abc - 2ab$
Second produit.. $+ 3ab^2c + ab^2 + 4abc$ * $+ ac - 1a$

Somme abregée.. $+ ab^2c + 3ab^2 - 2abc - 2ab + ac - 1a$

C'eſt la valeur des produits de la ſeconde fraction ou valeur de z multipliée par les numerateurs des deux autres fractions.

En quatriéme lieu, je divise cette somme par $b - 1$ dénominateur commun de la premiére & de la troisiéme fraction qui a été effacée d'abord, cette division se fait comme il suit.

Diviseur	*Dividende*
$+b-1$	$+ab^2c - 2abc + 3ab^2 - 2ab + ac - 1a.$
Quotiens . .	*Produits, restes & nouveaux Dividendes.*
$+abc$ . .	$+ab^2c - 1abc$. 1er. produit à ôter.
	o $-1abc : +3ab^2$ 1er. reste, & 2d. Dividende.
$-1ac$ . .	. . . . . . $-1abc + 1ac$. 2d. produit à ôter.
	o $-1ac : +3ab^2 - 2ab$ 2d. reste & 3me. produit.
$+3ab$ . .	. . . . $+3ab^2 - 3ab$. 3me produit.
	3me reste, $-1ac$ . . . o $+ab : +ac - 1a$. J'abrege ce reste, retranchant les grandeurs semblables qui ont des signes contraires, $+1ac - ac = 0$. ce qui donne l'expression simple du 3me. reste, ... $+ab - 1a$.
$+a$ . . .	4me. produit à ôter $+ab - 1a$.
o	4me & dernier reste. o. . . o

Donc le quotient est $+abc - ac + 3ab + a$, c'est

le numerateur d'une fraction à qui je donne le dénominateur de la seconde fraction ci-dessus valeur de z qui est $3bc + b + c - 1$, & cette derniére fraction qui suit est la valeur des trois fractions précedentes & la véritable valeur de y toute connuë

$$y = \frac{+abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1}$$

Maintenant pour avoir la valeur toute connuë de la premiére inconnuë x, je fais une somme des valeurs toutes connuës de z & de y que je viens de trouver ; mais comme elles sont des fractions qui ont le même dénominateur commun ; il suffit d'ajoûter ensemble les numerateur pour avoir leur somme

$$z = \frac{abc - ab + 3ac + a}{3bc + b + c - 1.}$$

$$y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1.}$$

or $abc - ab + 3ac + a.$

& $abc + 3ab - ac + a.$

somme $= 2abc + 2ab + 2ac + 2a.$

Je substituë cette somme dans la premiére valeur de x mise à part ci-dessus en M qui est $x = y + z - a$ en la place des deux inconnuës y, z, ce qui donne

$$x = \frac{2abc + 2ab + 2ac + 2a}{3bc + b + c - 1} - a.$$

Or pour ajoûter dans une somme l'entier $-a$, avec la fraction, je change cet entier en une fraction de même valeur en la multipliant par le dénominateur de la fraction.

$$+3bc+b+c-1$$
$$x-a$$

Produit $-3abc-ab-ac+a.$
$2abc+2ab+2ac+2a.$

J'ajoûte à ce produit le numerateur de la fraction.

La somme $-1abc+ab+ac+3a$ sera le numerateur de la fraction suivante qui sera la véritable valeur de x puisque le second membre de l'égalité ne contient que des grandeurs connuës, avec le dénominateur commun des valeurs de y & z, comme il suit.

$$x=\frac{-abc+ab+ac+3a}{3bc+b+c-1}$$

Ainsi le Problême est entiérement résolu en lettres, puisque j'ai trouvé les valeurs des trois inconnuës.

1re. inconnuë $x=\frac{-abc+ab+ac+3a}{3bc+b+c-1}$

2de. inconnuë $y=\frac{abc+3ab-ac+a}{3bc+b+c-1}$

3me. inconnuë $z=\frac{abc-ab+3ac+a}{3bc+bc+-1}$

Résolution en nombres.

Soit $a=10$, $b=2$, $c=3$.
Donc $ab=20$, $abc=60$. $3bc=18$. $bc=6$. & $ac=30$. en substituant ces nombres en la place des lettres, j'ai pour la valeur de la premiére inconnuë x.

$$x=\frac{-60+20+30+30}{18+2+3-1}=\frac{80-60}{23-1}=\frac{20}{22}=\frac{10.}{11}$$

Donc $x=\frac{10}{11}$.

Analyse.

Pour la ſeconde inconnuë y, j'ai par la ſubſtitution

$$y = \frac{60 + 60 - 30 + 10}{18 + 2 + 3 - 1} = \frac{130 - 30}{13 - 1} = \frac{100}{22} = \frac{50}{11}$$
$$= 44 + 6.$$

Donc $y = 4 + \frac{6}{11}$.

Pour la troiſiéme inconnuë z, j'ai par ſubſtitution,

$$z = \frac{60 - 20 + 90 + 10}{28 + 2 + 3 - 1} = \frac{160 - 20}{23 - 1} = \frac{140}{22} = \frac{70}{11}$$
$= 66 + 4 = 6 + \frac{4}{11}$, donc $z = 6 + \frac{4}{11}$.

Enfin donc $x = \frac{10}{11}$, $y = 4 + \frac{6}{11}$, & $z = 6 + \frac{4}{11}$.

Remarque. On peut réſoudre de la même maniére tous les Problêmes où il y a trois inconnuës: mais ſi l'on veut trouver ces réſolutions en nombres entiers, ce qui eſt plus élégant, c'eſt une nouvelle condition qui change la nature du Problême, car alors il devient indéterminé, puiſqu'on ne peut former dans ce cas autant d'équations qu'il contient d'inconnuës. (Nous verrons dans le livre ſuivant les régles pour réſoudre ces ſortes de Problêmes indéterminez), au lieu que dans le cas préſent on peut former autant d'équations par les conditions propoſées qu'il y a d'inconnuës, ce qui fait que le Problême propoſé eſt déterminé.

PROBLEME XV.

Pour trois grandeurs.

On demande trois grandeurs inconnuës x, y, z, *avec ces conditions.*

1°. Que la premiére $x + a = y + z$.
2°. Que la ſeconde $y + a = x + bz$.
3°. Que la troiſiéme $z + a = cx + cy$.

On ſuppoſe que les lettres a, b, c, expriment des grandeurs connuës, c'eſt encore l'exemple précédent

dont les opérations qui ſont dans le détail ci-devant, ſont abrégées ici.

Donc par tranſpoſition j'ai
les trois premiéres égalitez.

$x = y + z - a$

$x = \frac{y}{b} - z - \frac{a}{b}$

$x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$

Egalitez miſes à part.

$x = y + z - a$

$y = \frac{-2bz + ab + a}{b - 1}$

Je compare la premiére de ces valeurs de x avec les deux autres, ce qui donne les trois égalitez ſuivantes que je nomme les ſecondes égalitez.

$2z + \frac{by - y}{b} = \frac{ab + a}{b}$

$2y + \frac{cz - z}{c} = \frac{ac + a}{c}$, je dégage y dans ces deux égalitez, & j'ai $y = \frac{-2bz + ab + a}{b - 1}$.

Et $y = \frac{-cz + z + ac + a}{2c}$

Je compare ces deux valeurs de y, dont je forme l'égalité $\frac{-2bz + ab + a}{b - 1} = \frac{-cz + z + ac + a}{2c}$, dans laquelle dégageant z; j'ai $z = \frac{abc + 3ac - ab + a}{3bc + b + c - 1}$.

Je ſubſtituë cette valeur de z dans la valeur de y miſe à part $y = \frac{-bz + ab + a}{b - 1}$, j'abrége enſuite la valeur trouvée par la ſubſtitution, & je trouve $y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1}$

Enſuite je ſubſtituë les valeurs toutes connuës que je viens de trouver de z & de y dans l'équation miſe à part $x = y + z - a$, je trouve par la ſubſtitution une grandeur très-compoſée, & après l'avoir abrégée, je trouve enfin $x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + a + c - 1}$

Le Problême est résolu, & les valeurs des trois inconnuës sont

$$x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + a + c - 1}$$

$$y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + a + c - 1}$$

$$z = \frac{abc - ab + 3ac + a}{3bc + a + c - 1}$$

Pour résoudre en nombres ce Problême, si je suppose $a = 10$, $b = 2$, $c = 3$, j'aurai $x = \frac{10}{11}$, $y = 4\frac{6}{11}$ & $z = 6\frac{4}{11}$.

PROBLEME XVI.

Pour quatre inconnuës.

Trouver quatre grandeurs inconnuës v, x, y, z, *avec ces conditions.*

1°. Que la somme composée des trois premiéres inconnuës soit égale à la somme de la quatriéme ajoûtée à une premiére grandeur connuë a.

2°. Que la somme composée de la premiére grandeur, de la seconde & de la quatriéme, soit égale à la somme composée de la troisiéme y & d'une seconde grandeur connuë b.

3°. Que la somme composée de la premiére, de la troisiéme & de la quatriéme, soit égale à la somme composée de la seconde x, & d'une troisiéme grandeur connuë c.

4°. Que la somme composée des trois derniéres inconnuës soit égale à la somme composée de v, & d'une quatriéme grandeur connuë d.

1°. Par les conditions du Problême j'ai les quatre premiéres égalitez suivantes.

Premiéres égalitez

1°. $v + x + y = z + a$.

2°. $v + x + z = y + b$.

3°. $v + y + z = x + c$.

4°. $x + y + z = u + d$.

Les premiéres égalitez mises à part.

A . . . $v = z - x - y + a$.

B . . . $2z = 2y - a + b$.

C . . . $2z = 2x - b + c$.

2°. Je prends la valeur de l'une ou l'autre de ces inconnuës dans l'une des premiéres égalitez ; dans cet exemple je prends la valeur de v dans la premiére égalité $v + x + y = z + a$, j'ai par transposition $v = z - x - y + a$, c'est une valeur de x que j'écris à part vers A.

3°. Je sustituë cette valeur de v dans les trois autres égalitez, dans la seconde $v + x + z = y + b$, j'ai par substitution $x + z + z - x - y + a = y + b$, & par addition & soustraction $2z - y + a = y + b$, & par transposition $2z - 2y + a = b$, & encore par transposition $2z = 2y - a + b$; c'est la premiére des secondes égalitez, que j'écris à part vers B ci-dessus, je l'écris encore ci-dessous vers D.

Secondes égalitez abrégées.

D . . . $2z = 2y - a$

E . . . $2y = 2x - a + c$

F . . . $2x + 2y = a + d$.

Dans la troisiéme des premiéres égalitez $v + y + z = x + c$, j'ai par substitution $y + z + z - x - y + a = x + c$, & par addition, soustraction & transposition, j'ai $2z - 2x + a = c$, ou $2z = 2x - a + c$, c'est la seconde des secondes égalitez abrégées que j'écris vers E.

Dans la quatriéme des premiéres égalitez $x + y + z = v + d$, je substituë la premiére valeur de v, la substitution donne $x + y + z = d + z - x - y + a$, par transposition, addition & soustraction, j'ai $2x + 2y = a + d$, c'est la troisiéme des secondes égalitez abrégées que j'écris vers F.

4°. Je prends la valeur de l'une des inconnuës dans l'une des trois égalitez abrégées ; ici je prends la premiére en D. $2z = 2y - a + b$, c'est une valeur de z que j'écris à part ci-dessus vers B.

5°. Je substituë cette valeur de z dans les autres des secondes égalitez abrégées où elle se trouve, comme ici dans la seconde vers E. . . $2z = 2x - a + c$, la substitution donne $2y - a + b - 2x + a = c$, dans laquelle j'efface $- a + a$ qui se détruisent par des signes contraires, & j'ai $2y + b - 2x = c$. c'est la premiére des troisiémes égalitez abrégées que j'écris ci-dessous vers G, & j'écris au-dessous vers H, la troisiéme des secondes égalitez qui est en F, où l'inconnuë z ne se trouve point, ce qui donne pour les troisiémes égalitez abrégées les deux suivantes.

Troisiémes égalitez abrégées.

G . . . $2y + b - 2x = c$.

H . . . $2x + 2y = a + d$.

6°. Je prends la valeur d'une inconnuë de l'une de ces troisiémes égalitez abrégées, ici je prends la premiére vers G. $2y + b - 2x = c$, j'ai par transposition $2y = 2x - b + c$, c'est une valeur de $2y$ que

j'écris vers C entre les premiéres égalitez miſes à part.

7°. Je ſubſtituë cette valeur de $2y$ dans la derniére des ſecondes égalitez abrégées vers F. $2x + 2y = a + d$. La ſubſtitution donne $2x + 2x - b + c = a + d$, j'ai par tranſpoſition & addition $4x = b - c + a + d$, dont le ſecond membre ne contient que des grandeurs connuës.

Pour dégager l'inconnuë x dans le premier membre, je diviſe tout par 4, ce qui donne $x = \frac{b - c + a + d}{4}$ c'eſt la valeur de x trouvée en nombres connus.

8°. Enſuite je reprends les égalitez miſes à parr vers A, B, C, dans leſquelles je ſubſtituë cette valeur de x, pour la faire évanoüir & trouver par ſon moïen la valeur des autres inconnuës, comme il ſuit.

Je prends l'égalité miſe à part vers C. $2y = 2x - b + c$ qui n'a que deux inconnuës x & y, la ſubſtitution chaſſe $2x$ & donne $2y = \frac{a + b - c + d}{2} - b + c$.
pour réduire le ſecond membre à une expreſſion plus ſimple, je réduis les entiers $- b + c$ à une fraction de même valeur qui ait le dénominateur commun 2, c'eſt $\frac{-2b + 2c}{2}$ qu'il faut ſouſtraire de la fraction précédente, le reſte eſt $\frac{a - b + c + d}{2}$ ce qui donne $2y = \frac{a - b + c + d}{2}$, enſuite je diviſe tout par 2 pour dégager l'inconnuë, & j'ai $y = \frac{a - b + c + d}{4}$, c'eſt la valeur de y trouvée.

Je ſubſtituë cette valeur de y dans l'égalité miſe à part en B, c'eſt $2z = 2y - a + b$, la ſubſtitution donne $2z = \frac{a - b + c + d}{2} - a + b$; j'abrége ce ſecond membre en ôtant par ſouſtraction la partie de la fraction $\frac{+a - b}{2}$ des entiers exprimez par les mêmes lettres $- a + b$, le reſte $\frac{-a + b}{2}$, donne $2y = \frac{-a + b + c + d}{2}$

pour dégager l'inconnnuë, je divise tout par 2, en multipliant seulement le dénominateur $2 \times 2 = 4$, ce qui donne $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$, c'est la valeur de z toute connuë.

Enfin je substituë les valeurs entiérement connuës que je viens de trouver des trois inconnuës x, y, z dans la premiére des égalitez mises à part vers A, qui est $v = z - x - y + a$, la substitution donne

$$v = \frac{-a+b+c+d}{4} - \frac{b-c+a+d}{4} - \frac{a-b+c+d}{4}$$
$+ a.$

Pour abréger ce second membre, je réduis l'entier $+a$ dans une fraction de même valeur en le multipliant par le dénominateur 4, qui sera aussi son dénominateur ainsi $\frac{4a}{4}$. ainsi le second membre est

$$\frac{-a+b+c+d}{4} - \frac{b-c+a+d}{4} - \frac{a-b+c+d}{4} + \frac{4a}{4}.$$

Pour le réduire à sa plus simple expression, j'efface partout le dénominateur 4 qui est commun à toutes ces fractions; je fais ensuite une somme des numérateurs positifs ou procédez du signe $+$; & une seconde somme des numérateurs négatifs ou procédez du signe $-$

$+ + 4a$

$+ - a + b + c + d$

Somme $+ 3a + b + c + d$

$- + a + b - c + d$

$- + a - b + c + d$

Somme $+ 2a \quad 0 \quad 0 + 2d$. des numérateurs négatifs.

De la somme des positifs $+ 3a + b + c + d.$
J'ôte la somme des négatifs $- + 2a \quad 0 \quad 0 + 2d.$

Reste

Reste $+1a+b+c-d$.

Ce reste est la valeur de l'inconnuë v réduite à la plus simple expression, en lui donnant le dénominateur commun 4. c'est $v = \frac{a+b+c-d}{4}$

Le Problême est entiérement résolu, puisqu'on a trouvé les valeurs des quatre inconnuës v, x, y, z, qui sont les quatre égalitez suivantes.

$$v = \frac{a+b+c-d}{4}$$
$$x = \frac{a-b-c+d}{4}$$
$$y = \frac{a-b+c+d}{4}$$
$$z = \frac{-a+b+c+d}{4}$$

Soit $a = 4$. $b = 8$. $c = 16$. $d = 24$.
On aura par substitution

$v = 13$.
$x = 13 - 16 = -3$.
$y = 13 - 8 = 5$
$z = 13 - 4 = 9$

Il est facile de résoudre ce Problême en nombres, en déterminant les valeurs des quatre lettres connuës a,b,c,d, & substituant leurs valeurs dans les quatre égalitez trouvées pour les valeurs des inconnuës.

AVIS.

Comme cet exemple est assez composé, les commençans y trouveront le détail des opérations qui les accoutumeront peu à peu à mettre en pratique les regles du *Analyse*. P

calcul dans les occaſions, & comme on peut réſoudre les Problêmes par des voyes différentes, nous réſoudrons encore celui-ci par deux autres Méthodes afin d'exciter la ſagacité, & nous réduirons en forme de regle chacune de ces Méthodes après l'opération, & les régles quoique réduites en peu de mots ſeront plus aiſée à concevoir, ſi l'on poſſéde le détail de l'opération qui la précéde.

REGLE. PREMIERE METHODE.

Cette Régle exprime ce qui eſt contenu en détail dans la réſolution du 16e. Problême.

1°. J'écris autant d'égalitez qu'il y a de rapports connus dans le Problême entre les grandeurs connuës & les inconnuës, & je les nomme les premiéres égalitez.

2°. J'écris à part vers A une de ces premiéres égalitez qui donne par tranſpoſition la valeur d'une des inconnës, enſuite je ſubſtituë cette valeur de l'une des inconnuës dans les autres premiéres égalitez où ſe trouve la même inconnuë, alors cette inconnuë ne s'y trouve plus. J'écris à part vers D, ces nouvelles égalitez abrégées, avec leſquelles j'écris les égalitez où cette même inconnuë n'étoit pas, s'il s'en trouve quelques-unes.

3°. Entre ces ſecondes égalitez abrégées vers D, j'en prends une qui me donne la valeur d'une inconnuë qu'elle contient, mais différente de la premiére inconnuë qui a été évanoüie dans l'opération précédente. Je ſubſtituë cette valeur dans les ſecondes égalitez abrégées où elle ſe trouve, ce qui donne des troiſiémes égalitez abrégées, où cette ſeconde inconnuë ne ſe trouve plus.

J'écris à part vers G ces troiſiémes égalitez abrégées, je les nomme abrégées (car par la ſubſtitution il ſe trouve ſouvent des expreſſions compoſées qu'il faut abréger pour la réduire aux moindres termes ou à la plus ſimple ex-

preſſion,) & s'il y a quelque égalité où cette inconnuë ne ſoit point je l'écris au-deſſous.

4°. Après avoir dégagé de ſuite par cette Méthode toutes les inconnuës excepté la premiére, dont j'ai d'abord trouvé une valeur par une égalité, dont le ſecond membre contient encore d'autres inconnuës, je reprends dans un ordre contraire toutes les égalitez miſes à part, & j'en chaſſe les inconnuës en ſubſtitüant à leur place leurs valeurs trouvées par les opérations précédentes, & j'ai ſoin dans chaque ſubſtitution d'abréger l'expreſſion pour la rendre plus ſimple; par ce moyen je trouve d'abord une égalité dont le ſecond membre eſt composé ſeulement de grandeurs connuës, c'eſt une valeur exacte de l'inconnuë qui eſt ſeule dans le premier membre, la ſubſtitution me donne de même ſucceſſivement la valeur de toutes les autres inconnuës, ce qui donne la réſolution du Problême.

SECONDE METHODE.

Pour réſoudre le même Problême 16e. qui contient quatre grandeurs inconnuës.

1°. Je forme les quatre premiéres égalitez pour les quatre grandeurs inconnuës v, x, y, z, ſuivant les conditions du Problême.

Premiéres égalitez.

$$v + x + y = z + a$$
$$v + x + z = y + b$$
$$v + y + z = x + c$$
$$x + y + z = v + d.$$

Egalitez mises à part.

$$A \ldots v = z - x - y + a$$

$$B \ldots 2z = 2y - b - a$$

$$C \ldots 2x = 2y + b - c$$

2°. Je prends toutes les valeurs d'une même inconnuë choisie à volonté, comme ici v, dans toutes les premiéres égalitez où elle se trouve, & j'en écris une à part ci-dessus vers A. Or dans cet exemple toutes les valeurs de v se trouvent par la seule transposition, comme il suit.

Les différentes valeurs de v.

$$v = z + a - x - y$$

$$v = y + b - x - z$$

$$v = x + c - y - z$$

$$v = d - y - z.$$

3°. Pour comparer ensemble ces differentes valeurs de v qui sont égales, je les prends deux à deux que je joints par le signe d'égalité, ce qui donne les trois égalitez suivantes.

$$z + a - x - y = y + b - x - z$$

$$y + b - x - z = x + c - y - z$$

$$x + c - y - z = d - y - z$$

Je les réduis à leur plus simple expression par transposition & par addition pour avoir les secondes égalitez abrégées qui suivent.

Secondes égalitez abrégées.

$$2z - 2y = b - a$$

$$2z - 2x = c - a$$

$$2x + 2y = a + d$$

Comme ces trois égalitez abrégées contiennent toutes les autres inconnuës, excepté la premiére qui eſt v, elles ſuffiſent pour réſoudre le Problême, & toutes les autres égalitez qu'on pourroit former ſur les autres valeurs de v ſont inutiles.

4°. Dans ces ſecondes égalitez abrégées, je prends toutes les valeurs d'une même inconnuë comme de z, dans les égalitez où elle ſe rencontre, j'ai donc ces deux égalitez.

$$2z = 2y + b - a$$

$$2z = 2x + c - a$$

J'écris une de ces derniéres égalitez à part vers B.

Je compare enſemble ces deux valeurs de z; c'eſt-à dire je forme de leurs ſeconds termes une égalité abrégée $2x - 2y = b - c$, c'eſt la premiére des troiſiémes égalitez abrégées, à laquelle j'ajoûte celles des ſecondes égalitez ou z ne ſe trouve point.

Troiſiémes égalitez abrégées.

$$2x - 2y = b - c$$

$$2x + 2y = a + d$$

5°. Je dégage l'inconnuë x dans ces deux derniéres égalitez, ce qui me donne pour $2x$ deux valeurs différentes.

$2x = 2y + b - c$. Et $2x = a + d - 2y$.

J'écris à part une de ces égalitez vers C, ensuite je forme une égalité de ces deux valeurs de $2x$, je les abrége en les réduisant à leur plus simple expression, & j'ai $4y = a - b + c + d$, où il n'y a qu'une seule inconnuë dans le premier membre, je dégage l'inconnuë en divisant tout par 4, ce qui donne $y = \frac{a - b + c + d}{4}$ c'est la valeur de y toute connuë.

6°. Je substituë cette valeur de y dans les égalitez mises à part vers A, B, C, pour avoir les valeurs des trois autres inconnuës x, z, v, comme il suit.

Dans l'égalité mise à part vers C. $2x = 2y + b - c$, puisque y est multipliée par 2, je multiplie sa valeur par 2, c'est $\frac{a - b + c + d}{2}$ ce qui donne $2x = \frac{a - b + c + d}{2}$. $+ b - c$, il faut réduire ce second membre à sa plus simple expression en ôtant par addition ou par soustraction des entiers $+ b - c$ la fraction semblable $\frac{- b + c}{2}$, le reste est $\frac{+ b - c}{2}$ donc $2x \frac{+ b - c}{2}$ & divisant tout par 2 pour dégager l'inconnuë x, j'ai $x = \frac{a + b - c + d}{4}$

De même substitüant la valeur de $2y$ dans l'égalité mise à part vers B., $2z = 2y + b - a$, j'ai $2z = \frac{a - b + c + d}{2} + b - a$, je réduis ce second membre à sa plus simple expression comme ci-dessus, puisque les lettres a & b se trouvent dans les entiers & dans la fraction, ce qui donne $2z = \frac{- a + b + c + d}{2}$.

Je dégage l'inconnuë z en multipliant le dénominateur $2 \times 2 = 4$, ce qui est une véritable division qui donne $z = \frac{- a - b + c + d}{4}$.

Pareillement en substitüant la valeur trouvée des trois inconnuës z, x, y dans la premiére des égalitez mises

à part vers A . . $v = z - x - y + a$, la ſubſtitution donne $v = \frac{-a+b+c+d}{4} - \frac{a+b-c+d}{4} - \frac{a-b+c+d}{4}$ $+ a$.

Pour réduire ce ſecond membre à ſa plus ſimple expreſſion de l'entier $+ a$, je fais une fraction de même valeur qui a le dénominateur commun 4, c'eſt $+ \frac{4a}{4}$ de la ſorte ce ſecond membre ne contient que des fractions qui ont toutes le même dénominateur commun, j'efface & j'opére ſur les ſeuls numérateurs dont je cherche la ſomme.

Numérateurs des fractions poſitives.

$$\begin{array}{lrrrr} & +4a & & & \\ & +a & +b & +c & +d \\ \hline \text{Somme} & +3a & +b & +c & +d \end{array}$$

Numérateurs des fractions négatives.

$$\begin{array}{rrrr} +a & +b & -c & +d \\ +a & -b & +c & +d \\ \hline +2a & 0 & 0 & +2d \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr} \text{De la premiére ſomme} & +3a & +b & +c & +d \\ \text{J'ôte la ſeconde ſomme} & +2a & 0 & 0 & +2d \\ \hline \text{Reſte} & +a & +b & +c & -d \end{array}$$

Ce reſte eſt le numérateur, ſon dénominateur eſt 4 dénominateur commun, ce qui donne la valeur de v, $v = \frac{a+b+c-d}{4}$ & le Problême eſt entiérement réſolu.

Les valeurs des quatre grandeur sinconnuës sont.

$$v = \frac{a + b + c - d}{4}$$

$$x = \frac{a + b - c + d}{4}$$

$$y = \frac{a - b + c + d}{4}$$

$$z = \frac{-a + b + c + d}{4}$$

En nombres.

Soit $a = 4$. $b = 8$. $c = 16$. $d = 24$.

La ſubſtitution donnera

$v = 13$.
$x = 13 - 16 = -3$
$y = 13 - 8 = 5$
$z = 13 - 4 = 9$

Régle abrégée pour la ſeconde Méthode.

1°. Je prends toutes les valeurs d'une même inconnuë dans toutes celles des premiéres égalitez où elle ſe trouve, & j'en écris une à part vers A.

2°. Je compare toutes ces valeurs deux à deux, en formant de chacune un membre d'une nouvelle égalité, j'ai par ce moïen les ſecondes égalitez où cette inconnuë ne ſe trouve plus, & j'y ajoûte les égalitez où elle n'étoit point s'il y en a.

3°. J'opére ſur les ſecondes égalitez comme j'ai fait ſur les premieres pour en chaſſer une ſeconde inconnuë, & je continuë de la ſorte juſqu'à ce que je trouve une égalité où il n'y ait qu'une ſeule inconnuë.

4°. Je prends la valeur de cette ſeule inconnuë, & je la

la ſubſtituë dans celles des Equations miſes à part où elle ſe trouve avec une ſeule autre inconnuë que je fais évanoüir par ce moyen. Je continuë de même juſqu'à ce que j'aye les valeurs de toutes les inconnuës.

Enfin pour réduire cette régle en peu de mots; il ſuffit de trouver la valeur d'une inconnuë, la ſubſtitüer où cette inconnuë ſe trouve ſeule avec une ſeconde inconnuë; on aura par ce moyen la valeur de la ſeconde inconnuë.

De même ſubſtitüant les valeurs de la premiére & de la ſeconde inconnuë dans une égalité où elles ſe trouvent avec une troiſiéme, on aura la valeur de la troiſiéme inconnuë; continuant ainſi on trouvera les valeurs de toutes les inconnuës.

TROISIE'ME METHODE

Pour réſoudre le même Probleme 16ᵉ. où il y a quatre grandeurs inconnuës.

Quelque fois on trouve facilement par la tranſpoſition ou par une autre préparation ſimple la valeur toute connuë de chacune des inconnuës, enſuite ſoit en ajoutant ſeulement enſemble, ou deux, ou pluſieurs valeurs d'une même inconnuë priſes dans les premiéres égalitez, ſoit en ôtant par ſouſtraction une valeur d'une autre, ou pluſieurs valeurs de la même répétée autant de fois dans l'un des membres, qu'il y a de valeurs différentes dans l'autre membre.

1°. Dans cet exemple, j'ai par les conditions du Problême les quatre premiéres égalitez ſuivantes,

Premiéres égalitez formées par les conditions du Problême.

$$v + x + y = z + a$$
$$v + x + z = y + b$$
$$v + y + z = x + c$$
$$x + y + z = v + d$$

De ces premiéres égalitez, je tire par tranſpoſition toutes les valeurs de la premiére inconnuë dont je forme une colonne pour en avoir une ſomme. je fais la même choſe pour chacune des quatre inconnuës, ce qui me donne quatre ſommes, comme il ſuit.

Valeurs de v.

$$v = z - x - y + a$$
$$v = y - x - z + b$$
$$v = x - y - z + c$$
$$v = x + y + z - d$$

Somme abrégée.

$$4v = a + b + c - d$$

Valeur de x diviſant tout par 4.

J'ai $v = \frac{a + b + c - d}{4}$

Valeurs de y.

$y = z - v - x + a$

$y = v + x + z - b$

$y = x - v - z + c$

$y = v - x - z + d$

Somme abrégée.

$4y = a - b + c + d$

Donc divisant tout par 4, j'ai

$y = \frac{a - b + c + d}{4}$

C'eſt la valeur de y.

Valeurs de x.

$x = z - v - y + a$

$x = y - v - z + b$

$x = y + v + z - c$

$x = -y + v - z + d$

Somme abrégée.

$4x = a + b - c + d$

Valeurs de x.

Diviſant tout par 4.

J'ai $x = \frac{a + b - c + d}{4}$

Valeurs de z.

$z = v + x + y - a$

$z = y - v - x + b$

$z = x - v - y + c$

$z = v - x - y + d$

Somme abrégée.

$4z = -a + b + c + d$

Donc divisant tout par 4, j'ai

$$z = \frac{-a + b + c + d}{4}$$

C'est la valeur de z.

Les quatre valeurs de chacune des inconnuës contiennent les autres inconnuës qui se détruisent par des signes contraires, c'est pourquoi elles ne paroissent point dans la somme qui se trouve composée des seules grandeurs connuës dans son second terme, ce qui donne la véritable valeur de l'inconnuë, ainsi ces quatre sommes donnent la valeur des quatre inconnuës & une parfaite solution du Problême; il est facile d'avoir la même solution en nombres, il suffit de substituer en la place de ces lettres connuës leurs valeurs.

Remarque premiére.

On trouve toujours en lettres connuës la valeur de chacune des inconnuës, en joignant dans une somme toutes ses valeurs trouvées par simple transposition; on l'a trouvée par ce moïen dans cet exemple, parce

qu'entre les quatre valeurs de chacune des inconnuës, par exemple dans les valeurs de x, les trois autres inconnuës s'y trouvent autant de fois avec le ſigne + & autant de fois avec le ſigne —, ce qui fait que les trois autres inconnuës ſe détruiſent par des ſignes contraires, & diſparoiſſent dans le ſecond membre de la ſomme qui ne contient que des grandeurs connuës.

Dans tout autre cas où cela ne ſe peut faire, il faut prendre d'un côté une valeur répétée deux fois, & d'un autre côté deux autres valeurs, pour les comparer enſemble en formant une égalité dans laquelle toutes les inconnuës, excepté une ſeule puiſſent ſe détruire par des ſignes contraires, ce qui donnera la valeur de cette inconnuë reſtante; enſuite opérant de même & ſuſtituant cette valeur en la place de ſon inconnuë, on trouvera la valeur d'une ſeconde inconnuë, & continüant par ſubſtitution, on trouvera les valeurs de toutes les inconnuës propoſées, & par conſéquent la réſolution du Problême.

Remarque ſeconde.

Si en comparant pluſieurs valeurs d'une même inconnuë, on met une de ſes valeurs dans les deux membres d'une égalité, on la mettra dans le ſecond membre avec des ſignes contraires à ceux qu'elle a dans le premier membre pour conſerver l'égalité.

Remarque troiſiéme.

Lorſqu'on n'a pû former par les conditions du Problême autant de premiéres égalitez qu'il y a d'inconnuës, alors le Problême eſt indéterminé, & c'eſt une marque qu'il a pluſieurs réſolutions, il peut même en avoir une infinité; c'eſt ce que nous expliquerons en ſon lieu.

Au contraire lorſqu'on a formé ſuivant les conditions

du Problême plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnuës, alors il y a de l'art à choisir entre les valeurs celles qui étant substituées ne tombent pas dans l'impossible. Ce sont des Problêmes plus que déterminez dont nous traiterons ci-aprés.

Remarque quatriéme.

Pour abréger la résolution des Problêmes, on se sert de quelques-uns des rapports connus entre les grandeurs pour diminüer le nombre des inconnuës, ce qui diminuë le nombre des égalitez.

On se sert aussi des propriétez des lignes & des figures de la géométrie.

SECTION DEUXIE'ME.

Des Problêmes déterminez de tous les degrez,

Ou des Equations composées de tous les degrez à l'infini.

DAns cette section j'explique l'origine & les principes des Equations. 1°. Comment les Problêmes déterminez qui se réduisent à une seule inconnuë donnent des équations composées de tous les degrez à l'infini.

2°. Je donne la maniére la plus simple & la plus naturelle de former les équations pour connoître mieux la nature de leurs racines, & les trouver avec plus de facilité.

3°. J'explique dans le détail les équations, & toutes leurs parties.

4°. Je donne les moïens de préparer les équations, ou

de les réduire à la forme la plus ſimple & la plus commode pour les réſoudre.

5°. J'explique en quoi conſiſte en général la réſolution des Equations.

1°. DE L'ORIGINE DES EQUATIONS,

Ou comment les Problêmes déterminez produiſent les Equations de tous les degrez à l'infini.

Définition. Les Problêmes déterminez ſont ceuxqui ſe réduiſent à une ſeule égalité dans laquelle il n'y a qu'une ſeule inconnuë.

Si cette inconnuë eſt au premier degré comme $x = a$, alors cette équation eſt du premier degré, & elle eſt réſoluë, puiſque a eſt une grandeur connuë, donc x qui lui eſt égal eſt connuë auſſi.

Mais ſi en pratiquant les régles expliquées dans la ſection précédente pour réſoudre un Problême, il ſe réduit à deux ou trois égalitez, où il n'y a à la vérité qu'une ſeule inconnuë, mais élevée à différens degrez, par exemple ; je ſuppoſe que pour réſoudre un Problême propoſé dont les conditions donnent autant de rapports que de grandeurs inconnuës, ce qui le rend déterminé, j'ai formé les premiéres égalitez ſur leſquelles j'ai formé les premiéres opérations néceſſaires pour faire évanoüir toutes les inconnuës hors la premiére x, & que j'ai trouvé enfin le Problême réduit aux deux égalitez ſuivantes A & B, dans leſquelles l'inconnuë x eſt ſeule, mais élevée à différens degrez.

La premiére A . . . $x^2 - y^2 = \frac{1}{3} p$.

La ſeconde B . . . $x + 3 x y^2 = \frac{1}{2} q$,

1°. Pour réduire ces deux égalitez à une équation ſeule, j'ôte d'abord les fractions en élevant la premiére

… à la troisiéme puissance, dont l'exposant 3 … dénominateur 3 de la fraction du second mem- … ce qui donne l'équation C . . . $x^6 - 3x^4y^2$ … $- y^6 = \frac{1}{27}p^3$.

J'ôte ensuite la fraction de l'équation B, en l'é- levant à la seconde puissance, dont l'exposant 2 est égal au dénominateur 2 de la fraction du second membre $\frac{1}{2}q$, ce qui donne l'équation D . . . $x^6 + 6x^4y^2 + 9x^2y^4$ … $\frac{1}{4}qq$.

… J'ôte l'équation D de l'équation C, ce qui se fait en changeant d'abord les signes de tous les termes de l'équation C, & les ajoûtant aux termes correspondans de l'équation D, ce qui donne l'Equation E.

E . . . $9x^4y^2 + 6x^2y + y^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$.

4°. Je tire la racine quarrée de chaque membre de l'équation, c'est $3xy + y = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$.

5°. J'ajoûte à cette racine la seconde équation ci-dessus B . . . $x^3 + 3xy^2 = \frac{1}{2}q$. La somme est

F. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$

dont le premier membre est la troisiéme puissance parfaite de $x + y$, & par conséquent l'équation résultante F est du troisiéme degré.

6°. Je tire la racine cubique de chacun des deux membres de l'équation F, ce qui donne l'équation simple.

G. . $x + y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}qq + \sqrt[2]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, qui est

la premiére racine de l'équation du troisiéme degré F, qui résulte des deux équations A & B qui ont été trouvées par la préparation expliquée dans la section précédente sur les conditions du Problême proposé, & le Problême est résolu : car comme on le verra dans la suite, cette premiére racine servira à diviser l'é- quation

quation, & le quotient qui en viendra sera une équation du second degré dont on trouvera de même les deux racines, comme il sera expliqué dans la suite.

2°. *Formation simple & naturelle des Equations.*

Lorsqu'un Problême se réduit enfin à une équation où l'inconnuë est élevée à différens degrez, pour la résoudre il en faut trouver les racines, mais les opérations qu'on a faites pour en venir là, ne font point découvrir ces racines & n'en donnent aucune idée, on ne voit aucune liaison entre les opérations & la formation de cette équation, qui en résulte comme par hazard, & que l'on trouve d'ailleurs la même par des routes très-différentes; or pour trouver les racines de l'équation qui en sont les élémens, il faut avoir une idée claire de la maniére la plus simple & la plus naturelle dont elle se forme, c'est par la multiplication de ces racines comme il suit.

Pour former une équation du second degré, je prends une équation simple du premier degré $x - a = 0$, dont le premier membre est un binôme qui contient l'inconnuë x & sa valeur positive $- a$, & le second membre contient le zéro seul, je multiplie cette équation simple par elle-même, le produit $x^2 - 2ax + aa = 0$, est une équation du second degré, dont le premier membre est la seconde puissance parfaite du binôme $x - a$, puisque le premier terme x^2 est le quarré de x, que le dernier terme aa est le quarré de a, & que le terme moïen $2ax$ contient deux fois le produit de a par x.

Premier Exemple.

$$
\begin{array}{l}
x - a = 0 \\
\times\, x - a = 0, \\
\hline
x^2 - ax \\
\quad - ax + aa = 0 \\
\hline
x^2 - 2ax + aa = 0.
\end{array}
$$

Je peux de même former une équation par deux racines positives ou négatives, mais dans ce cas j'ai une équation du second degré, dont le second membre est une seconde puissance imparfaite.

Second Exemple.

$$
\begin{array}{l}
x - a = 0 \\
\times\, x - b = 0 \\
\hline
x^2 - ax \\
\quad - bx + ab = 0.
\end{array}
$$

Si a surpasse b, le produit ab du dernier terme est moindre que le quarré aa, quarré de la plus grande valeur a de l'une des racines, mais ce produit ab est plus grand que le quarré bb, quarré de b, la plus petite valeur des deux racines.

De même je peux par trois racines semblables, ou par la même multipliée deux fois, ou par la multiplication de trois racines différentes former une équation du troisiéme degré.

Troisiéme Exemple.

$$x - a = 0$$
$$\times\, x - a = 0$$

$$x^2 - ax$$
$$- ax + aa = 0$$

$$x^2 - 2ax + aa = 0$$
$$\times\, x - a = 0$$

$$x^3 - 2ax^2 + aax$$
$$- ax^2 + 2aax - a^3 = 0.$$

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0.$$

Equation du troisiéme degré, qui contient une troisiéme puissance parfaite de $x - a = 0$.

Quatriéme Exemple.

$$x - a = 0.$$
$$\times\, x - b = 0.$$

$$x^2 - ax$$
$$- bx + ab = 0$$

$$\times\, x - c$$

$$x^3 - ax^2 + abx$$
$$- bx^2 + acx$$
$$- cx^2 + bcx - abc = 0.$$

Equation du troisiéme degré, qui contient une troisiéme puissance imparfaite de chacune des trois racines.

Dans le troisiéme exemple, la multiplication réïterée deux fois de la même racine $x - a = 0$, donne au produit une équation du troisiéme degré dont le premier membre est la troisiéme puissance parfaite de cette racine $x - a = 0$. Le dernier terme a^3 le découvre du premier coup d'œil, puisqu'il est le cube de a.

Mais dans le quatriéme exemple le dernier terme abc n'est point un cube parfait, mais seulement un produit de trois dimentions, ou de trois grandeurs différentes; ainsi le premier membre de cette équation est une troisiéme puissance imparfaite, qui est moindre que le cube de chacune des deux plus grandes racines, mais qui surpasse le cube de la plus petite de ces trois racines; ce qui est évident dans le cinquiéme exemple où les valeurs des racines sont exprimées par des nombres. Soit $a = 4$. $b = 3$. $c = 2$. ce qui donne les trois équations simples $x - 4 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 2 = 0$.

Cinquiéme Exemple.

$$
\begin{array}{l}
x - 4 = 0 \\
\times x - 3 = 0 \\
\hline
x^2 - 4x \\
\quad - 3x + 12 = 0 \\
\hline
x^2 - 7x + 12 = 0 \\
\times x - 2 = 0 \\
\hline
x^3 - 7x^2 + 12x \\
\quad - 2x + 14x - 24 = 0 \\
\hline
x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.
\end{array}
$$

Dans les équations en lettres, le dernier terme qui eſt le produit abc des trois racines les découvre par ſon expreſſion; mais cette expreſſion n'eſt qu'une formule ou une regle abrégée, qui marque en général ce qui eſt contenu dans les équations numeriques. Ainſi cela m'apprend que dans le produit 24. contenu dans le dernier terme de l'équation du troiſiéme degré, du cinquiéme exemple, $24 = abc$; or dans 24 je n'apperçois aucune des valeurs 4, 3, 2 de ces racines. Ce produit 24 n'eſt pas un cube, mais un troiſiéme puiſſance imparfaite; or 24 eſt moindre que 64 cube de 4, & 24 eſt encore moindre que 27 cube de 3, mais 24 ſurpaſſe 8 cube de 2.

De même dans les équations du ſecond degré contenuës dans le quatriéme & le cinquiéme exemple, le dernier terme ab eſt le produit de a multiplié par b, dont les racines paroiſſent dans l'expreſſion en lettres; mais dans le nombre 12 qui eſt le dernier terme, je ne vois point 4 multiplié par 3. Mais 12. n'eſt pas un quarré, c'eſt une ſeconde puiſſance imparfaite moindre que 16. quarré de la valeur 4 de la plus grande racine, mais plus grande que 9 quarré de 3 valeur de la plus petite des deux racines.

DES EQUATIONS EN GENERAL.

De leurs degrez, de leurs eſpéces & de leur formation.

Définition. Je nomme une équation, toute égalité dont le ſecond membre contenant zéro ſeul, le premier membre contient une puiſſance ou parfaite ou imparfaite d'une égalité du premier degré dont le ſecond membre contient zéro ſeul, & dont le premier membre contient un binôme quelconque $x \pm a$, compoſé d'une inconnuë ſimple & de ſa valeur exprimée en nombres ou en lettres connuës, comme $x \pm a = 0$, $x \pm 4 = 0$.

Cette définition convient aux équations de tous les degrez à l'infini ; cela est évident pour les équations du second & du troisiéme degré dans les exémples précedens ; il suffit d'en former dans les autres degrez supérieurs pour en être convaincu. La même définition convient aussi aux équations simples du premier degré comme $x - 2 = 0$, $x - a = 0$; car quoi qu'on ne puisse pas former la premiére par la multiplication de $x - 1 = 0$, ni en multipliant $x - 1 = 0$ par $x - 2 = 0$. On peut cependant la former par la multiplication du binôme. $\sqrt{x} - \sqrt{2}$, *car* $\sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$$\times\ \sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$$

$$x - \sqrt{x}\sqrt{2}$$

$$+ \sqrt{x}\sqrt{2} - 2 = 0$$

produit. $x - 2 = 0$.

de même $\sqrt{x} - \sqrt{a} = 0$

$$\times\ \sqrt{x} + \sqrt{a} = 0$$

$$x - \sqrt{x}\sqrt{a}$$

$$+ \sqrt{x}\sqrt{a} - a = 0.$$

produit. $x - a = 0$.

Autrement. Une équation composée d'un degré quelconque est le produit qui résulte de la multiplication d'une équation simple du premier degré multipliée, ou par elle-même ou par une autre équation du même degré.

Il suit de là 1°. que l'équation simple du premier degré est la racine ou l'élément de toute équation d'un degré plus élevé. Or il faut deux conditions essentielles dans une équation du premier degré pour être la racine ou l'élément des autres équations. 1° Il faut que son premier membre contienne l'inconnuë x avec sa valeur exprimée par un nombre ou par une lettre connuë. 2°. Il faut que le second membre contienne le zéro seul, sans cela on ne pourroit former l'équation ; car l'inconnuë ne pourroit représenter les valeurs de chacune des racines, ce qui est essentiel.

Il suit de là 2°. qu'une équation formée par la multiplication réïterée d'une équation seule du premier degré, comme de $x \pm a = 0$, contient toujours une puissance parfaite du même binôme $x \pm a$.

Au contraire, lorsque l'équation est formée par la multiplication de deux équations différentes ou de trois, &c. alors l'équation qui en résulte contient une puissance imparfaite qui est toujours plus grande que la puissance parfaite de la valeur de la plus petite des racines, mais qui est moindre que la même puissance parfaite de chacune des valeurs des autres racines.

Des différens degrez des équations à l'infini.

On distingue les équations comme les puissances par différens degrez à l'infini; il y en a du premier degré, du second degré, du troisiéme, du quatriéme degré, &c. à l'infini. L'exposant de l'inconnuë du premier terme qui est toujours la plus haute puissance de l'inconnuë dans l'équation, en marque le degré par ses unitez.

Cet exposant marque aussi par ses unitez le nombre des racines de l'équation, c'est-à-dire, des équations simples qui entrent dans sa formation; ainsi dans le second degré il y a deux racines, dans le troisiéme il y en a trois, &c.

Si de cet exposant on retranche l'unité, on aura aussi le nombre des multiplications dont l'équation est formée. L'équation du second degré a 2 pour exposant, j'en retranche 1, le reste 1 marque qu'il y a une multiplication d'une racine par une autre: de même l'exposant du troisiéme degré est 3 dont je retranche 1, le reste 2 marque qu'il faut deux multiplications pour former l'équation du troisiéme degré, & ainsi des autres.

Des espéces différentes des équations dans chaque degré.

Dans le premier degré toutes les équations sont simples ; il n'y en a donc qu'une seule espéce : mais dans le second, le troisiéme, le quatriéme degré & dans tous les degrez supérieurs à l'infini toutes les équations sont composées, mais on les distingue en deux espéces, sçavoir les équations pures & simples, & les équations affectées de termes moïens, qu'on appelle aussi en ce sens les équations composées, quoiqu'elles soient toutes équations composées dans les degrez supérieurs à commencer par le second (qui est regardé comme le premier) parce qu'elles sont le produit ou de deux équations du premier degré ou de plusieurs équations multipliées les unes par les autres.

Les équations pures & simples sont celles qui n'ont que deux termes dans le premier membre, & zéro seul dans le second membre ; & il n'y en a qu'une seule dans chaque degré, en lui donnant deux signes pour marquer les deux cas, dans le premier degré, c'est $\pm x \mp a = 0$.

L'équation pure & simple du second degré est $\pm x^2 \pm a^2 = 0$. ce qui fait deux cas ou deux formules.

L'équation pure & simple du troisiéme degré est $\pm x^3 \pm a^3 = 0$. & ainsi de même de tous les degrez supérieurs.

Mais dans tous les degrez supérieurs (à commencer par le second degré qui est proprement le premier degré,) il y a une infinité d'équations affectées de termes moïens, or ces termes moïens sont les differens produits qui naissent de la multiplication des racines multipliées les unes par les autres.

Entre ces équations affectées de termes moïens, il y en a qui ont tous leurs termes par ordre, comme il se trouvent dans la formation réguliére des puissances. Et il y

a auſſi des équations où il manque quelque terme, qui ſont détruits par des ſignes contraires des racines différentes, par exemple lorſque la ſomme des racines poſitives eſt égale à la ſomme des racines négatives ; cela détruit le ſecond terme. Ainſi dans une équation du ſecond dégré ſi le ſecond terme manque, c'eſt une marque qu'il eſt évanoüi & qu'il a été détruit par des ſignes contraires, & que les deux racines ſont égales, l'une poſitive, l'autre négative. Dans le troiſiéme degré ſi le ſecond terme manque, c'eſt que la ſomme des racines poſitives eſt égale à la ſomme des racines négatives ; & ainſi des autres.

En quoi les Equations peuvent être contraires ou ſoûcontraires, différentes ou ſemblables.

En quoi deux Equations ſont contraires, ou ſoû-contraires.

Deux équations contraires ſont celles qui ont des racines contraires, c'eſt-à-dire, dont les racines ſont réelles dans une équation & imaginaires dans l'autre, car le réel eſt contraire à l'imaginaire qui eſt impoſſible, comme $x^2 + 8x = -16$, dont les racines réelles ſont négatives & réelles $x + 4 = 0$, & $x + 4 = 0$, mais dans $x^2 = -16$, les deux racines ſont imaginaires, $x + -4 = 0$, & $x - -4 = 0$.

Deux équations ſont ſoûcontraires, lorqu'elles ont les les mêmes racines qui ſont dans l'une poſitive & dans l'autre négative, ce qui fait en ce cas une eſpéce d'oppoſition & de contrariété, comme dans $x^2 - 8x = -16$, dont les deux racines ſont égales & poſitives $x - 4 = 0$, & dans l'équation ſoûcontraire $x^2 + 8x = -16$, dont les deux racines égales & négatives ſont $x + 4 = 0$, pour avoir une équation ſoûcontraire, il faut changer les ſignes dans les termes pairs.

En quoi deux Equations sont différentes.

Deux équations ou plusieurs peuvent être différentes de plusieurs maniéres. 1°. Par les degrez lorsqu'elles sont de différens degrez; or il y au ne infinité de degrez entre les équations comme entre les puissances, & c'est la plus grande différence qui puisse se rencontrer entre deux équations ou entre plusieurs.

2°. La seconde différence entre deux équations vient de ce que leurs racines sont contraires; sçavoir réelles dans une équation, & imaginaires dans l'autre équation.

3°. Il y en a encore une qui vient de la diversité qui se trouve entre les racines d'une équation & les racines d'une autre équation, selon toutes les diversitez des racines expliquées dans leur article particulier, car elles peuvent être positives ou négatives, rationelles ou irrationelles, &c.

4°. En ce qu'une équation a tous les termes & un autre ne les a pas tous, & qu'il y en a quelques-uns d'évanoüis.

En quoi deux Equations sont semblables.

Deux équations ou plusieurs équations peuvent être semblables de deux maniéres; sçavoir, ou Arithmétiquement ou géométriquement.

Les équations semblables Arithmétiquement sont celles dont les racines suivent la proportion arithmétique 1.2.3, &c. On les connoît du premier coup d'œil, parce qu'elles ont entiérement tous leurs termes semblables, excepté le dernier terme ou l'homogéne qui est seul différent, par exemple, dans les équations suivantes, il y a trois équations semblables Arithmétiquement dans chaque colonne, trois dans le second degré, & trois dans le troisiéme degré dont les racines sont rationelles.

1. . . $x^2 + 13x = 14.$ $\quad x^2 + 10x = 11.$

2. . . $x^2 + 13x = 34.$ $\quad x^3 + 10x = 28.$

3. . . $x^2 + 13x = 48.$ $\quad x^3 + 10x = 57.$

Les équations ſemblables géométriquement ſont celles dont les racines ou valeurs de l'inconnuë x ſont en proportion géométrique quelconque, ou ce qui revient au même, dont tous les termes d'une équation ſont doubles ou triples ou quadruples, &c. de chacun des termes correſpondans dans l'autre ou dans les autres équations.

Comme dans $z^3 - 150z^2 + 7100z = 10500.$

$$z^3 - 30y^2 + 284y = 840.$$

$$x^3 - 15x^2 + 71x = 105.$$

Car dans ces trois équations commençant par la derniére, la ſeconde eſt double de la derniére, & la premiére eſt quintuple de la ſeconde.

Des termes des Equations de tous les degrez, qui eſt-ce qui les diſtingue, & quel eſt leur nombre, comment il faut ordonner les termes d'une Equation.

Toutes les grandeurs qui entrent dans la formation d'une équation du ſecond degré & des autres plus élevez ne ſont pas pour cela des termes de l'équation, il y a une marque qui les diſtingue & qui eſt telle.

Le dernier terme d'une équation eſt toujours celui qui eſt exprimé, ou par un nombre ou par des lettres connuës ou par une ſeule, ſans mélange d'aucune grandeur inconnuë, voilà le caractére qui le diſtingue en quelqu'endroit qu'il ſe trouve placé.

Tous les autres termes de l'équation ſont diſtingués

par les puiſſances differentes de l'inconnuë comme il ſuit, de telle ſorte que toutes les grandeurs qui ſont multipliées par une même puiſſance de l'inconnuë ne font toutes enſemble qu'un ſeul terme, dont la place eſt fixée dans l'équation par l'ordre de la puiſſance qui les affecte ou multiplie.

Voici la maniére d'ordonner les termes d'une équation, ou de les ranger dans l'ordre qui leur convient; comme ce ſont les puiſſances de l'inconnuë qui détermine & qui regle la place des termes, je mets toujours dans le premier terme la plus haute puiſſance de l'inconnuë, & je mets de ſuite les puiſſances décroiſſantes de la même inconnuë dans les termes ſuivans dans le premier membre de l'équation, avec le zéro ſeul dans le ſecond membre.

1er. terme	2d. terme.	3e. terme.	der. terme ou homogéne.	ſecond membre.
x^3	$-ax^2$	$+abx$	$+abc$	$=0$
	$-bx^2$	$+acx$		
	$-cx^2$	$+bcx$		

Tous les termes doivent être homogénes, c'eſt-à-dire avoir le même nombre de dimenſions dans les équations comme dans les puiſſances.

Du nombre des termes dans une Equation.

Une équation d'un degré quelconque a toujours un terme de plus que l'expoſant de ſon degré ne contient d'unitez de même que dans les puiſſances, & lorſqu'il manque quelque terme qui a été détruit par des ſignes contraires, ce qui ne peut jamais ſe trouver dans la formation des puiſſances, mais ce qui arrive dans la formation des équations lorſqu'il y a des racines poſitives & négatives, je remplis les places vuides des termes dé-

truits par la puiſſance de l'inconnuë qui leur convient multipliée par zéro qui rend toujours ce terme nul, précédé des deux ſignes $\pm$, parce que zéro n'eſt ni poſitif ni négatif, mais le terme commun des grandeurs poſitives & des grandeurs négatives, ainſi lorſqu'il manque une puiſſance inférieure dans une équation, c'eſt une marque que ce terme eſt détruit.

Cela ſuppoſé, une équation du premier degré a deux termes, celle du ſecond degré a trois termes, une équation du troiſiéme degré contient quatre termes, celle du quatriéme degré contient cinq termes, & ainſi des autres.

Le premier terme d'une équation & le dernier ſe nomment les extrêmes, les autres ſe nomment les termes moïens, chaque terme moïen contient une puiſſance de l'inconnuë multipliée par un nombre connu ou lettre connuë qui eſt ſon multiplicateur ou cœfficient ou facteur.

DES RACINES DES EQUATIONS.

Il y a trois choſes à conſidérer dans les racines des Equations. 1°. Leurs genres, 2°. leur eſpéce, 3°. leur nombre.

Il y a quatre genres ſupérieurs où ſe rapportent les différentes racines qui entrent dans la formation des équations, ou les valeurs de l'inconnuë dans chaque équation du premier degré, puiſque nous avons démontré ci-deſſus, que les racines d'une équation compoſée ou ſes élémens, ſont les équations du premier degré qui ont été multipliées pour la former, & que l'équation compoſée quelconque n'eſt autre choſe que le produit qui réſulte de la multiplication réïtérée d'une même équation du premier degré, ou de pluſieurs équations.

Quelque fois pour abréger on nomme, mais improprement, la racine d'une équation la valeur de l'incon-

nuë x dans chaque équation du premier degré qui entre dans la formation d'une équation composée, ainsi dans $x^2 - 7x + 12 = 0$, 3 & 4 ne sont pas proprement ses racines, car 3 n'est que la valeur de l'inconnuë dans $x - 3 = 0$, & 4 n'est que la valeur de l'inconnuë dans $x - 4 = 0$; or ce sont ces deux équations simples du premier degré qui sont toutes entiéres les élémens ou les racines de l'équation composée $x^2 - 7x + 12 = 0$; elles entrent dans sa formation naturelle, & non pas leurs valeurs séparément.

Le premier genre comprend les racines positives.

Le second genre comprend les racines négatives.

Les deux premiers genres s'étendent aux deux genres suivans, dont le troisiéme comprend les racines égales, le quatriéme genre comprend les racines inégales.

Ces quatre genres comprénnent toutes les racines qui peuvent entrer dans la formation des équations, & se divisent en trois espéces primitives, qui ont chacune deux espéces subalternes qui les divisent encore, c'est ce que nous expliquerons dans le détail.

La racine est positive dans une équation du premier degré, lorsque la valeur de son inconnuë est positive, & je connois par le signe $-$ qui la lie à x qu'elle est positive, comme dans $x - a = 0$, car mettant a dans le second membre en changeant son signe, j'ai $x = + a$, donc cette valeur a est positive, je nomme $x - a = 0$ une racine positive.

Ainsi les racines sont positives dans une équation composée, si les valeurs de l'inconnuë sont positives dans les équations simples qui entrent dans sa formation.

Car si je multiplie $x - a = 0$ par elle-même, comme c'est une racine positive, l'équation du second degré $x^2 - 2ax + aa = 0$ qui en est le produit, a ses deux racines positives.

La racine négative au contraire d'une équation composée est une équation du premier degré où la valeur de l'inconnuë est négative, & par conséquent précédée du signe $+$ comme $x + a = 0$ est une racine négative, car la valeur de x est négative, puisqu'en transposant j'ai $x = - a$, or il est évident que $- a$ est une grandeur négative.

Chaque genre de racine se divise en trois espéces primitives qui sont, 1°. les racines réelles, 2°. les racines imaginaires, 3°. les racines mixtes, en partie réelles & en partie imaginaires; mais elles sont proprement imaginaires, car l'imaginaire se communique au réel qui l'accompagne comme une contagion.

Chacune de ces espéces primitives se divise encore en deux espéces subalternes, ce qui comprend 1°. les racines rationelles, 2°. les racines irrationelles.

La premiére espéce contient les racines réelles, & cette premiére espéce primitive se divise en deux espéces subalternes, qui sont 1°. les racines réelles rationelles, 2°. les racines réelles irrationelles.

1°. Les racines réelles rationelles ou commensurables, sont celles dont la valeur s'exprime exactement dans l'équation simple par un nombre, ou par une lettre, comme $x - a = 0$, $x - 4 = 0$.

2°. Les racines irrationelles ou incommensurables, sont celles dont la valeur s'exprime par le secours du signe radical dans l'équation simple, comme dans $x - \sqrt{a} = 0$, $x - \sqrt{3} = 0$. Car on ne peut point exprimer cette valeur exactement, ni en lettres ni en nombres; mais on peut par la Méthode d'approximation en approcher à l'infini, en exprimant cette valeur par deux nombres, l'un plus grand, & l'autre plus petit, qui ne peuvent jamais atteindre à une expression exacte, parce qu'on ne peut tirer la racine exacte ni de $\sqrt{a}$, ni de $\sqrt{3}$.

La ſeconde eſpéce primitive qui contient les racines imaginaires ſe diviſe en deux eſpéces ſubalternes; ſçavoir, 1°. les racines imaginaires rationelles, 2°. les racines imaginaires irrationelles, ou impoſſibles qui ſont celles dont on ne peut ſe former aucune idée.

Comme la racine quarrée de $- aa$, qui eſt impoſſible, car il eſt impoſſible qu'un quarré ou en général, toute puiſſance dont l'expoſant eſt pair ſoit, précédée du ſigne $-$, puiſque $+ \times +$ donne $+$ au produit & $- \times -$ donne auſſi $+$ au produit.

Ainſi ces racines imaginaires ſont les racines paires des grandeurs négatives conſidérées comme des puiſſances paires, & on ne peut exprimer ces racines ſans un ſigne radical qui a deux ſignes, l'un ſous le ſigne qui eſt toujours $-$, & l'autre hors le ſigne ou devant le ſigne radical qui eſt ou $+$, ou $-$; ce ſigne qui eſt le premier ſuit toujours la régle des ſignes dans les opérations, ce qui le fait varier; mais le ſigne $-$ ſous le radical ne peut jamais varier, il eſt de l'eſſence des grandeurs imaginaires.

Une racine imaginaire eſt rationelle, lorſque la grandeur ou valeur imaginaire de l'inconnuë eſt une puiſſance exacte & parfaite, ſemblable à l'expoſant du ſigne radical comme a^2 qui eſt une ſeconde puiſſance comme l'expoſant de ſon radical dans $x + \sqrt[2]{-a^2}$, comme a^3 qui eſt une troiſiéme puiſſance parfaite & ſemblable à l'expoſant du radical $\sqrt[3]{.}$ dans $x^2 + \sqrt[3]{-a^3}$, &c.

Une racine imaginaire eſt irrationelle ou incommenſurable, lorſque la valeur imaginaire qui eſt ſous le ſigne n'eſt pas du même degré que l'expoſant du ſigne radical ſous lequel elle eſt placée comme $\sqrt[3]{b}$, dans $x^3 - \sqrt[3]{-b}$. &c.

On connoît auſſi peu les racines imaginaires rationelles

nelles que les irrationelles, elles marquent également l'impossibilité du Problême.

Remarque. Lorsqu'en cherchant à résoudre une équation proposée qui est réduite à sa plus simple expression, & dans laquelle par conséquent il n'y a point d'incommensurables, on trouve des racines imaginaires, c'est une marque qu'elles y sont en nombre pair avec des signes contraires, puisqu'elles sont détruites dans l'équation, & qu'elles ne paroissent point. Ainsi s'il y a une racine imaginaire dans une équation du second degré, elles sont tous les deux imaginaires; dans une équation du troisiéme degré, il y a deux racines imaginaires avec une troisiéme racine qui est réelle; dans une équation du quatriéme degré, il y a quatre racines imaginaires, ou deux racines imaginaires avec deux racines réelles, & ainsi des autres.

La troisiéme espéce primitive contient les racines mixtes, c'est-à-dire mixtes imaginaires, en partie réelles & en partie imaginaires; elles sont exprimées par deux grandeurs liées ensemble, dont l'une est réelle précédée d'un seul signe, & l'autre imaginaire précédée de deux signes, dont le second est $-$, ce qui est essentiel aux grandeurs imaginaires, elles sont précédées de deux signes $\pm - a$ est une grandeur imaginaire sans signe radical $\pm \sqrt{-b}$ est une grandeur imaginaire avec un signe radical.

Ainsi $+ a + - b$ est une grandeur mixte imaginaire dans $x \mp a \mp - b = 0$, de même $x + a + \sqrt{-c} = 0$, est une racine imaginaire.

Les racines mixtes imaginaires se trouvent souvent dans les équations, car étant multipliées les unes par les autres, elles donnent des grandeurs réelles dans le dernier terme de l'équation; or elles ne peuvent donner de grandeurs réelles que lorsqu'elles se trouvent deux à deux, ou quatre à quatre, &c. toujours en nombre pair, car multipliant $+ \sqrt{-a} \times - \sqrt{-a}$, le produit réel

eſt $+ a$ qui eſt poſitif, mais $+ \sqrt{-a} \times + \sqrt{-a}$ donne le produit négatif réel $- a$. de même auſſi $- \sqrt{-a} \times - \sqrt{-a}$ donne le produit négatif réel $- a$.

Le troiſiéme genre des racines des équations contient les racines égales, or les racines ſont égales, lorſque la même équation du premier degré eſt multipliée par elle-même dans l'équation compoſée, comme dans $x^2 - 2ax + aa = 0$, il y a deux racines égales $x - a = 0$, & $x - a = 0$, dont la multiplication donne cette équation du ſecond degré; de même dans $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$, il y a trois racines égales, puiſque cette équation contient le produit de $x - a = 0$ multiplié d'abord par elle-même, & de plus le produit qui en réſulte multiplié par la même racine, qui font deux multiplications par la même racine.

Le quatriéme genre des racines contient les racines inégales, il s'en trouve dans toutes les équations formées par la multiplication des équations ſimples dont la valeur eſt différente; ce qui eſt ſi commun que cela ne demande pas d'autre explication. Ces deux derniers genres ſont plûtôt des proprietez que des veritez propres à donner des principes pour la réſolution des équations.

Du nombre des racines dans les équations.

Le nombre des racines établit la plus grande diverſité des équations qui eſt celle de leurs degrez, il y a toujours dans une équation autant de racines que l'expoſant de ſon degré contient d'unitez; ainſi dans le premier degré il y a une racine par ſimple analogie, ce n'eſt pas proprement une racine, puiſque l'équation du premier degré n'eſt pas un produit.

Dans une équation du ſecond degré il y a deux racines, dans une équation du troiſiéme degré il y a trois racines:

dans le quatriéme degré il y a quatre racines, &c.

De la diversité qui naît dans une Equation par les racines positives & négatives mêlées ensemble.

Il est évident que si tous les termes de l'équation ont le signe +, toutes les racines sont négatives, 2°. si les termes ont alternativement les signes + & —, alors toutes les racines sont positives, 3°. si on trouve cet ordre interrompu, & qu'il y ait des signes + & — non pas alternativement, mais deux plus de suite + +, ou deux — — dans quelques termes, alors il y a nécessairement des racines positives & des racines négatives.

De la préparation des équations.

Préparer une équation, c'est lui donner la forme la plus commode & la plus avantageuse pour parvenir à sa résolution, qui donne celle du Problême proposé.

Il y a quatre préparations nécessaires sans lesquelles on ne pourroit résoudre l'équation proposée, ausquelles j'en ajoûte quatre autres qui sont d'élégance & non pas de nécessité, & qui rendent sa résolution plus facile.

1°. La premiére & la plus essentielle consiste à faire évanoüir toutes les inconnuës hors une seule dans l'équation unique à laquelle on a réduit toutes les équations qu'on a trouvé d'abord suivant les conditions du Problême.

2°. La seconde consiste à délivrer cette unique équation de toutes grandeurs incommensurables; s'il y en a, multipliant tous les termes de l'équation, pour l'élever à la puissance exprimée par l'exposant du signe radical de ces grandeurs incommensurables.

3°. La troisiéme consiste à délivrer cette équation de toute fraction, ce qui se fait encore en élevant l'équa-

tion à la puiſſance exprimée par le dènominateur de la fraction s'il n'y en à qu'une, ou par la ſomme de tous les dénominateurs s'il y a pluſieurs fractions.

4°. La quatriéme ſi le premiier terme qui contient la haute puiſſance de l'inconnuë à un cœfficient différent de l'unité, il faut diviſer tout par ce cœfficient ou multiplicateur.

5°. Il faut rendre tous les termes poſitifs hors le premier ſeul qu'il faut rendre négatif pour rendre le dernier terme qui eſt l'homogéne de comparaiſon poſitif, lorſqu'il eſt négatif dans l'équation propoſée, & à cet effet je change tous les ſignes de l'équation.

Or ſi l'on change tous les ſignes des termes pairs, ſçavoir le ſecond, le quatriéme, le ſixiéme, &c. dans une équation ſans toucher aux ſignes des termes impairs qui ſont le premier, le troiſiéme, le cinquiéme, &c. alors toutes les racines poſitives ſeront changées en négatives, & les racines négatives ſeront changées en poſitives.

Au contraire, ſi l'on change tous les ſignes dans les termes d'une équation où la puiſſance de l'inconnuë a pour expoſant un nombre impair comme x^1, x^3, x^5, x^7. &c. ſans toucher aux ſignes des autres termes. Alors toutes les racines poſitives ſeront changées en négatives, & les racines négatives ſeront changées en poſitives.

6°. Il faut réduire l'équation propoſée à ſa plus ſimple expreſſion ou à moindres termes; ce qui ſe fait en la réduiſant à l'équation primitive d'où elle eſt dérivée comme il ſuit. Par exemple, ſoit l'équation propoſée A . . $z^3 - \overset{a}{150}z^2 + \overset{a^2}{7100}z = \overset{a^3}{10500} = 0$, dont les cœfficiens numeriques ſont diſtinguez par les différentes puiſſances de l'inconnuë z

Les trois racines de cette équation ſont poſitives, c'eſt $z - 30 = 0$, $z - 50 = 0$, & $z - 70 = 0$,

Je diviſe tous cœfficiens ou multiplicateurs par quel-

qu'un des nombres premiers & par ses puissances correspondantes à celle de a ; mais pour abréger je tente d'abord la division alternativement par les puissances des nombres impairs & des pairs la division de l'homogéne ou dernier terme 10500, qui répond à a^3, je le divise d'abord par les troisiémes puissances des nombres premiers seulement qui peuvent le diviser exactement.

Or le cube de 5 est 125, je divise $10500 = a^3$ par 125, j'ai le quotient exact 840 qui sera l'homogéne d'une autre équation. Je continuë la division par les autres puissances de 5, puisque $7100 = a^2$, je le divise par 25 quarré de 5, le quotient est 284. De même je divise $150 = a$ par 5, le quotient est 30, ce qui donne l'équation plus simple,

$$B \,.\,. \; y^3 - \overset{a.}{30}y^2 + \overset{a^2}{284}y - \overset{a^3}{7100} = 0.$$ dont les racines sont $y - 6 = 0$, $y - 10 = 0$, $y - 14 = 0$.

Je tente encore par la division, si je pourrois réduire l'équation B à une expression plus simple par la suite des puissances d'un nombre premier correspondantes aux multiplicateurs marquez par les puissances de a,

Je divise l'homogéne $840 = a^3$ par 8 cube 2, le quotient est 105 qui est un autre homogéne.

Je divise $284 = a^2$ par 4 quarré de 2, le quotient est 71. Enfin je divise $30 = a$ par 2, le quotient est 15. ce qui donne une autre équation réduite encore

$$C \,.\,.\,. \; x^3 - 15\,x^2 + 71\,x - 105 = 0.$$

à moindres termes, dont les racines sont positives $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x - 7 = 0$.

Comme je ne peux plus diviser cette équation par les puissances d'aucun nombre premier ; je conclus que c'est l'équation primitive dont l'équation proposée A est dérivée. Or il est plus facile de résoudre l'équation C que l'équation proposée A. Et après avoir trouvé ses racines je les multiplie par les diviseurs

que j'ai employé, 5 & 2; or 3. 5. 7 multipliez par 5 & par 2 donnent 30, 50, 70, pour racines, c'est-à-dire $z - 30 = 0$, $z - 50 = 0$, $z - 70 = 0$ sont les trois racines desirées, puisque ce sont les trois équations du premier degré dont l'équation proposée A contient le produit.

Remarque. Cette préparation qui n'est que d'élegance mais très-naturelle, puisqu'il est aussi absurde de vouloir résoudre une équation sans la réduire, comme de trouver la valeur d'une fraction sans la réduire à ses moindres termes, fournit un moïen facile & simple de réduire toutes les équations composées à leur équation primitive dont la valeur des racines sont des nombres premiers; ce qui donne moïen d'en dresser des tables, comme il est expliqué ci-dessus, page 58.

7°. Enfin toute équation proposée étant réduite à moindres termes, je place l'homogéne seul qui est le dernier terme dans le second membre, parce qu'il est connu; & je mets dans le premier membre tous les autres termes. Cette disposition est la plus favorable pour la résolution, puisque tout l'inconnu est dans le premier membre, & le connu dans le second membre, ce qui est très-naturel; on voit clairement ce qu'il faut faire, c'est de tirer la racine de chaque membre. Toute autre disposition n'est ni assez simple, ni assez naturelle: j'avoüe que la disposition de Mr. Descartes qui place toutes les grandeurs dans le premier membre, & le zéro seul dans le second membre, est préferable à toute autre disposition lorqu'il s'agit de former une équation; mais celle-ci mérite la préference lorsqu'il s'agit de résoudre ces équations.

En quoi consiste la résolution des Equations.

La résolution de toute équation consiste à trouver ses racines ou les valeurs de l'inconnuë, c'est-à-dire à trouver

chacune des équations simples du premier degré qui en sont élemens & dont elle contient le produit, & d'en trouver autant que l'exposant du degré de l'équation contient d'unitez ; il faut de plus que chaque valeur de l'inconnuë soit un nombre entier, car une fraction ne peut point être la valeur d'une inconnuë dans une équation préparée, où il ne se trouve par conséquent ni fractions ni incommensurables.

Mais avant d'entreprendre de résoudre les équations de tous les degrez à l'infini, c'est-à-dire d'en trouver les racines, il faut examiner d'abord comment les racines & leurs valeurs sont contenuës dans une équation & dans tous ses termes, comme il suit.

Comment les racines ou les valeurs des racines sont contenuës dans une équation & dans ses différens termes.

En géneral toute équation contient le produit de toutes ses racines multipliées les unes par les autres ; c'est la somme des produits particuliers. Mais chaque produit particulier donne un terme ou une partie d'un terme de l'équation.

Je prends pour exemple une équation litterale du troisiéme degré & une équation en nombres du même degré pour en examiner plus facilement chacun des produits.

$$
\begin{array}{llllll}
 & x - a = 0 & & & & \\
\times & x + b = 0 & & & & \\
\hline
 & x^2 - ax & & & & \\
 & \quad + bx - ab = 0 & & & & \\
\times & x - c = 0 & & & & \\
\hline
 & x^3 - ax^2 - abx + abc = 0 & & & & \\
 & \quad + bx^2 + acx & & & & \\
 & \quad - cx^2 - bcx & & & &
\end{array}
$$

$$x - 2 = 0$$

$$\times\ x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x \\ \quad + 4x - 8 = 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\times\ x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 - 8x + 16 = 0 \\ \quad - 2x^2 - 4x \end{array}$$

$$\text{ou } x^3 \pm 0x^2 - 12x + 16 = 0.$$

Chacune de ces équations eſt du troiſiéme degré & contient quatre termes.

Le premier terme contient la haute puiſſance de l'inconnuë ſeule; & le dernier terme contient ſeulement le produit des trois racines, abc, ou 16, qui réſulte en multipliant les trois racines l'une par l'autre $a \times b \times c = abc$, $2 \times 4 \times 2 = 16$. Voilà ce qui eſt contenu dans les deux termes extrêmes.

Tous les termes moïens contiennent un multiplicateur avec une puiſſance de l'inconnuë, laquelle diſtingue les différens termes par la différence de ſes degrez.

Ainſi dans l'équation litterale, le ſecond terme contient trois grandeurs a, b, c multipliées par la même puiſſance x^2 qui eſt moindre de l'unité que dans le premier terme: c'eſt pourquoi ce ſont des produits partiaux qui ne font qu'un ſeul terme, or ſi $\underline{+b}$ qui eſt poſitif = les deux grandeurs négatives a & c, alors ces grandeurs égales ſe détruiſent par des ſignes contraires, comme il ſe voit dans l'équation numerique $x^3 \pm 0x^2 - 12x + 16 = 0$ dans laquelle le multiplicateur du ſecond terme eſt détruit & ſa place vuide eſt remplie d'un zéro, qui étant

étant nul, ce ſecond terme eſt abſolument nul,

Le ſecond terme contient toujours la ſomme de toutes les racines, c'eſt-à-dire 1°. que ſon multiplicateur contient réellement la ſomme de toutes les racines ſi elles ſont ſemblables, ou toutes poſitives ou toutes négatives. 2°. Si elles ſont inégales avec des ſignes contraires, cette ſomme eſt la différence des poſitives & des négatives. 3°. Si les racines négatives ſont égales aux poſitives, leur ſomme ou leur différence eſt zéro, ce qui détruit le ſecond terme.

Le cœfficient ou multiplicateur 12 du troiſiéme terme $12x$ dans l'équation numerique du troiſiéme degré contient la ſomme des produits des racines priſes deux à deux & multipliées par une puiſſance de x moindre de deux unitez que dans le premier terme. La preuve en eſt évidente dans le troiſiéme terme de l'équation litterale, dans laquelle le troiſiéme terme contient les trois produits $\overline{ab\times x}$, $\overline{ac\times x}$, $\overline{bc\times x}$.

$-\ abx.$

$+\ acx.$

$-\ bcx.$

Si l'on forme une équation d'un degré plus élevé, comme du quatriéme, cinquiéme ſixiéme degrez, en réïterant la multiplication des racines ſemblables ou différentes; on remarquera que le quatriéme terme contient au multiplicateur quatre produits des valeurs de quatre racines priſes trois à trois, multipliées par une puiſſance de l'inconnuë moindre de trois unitez que celle du 1er. terme.

Que le multiplicateur du cinquiéme terme contient cinq produits des valeurs de quatre racines priſes quatre à quatre. Et ainſi de ſuite à l'infini, on trouvera autant de produits que les racines peuvent en fournir de différens.

Mais le pénultiéme terme dans toute équation est toujours celui qui contient l'inconnuë au premier degré avec tous les multiplicateurs partiaux.

Il suit de là, 1°. Que dans les termes pairs qui sont le second, le quatriéme, le sixiéme, &c. les racines y sont toujours dans le nombre qui suit, sçavoir, une à une pour multiplier l'inconnuë dans le second terme; mais dans tous les termes pairs supérieurs, les racines y sont multipliées en nombre impair; sçavoir, trois à trois dans le quatriéme terme, cinq à cinq dans le cinquiéme terme, sept à sept dans le huitiéme terme, &c.

2°. Dans les termes impairs à commencer par le troisiéme & continuer par le cinquiéme, le septiéme, &c. les racines y sont multipliées en nombre pair, sçavoir deux à deux dans le troisiéme terme, quatre à quatre, dans le cinquiéme terme, six à six, dans le septiéme terme, &c.

Régle générale pour les signes dans les différens termes des Equations.

1°. Si toutes les racines de l'équation sont négatives, tous les termes de l'équation ont nécessairement le signe $+$, car alors les racines sont, $x + a = 0$, ou $x + b = 0$, &c. Ainsi tous les produits qui en sont formez ont nécessairement le signe $+$.

2°. Si toutes les racines sont positives, comme $x - a = 0$, alors tous les termes ont alternativement les signes $+$ & $-$, car le premier terme a toujours le signe $+$ par hypothése, le second terme a le signe $-$ puisqu'il contient la somme des racines positives qui ont toutes le signe $-$ dans l'équation simple, comme $x - a = 0$.

3°. Dans tous les autres termes de l'équation, lorsque toutes les racines sont positives, alors tous les termes pairs

comme le quatriéme, le sixiéme, &c. ont le signe —, puisqu'ils ont pour multiplicateur ou cœfficient la somme des produits des racines en nombre impair, qui ont le signe —.

Mais au contraire tous les termes pairs ont le signe +, puisqu'ils ont pour multiplicateurs les produits des valeurs des racines multipliées en nombre pair, puisque — × — donne +.

D'où il suit que lorsque toutes les racines sont positives, alors tous les termes de l'équation ont alternativement les signes + & —.

4°. Il suit de là que lorsqu'il y a des + & des — dans une équation, & qu'il se trouve tantôt deux fois le signe +, tantôt deux fois le signe —, c'est une marque qu'il y a des racines positives & des racines négatives.

5°. Comme le dernier terme est le produit de toutes les racines, lorsque le nombre des racines positives est pair, le dernier terme a le signe +; mais si le nombre des racines positives est impair, le dernier terme a le signe —; d'où il suit que si le dernier terme d'une équation a le signe —, il a nécessairement des racines positives réelles; car les racines imaginaires qui ont des signes contraires se détruisent & donnent le signe + au produit réel qu'elles rétablissent par leur multiplication.

SECTION TROISIÉ'ME.

La résolution des Equations en général & en particulier.

La résolution des Equations pures & simples de tous les degrez, avec la formation & la résolution des Equations du second degré.

LA résolution d'une équation d'un degré quelconque consiste en général à trouver les racines dont elle contient le produit, & ces racines sont les équations simples du premier degré par la multiplication desquelles l'équation est formée, voilà ses élémens. Ainsi, chercher les racines d'une équation, c'est la réduire aux équations simples du premier degré qui sont ses racines réelles ; de sorte qu'on dit qu'une équation est irréductible lorsqu'on ne peut la réduire à des équations du premier degré dans lesquelles la valeur de l'inconnuë soit réelle, mais imaginaire, ou mixte imaginaire.

Or une équation contient autant de racines qu'il y a d'unitez dans l'exposant de son degré, qui est égal à l'exposant de l'inconnuë du premier terme qui est toujours sa plus haute puissance dans l'équation. Ainsi il faut trouver pour chaque équation autant d'équations simples, ou du premier degré, que la haute puissance de l'inconnuë contient d'unitez. Il faut que leurs valeurs soient réelles, puisque l'inconnuë dans une équation a autant de valeurs que l'exposant de sa haute puissance contient d'unitez ; & que les valeurs imaginaires marquent de l'impossibilité dans le Problême qui a donné l'Equation.

REGLE GENERALE.

Pour la résolution des Equations de tous les degrez à l'infini.

Soit en général l'équation d'un degré quelconque.

$$x^{p} \pm ax^{p-1} \pm b'' x^{p-2} \ldots \&c. = z^{p}$$

J'ajoûte de part & d'autre la grandeur *m* élevée à la même puissance que l'inconnuë c'est m^{p} Alors je considére le premier membre de l'équation, comme la puissance du binôme $x \pm m$, du même degré que l'équation; elle seroit parfaite si tous les multiplicateurs *a b.* &c. des termes moïens étoient les puissances inférieures de *m.*

j'ai $x^{p} \pm ax^{p-1} \pm b'' x^{p-2} \ldots \&c. + m^{p} = m^{p} + z^{p}$

Ensuite je tire la racine de chaque membre & du même degré que l'équation exprimée par cette formule;

$$\sqrt[p]{z^{p} \pm ax^{p-1} \pm b'' x^{p-2} \ldots \&c. + m^{p}} = \sqrt[p]{1x^{p} + z^{p}}$$

abrégeant cette expression & substituant des nombres en la place des lettres, je trouve en nombres entiers la premiére racine, qui me sert à diviser l'équation proposée; & le quotient est une seconde équation abaissée d'un degré sur laquelle j'opére de même, & je continuë jusqu'à ce que j'aye réduit le tout à une équation du premier degré : par ce moïen je trouve de suite toutes les équations ou racines dont l'équation proposée est le produit, ce qui s'éclaircira dans la suite par des exemples.

La résoution des Equations pures & simples de tous les degrez à l'infini.

Il y a dans tous les degrez des équations pures & simples, & dans le second degré & dans les autres supérieurs, il y a aussi des équations affectées.

Les équations pures & simples sont celles qui n'ont que deux termes, l'inconnuë avec un nombre ou une lettre connuë, comme $x^2 - a = 0$. $x^2 + 2 = 0$, l'inconnuë peut avoir un exposant quelconque, ce qui détermine le degré de l'équation, comme x^3, x^5, x^6, &c. & le signe qui joint ces deux termes a le signe $+$, ou le signe $-$, ce qui comprend deux cas.

Premier cas. Si l'exposant de l'inconnuë est un nombre pair comme x^2, x^4, & que sa valeur ait le signe $-$, ce qui marque qu'elle est positive dans l'équation égalée à zéro, comme $x^2 - 4 = 0$, $x^4 - 16 = 0$, les valeurs des deux racines sont réelles & rationelles, l'une positive $x - 2 = 0$, l'autre négative $x + 2 = 0$, car en multipliant l'une de ces équations par l'autre

$$\begin{array}{l} \text{j'ai } x^2 - 2x \\ \quad + 2x - 4 = 0 \\ \hline x^2 \quad 0x - 4 = 0, \text{ ou } x^2 - 4 = 0. \end{array}$$

Mais si j'ai $x^2 - 6 = 0$, ses deux racines sont réelles, mais irrationelles ou incommensurables, puisque 6 n'est point un quarré d'un nombre entier, mais de l'incommensurable $\sqrt{6}$. Sa racine positive est $x - \sqrt{6} = 0$, sa racine négative est $x + \sqrt{6} = 0$.

En général, soit $x^p - a^p = 0$ (dans laquelle l'exposant p signifie un nombre pair quelconque) on aura

pour les deux racines $x \mp a = 0$. car en élevant l'une & l'autre de ces deux binômes à la même puissance pair, en les multipliant l'un par l'autre autant de fois moins une que l'exposant contient d'unitez, le produit sera toujours $x^p - a^p = 0$

Second cas. Si la valeur de l'inconnuë est négative dans l'équation du second degré, du 4e. & du 6e. & autres degrez pairs, ce qu'on connoit par le signe + comme dans $x^2 + 4 = 0$. dans ce cas les deux valeurs de l'inconnuë x^2 sont imaginaires, c'est $x + \sqrt{-4} = 0$, & $x - \sqrt{-4} = 0$, car aïant élevé une quantité négative $-a$, ou -2, à la seconde puissance ou à toute autre puissance, dont l'exposant est le nombre pair p, donnera toujours $+a^p$ & jamais $-a^p$, au produit.

Troisiéme cas. Si l'exposant de l'inconnuë est un nombre impair, 1, 3, 5, 7, &c. l'inconnuë dans le premier degré n'a qu'une seule valeur, mais dans les autres degrez, elle n'aura qu'une valeur réelle qui est positive, lorsqu'elle a le signe $-$, dans l'équation du premier degré, comme $x - a = 0$.

Quatriéme cas. Mais cette racine réelle est négative lorsqu'elle a le signe + dans l'équation du premier degré comme $x + a = 0$, toutes les autres racines sont imaginaires dans ces quatre cas; ainsi dans $x^1 - a^1 = 0$, qui est du premier degré la valeur a précédée du signe $-$ est positive.

Dans l'équation pure & simple du troisiéme degré $x^3 - a^3 = 0$, la racine est réelle & positive, c'est $x - a = 0$, car la racine d'une puissance positive est positive, mais dans $x^3 + a^3 = 0$ qui est une troisiéme puissance négative, la racine réelle est négative, c'est $x + a = 0$, puisque le cube d'une grandeur négative est négatif, en général soit $x^q - a^q = 0$, dans laquelle l'exposant q

marque un nombre pair quelconque) on 'aura pour la racine réelle & positive $x - a = 0$, au contraire dans $x^q + a^q = 0$, on aura pour racine réelle & négative $x + a = 0$.

Toutes les autres racines des degrez supérieurs à commencer par le troisiéme sont toutes imaginaires, excepté la premiére racine dans les équations pures & simples, soit que l'exposant de la haute puissance soit pair ou impair, & soit que le terme connu qui est l'homogéne de l'équation soit positif ou négatif. Exemple, dans le troisiéme degré $x^3 - 8 = 0$, n'a qu'une seule racine réelle positive, $x - 2 = 0$, les deux autres sont mixtes imaginaires, & négatives dans la partie réelle, & l'une positive, l'autre négative dans la partie imaginaire, c'est $x + 1 - \sqrt{-3} = 0$, & $x + 1 + \sqrt{-3} = 0$.

Formation de $x^3 - 8 = 0$.

$$x + 1 - \sqrt{-3} = 0$$
$$\times\; x + 1 + \sqrt{-3} = 0$$

$$x^2 + 1x - x\sqrt{-3}$$
$$+ 1x + 1 - 1\sqrt{-3}$$
$$+ x\sqrt{-3} + 1\sqrt{-3} + 3 = 0.$$

$$x^2 + 2x + 1 + 3\;(+4) = 0$$
ou $x^2 + 2x + 4 = 0$
$$\times\; x - 2 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + 4x$$
$$- 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$x^3 \pm 0x^2 \pm 0x - 8 = 0$$
ou $x^3 - 8 = 0$

Formation

Formation de $x^3 + 8 = 0$.

$$x - 1 - \sqrt{-3} = 0$$
$$\times\ x - 1 + \sqrt{-3} = 0$$

$$x^2 - 1x - x\sqrt{-3}$$
$$- 1x + 1 + 1\sqrt{-3}$$
$$+ x\sqrt{-3} - 1\sqrt{-3} + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$
$$\times\ x + 2 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + 4x$$
$$+ 2x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x^3\ 0x^2\ \ 0x + 8 = 0$$
ou $x^3 + 8 = 0$

De même dans $x^3 + 8 = 0$, la racine réelle eſt négative, c'eſt $x + 2 = 0$, les deux autres racines ſont mixtes imaginaires, poſitives dans la partie réelle, mais l'une poſitive dans la partie imaginaire, l'autre négative, ce qui fait que l'imaginaire ſe détruit par des ſignes contraires, & ne paroît point dans l'équation, dans laquelle l'homogéne 8 eſt le produit de la racine 2, par $4 = \overline{1 + 3}$ qui eſt le produit 1 de 1×1 réel, & 3 produit réel de l'imaginaire $+ \sqrt{-3} \times - \sqrt{-3}$.

Formation des Equations du second degré par toutes les espéces des racines différentes.

Chaque équation du second degré est formée par la multiplication de deux équations du premier degré.

Formation par deux racines égales & positives, réelles & rationelles.	*Formation par deux Racines égales & négatives, réelles & rationelles.*
$x - 4 = 0$	$x + 4 = 0$
$\times\ x - 4 = 0$	$\times\ x + 4 = 0$
$x^2 - 4x$	$x^2 + 4x$
$\quad - 4x + 16 = 0$	$\quad + 4x + 16 = 0$
$x^2 - 8x + 16 = 0$	$x^2 + 8x + 16 = 0$

Par deux Racines inégales positives.	*Par deux Racines inégales négatives.*
$x - 4 = 0$	$x + 4 = 0$
$\times\ x - 3 = 0$	$\times\ x + 3 - 0$
$x^2 - 4x$	$x^2 + 4x$
$\quad - 3x + 12 = 0$	$\quad + 3x + 12 = 0$
$x^2 - 7x + 12 = 0$	$x^2 + 7x + 12 = 0$

Par deux Racines égales l'une positive, l'autre négative.

$$x - 6 = 0$$
$$\times\, x + 6 = 0$$

$$x^2 - 6x$$
$$\quad + 6x - 36 = 0$$

$$x^2 \pm 0x - 36 = 0$$

Par deux Racines inégales, l'une positive, l'autre négative.

$$x - 6 = 0$$
$$\times\, x + 7 = 0$$

$$x^2 - 6x$$
$$\quad + 7x - 42 = 0$$

$$x^2 + 1x - 42 = 0$$

Formation par deux Racines irrationelles.

Irrationelles égales positives.

$$x - \sqrt{2} = 0$$
$$\times\, x - \sqrt{2} = 0$$

$$x^2 - x\sqrt{2}$$
$$\quad - x\sqrt{2} + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 0$$

Irrationelles égales, l'une positive, l'autre négative.

$$x - \sqrt{2} = 0$$
$$\times\, x + \sqrt{2} = 0$$

$$x^2 - x\sqrt{2}$$
$$\quad + x\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$x^2 \pm 0x - 2 = 0$$

Ces deux racines ne se rencontrent jamais dans une équation préparée & réduite à sa forme la plus simple : ni les racines irrationelles inégales.

Formation des Equations du second degré par deux racines imaginaires du premier degré & toujours égales, & contraires.

$$x + - 4 = 0$$
$$\times\ x - - 4 = 0$$
$$x^2 + - 4x$$
$$- - 4x + 16 = 0$$
$$x^2 \pm 0x + 16 = 0.$$

Mixtes imaginaires.

$$x - 4 + - 3 = 0$$
$$\times\ x - 4 - - 3 = 0$$
$$x^2 - 4x + - 3x$$
$$- 4x + 16 - - 12$$
$$- - 3x + - 12 + 9 = 0$$
$$x^2 - 8x\ (+ 16 + 9) + 25 = 0$$

Par deux racines imaginaires du second degré.

$$x + 4 + \sqrt{-3} = 0$$
$$\times\ x + 4 - \sqrt{-3} = 0$$
$$x^2 + 4x + x\sqrt{-3}$$
$$+ 4x + 16 + 4\sqrt{-3}$$
$$- x\sqrt{-3} - 4\sqrt{-3} + 3 = 0$$
$$x^2 + 8x\ (+ 16 + 3) + 19 = 0$$

Remarque. La multiplication des imaginaires n'eſt point difficile, les imaginaires ont deux ſignes qui les précédent, le ſecond eſt toujours négatif, il eſt invariable dans le calcul, ſoit qu'il y ait un radical comme dans les imaginaires du ſecond degré $+ \sqrt{-9}$, ou qu'il n'y ait point de ſigne radical comme dans les imaginaires du premier degré. $+ - 3$, & $- - 3$.

Une grandeur réelle multipliée par une grandeur imaginaire donne toujours un produit imaginaire, c'eſt une contagion qui ſe contracte même par l'addition & par la ſouſtraction ; or comme les racines imaginaires ſont toujours deux à deux & avec des ſignes contraires dans une équation, dans laquelle ces imaginaires ne paroiſſent point, il ſuit de-là qu'ils ſe ſont détruits, ainſi ils donnent des produits mixtes imaginaires, qui ſe détruiſent auſſi par des ſignes contraires, & il ne reſte dans l'équation que le produit des grandeurs réelles par les grandeurs réelles, car le produit des imaginaires par les imaginaires contraires, rétablit la grandeur réelle par la multiplication qui eſt toujours poſitive, ainſi $+ - 4 \times - - 4 = + 16$, & de même $+ - \sqrt{3} \times - - \sqrt{3}$ donne $+ 3$ au produit.

Mais lorſque les imaginaires ont le même premier ſigne, leur produit donne une grandeur négative, ainſi $+ - 3 \times + - 3$, donne $- 3$. de même $- \sqrt{-3} \times - \sqrt{-3} = - 3$.

La réſolution des Equations du ſecond degré.

Nous venons de donner la réſolution des équations pures & ſimples de tous les degré à l'infini ; il reſte à donner la réſolution des équations affectées de termes moïens, ce ſont celles qui ont plus de deux termes ; or les équations affectées des termes moïens ont, ou tous leurs termes comme les puiſſances, c'eſt-à-dire, au-

ant de termes que l'expoſant de leur degré contient d'unitez, & un terme encore de plus, ou bien il y manque quelque terme, ce qui eſt facile à connoître, puiſque les puiſſances de l'inconnuë diſtingue ſeule les termes & non pas le nombre des grandeurs, puiſque nous avons vû que toutes les grandeurs qui ſont multipliées par la même puiſſance de l'inconnuë, ne font toutes enſemble qu'un ſeul & unique terme; donc ſi la ſuite des puiſſances eſt interrompuë, ou qu'il s'y en trouve quelqu'une multipliée par zéro, c'eſt une marque que ce terme eſt évanoüi & manque dans l'équation.

En général, toute équation du ſecoud degré s'exprime par cette formule $x \pm ax = \pm b''$. a & b ſont des nombres ou des grandeurs connuës.

L'expoſant b'' en chifre romain eſt pour conſerver la Loi des homogénes, qui veut que dans une équation tous les termes aïent le même nombre de dimenſions, ici b eſt un nombre quelconque.

L'inconnuë x^2 eſt élevée à la 2de. puiſſance, par conſéquent elle a deux valeurs ou deux racines exprimées par cette formule générale $x \pm \frac{1}{2}a \mp \sqrt[2]{\frac{1}{4}aa \pm b.} = 0$

Ces formules ſont des régles abrégées qui preſcrivent ce qu'il faut faire pour trouver les racines des équations; mais comme la formule générale pour les racines embarraſſe fort les commençans, pour leur en faciliter l'intelligence, j'entrerai dans le détail de tous les cas poſſibles en ſuppoſant tous les termes réels, il y a ſix cas qui donnent ſix formules, qu'il faut éclaircir par des exemples; ſçavoir, les deux formules des équations pures & ſimples, la premiére formule $x^2 - b = 0$, dont les deux racines réelles, l'une poſitive & l'autre négative, ſont $x \mp \sqrt{b} = 0$, la ſeconde formule eſt $x^2 + b = 0$, dont les deux racines ſont imaginaires $x \mp \sqrt{-b} = 0$.

Il reste donc quatre formules des six formules ordinaires; sçavoir, la troisiéme, la quatriéme, la cinquiéme & la sixiéme qu'il faut expliquer, & ce sont les seuls cas des équations du second degré affectées de termes moïens.

$3^e.\ x^2 + ax = b \qquad 4^e.\ x^2 - ax = b$

$5^e.\ x^2 + ax = -b \qquad 6^e.\ x^2 - ax = -b.$

La résolution des Equations affectées du second degré.

Dans la troisiéme formule $x^2 + ax = b''$ voilà pour l'équation : mais la formule pour les racines est $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$.

Dans cette formule toutes les équations ont deux racines réelles & inégales la plus petite positive, la plus grande, négative. Exemple, en nombres. Soit l'équation $x^2 + 10x = 144$. pour trouver ses racines. suivant ce qui est prescrit par la formule des racines qui est une régle abrégée, j'ajoûte de part & d'autre $\frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}100$ j'ai donc $x^2 + 10x + \frac{1}{4}100 = \frac{1}{4}100. + 144.$ dont il faut trouver les racines.

1°. Je prends la moitié du multiplicateur $10 = a$, c'est $5 = \frac{1}{2}a$, que je garde à part, ce sera la premiére partie de la valeur de la racine.

2°. Pour avoir le reste de sa valeur, je quarre cette moitié, c'est $\frac{1}{4}aa$, ou $\frac{1}{4}100$, ou $\frac{100}{4} = 25$, ou simplement je quarre 5, & j'ai 25.

3°. A ce quarré j'ajoute l'homogéne qui est le dernier terme sans changer son signe, c'est $\frac{1}{4}aa + b''$. ou $25 + 144 = 169$.

4°. J'en tire la racine quarrée, c'est $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$, ou $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

5°. Pour avoir la premiére racine, je prends la moi-

tié du coœfficient ou multiplicateur du ſecond terme que j'ai mis d'abord à part $\frac{1}{2}a$, ou 5, que j'ajoute à cette racine quarrée trouvée, c'eſt $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$. ou $x = -5 + \sqrt{25 + 144}$, ou $x = -5 + \sqrt{169}$, ou $x = -5 + 13$ qui ſe réduit à $x = 8$. voilà la premiére racine qui eſt poſitive & la plus petite.

6°. Pour avoir la ſeconde racine qui eſt négative, par la formule, c'eſt $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$, & en nombres $x = -5 - \sqrt{\frac{1}{4}100 + 144}$, ou $x = -5 - \sqrt{25 + 144}$ qui donne $x = -5 - \sqrt{169}$, ou $x = -5 - 13$, qui donne enfin $x = -18$, c'eſt la ſeconde racine qui eſt négative & la plus grande.

Pour abréger dans l'équation propoſée $x^2 - 10x = 144$, pour rendre le premier membre un quarré parfait, j'ajoute dans chaque membre le quarré de la moitié 5 du multiplicateur du ſecond terme 10, c'eſt $\frac{1}{4}100$, ou $\frac{100}{4}$, ou 25, ce qui donne $x^2 - 10x + 25 = 25 + 144$.

2°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, c'eſt $x + 5 = \sqrt{25 + 144}$, ou $x + 5 = \sqrt{169} = 13$, ce qui donne $x + 5 = 13$, & par tranſpoſition $x = -5 + 13 = 8$, c'eſt la premiére racine, la ſeconde eſt $x = -5 - 13 = -18$, c'eſt la ſeconde racine négative.

Pour avoir la démonſtration, il ſuffit de multiplier la premiére racine $x - 8 = 0$, par la ſeconde $x + 18 = 0$, leur produit donnera l'équation propoſée.

$$
\begin{array}{l}
x - 8 = 0 \\
x\,x + 18 = 0 \\
\hline
x^2 - 8x \\
\quad + 18x - 144 = 0 \\
\hline
x^2 + 10x - 144 = 0
\end{array}
$$

Remarque premiére. Il y a dans cette équation deux termes de suite; sçavoir le premier & le second qui ont le signe $+$, & le dernier a le signe $-$, ce qui montre que l'équation a une racine positive & une racine négative, car si les deux racines étoient négatives tous les termes auroient le signe $+$, & si les deux racines étoient positives, les termes auroient alternativement les signes $+$ & $-$.

Résolution des Equations affectées du second degré.

Dans la quatriéme formule $x^2 - ax = b''$. qui a pour la formule de ses deux racines $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$.

Cette formule est soûcontraire à la précédente, car ce sont les mêmes racines, l'une positive & l'autre négative, qui ont des signes contraires, à ceux qu'ils ont dans la troisiéme formule, ainsi soit l'équation proposée dans la quatriéme formule $x^2 - 10x = 144$.

Sa grande racine positive est $x - 18 = 0$, & sa petite racine négative est $x + 8 = 0$; au contraire dans la troisiéme formule soit l'équation proposée $x^2 + 10x = 144$, la racine négative est $x^2 + 18 = 0$, la positive est $x - 8 = 0$.

Pour les trouver, 1°. j'ajoute d'abord dans chaque membre de l'équation proposée le quarré $+ \frac{1}{4}aa$ de la

Analyse. y

moitié du multiplicateur $-a$ du ſecond terme, ce qui donne $x^2 - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + b''$. & dans l'équation numérique $\frac{1}{4}$ 100, qui donne $x^2 - 10x + \frac{1}{4}100 = \frac{1}{4}100 + 144$.

2°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, j'ai $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$. dans la formule, & dans l'équation numérique, j'ai $x - 5 = \sqrt{\frac{1}{4}100 + 144}$, qui donne en abrégeant $x - 5 = \sqrt{25 + 144}$, ou $x - 5 = \sqrt{169}$, qui donne enfin $x - 5 = 13$, & par tranſpoſition $x = 5 + 13$, qui donne $x = 18$, c'eſt la grande racine.

3°. Pour avoir la ſeconde racine, j'ai par ſa formule $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$. & dans l'équation numérique $x = 5 - \sqrt{\frac{1}{4}100 + 144}$, qui donne $x = 5 - \sqrt{25 + 144}$, ou $x = 5 - \sqrt{169}$, ou $x = 5 - 13$, qui donne enfin $x = -8$, c'eſt la petite racine qui eſt négative.

Remarque ſeconde. Pour éviter les fractions, ſi j'ai l'équation $x^2 - 5x = 24$, où $\frac{1}{4}aa + b''$, ſont deux nombres dont on ne peut trouver exactement la racine, puiſque $a = 5$ eſt un nombre impair, dont la moitié eſt $2\frac{1}{2}$, pour éviter les fractions, je quarre le nombre impair $a = 5$, ſon quarré eſt $aa = 25$, je l'ajoûte au quadruple du dernier terme 24, puiſque 4 eſt dénominateur de la fraction $\frac{1}{4}aa$, la ſomme eſt $25 + 96 = 121$, j'ai donc $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b''} = \sqrt{121}$, dont la racine eſt 11, ce qui donne la ſomme des racines, j'en ôte 3 la plus grande moitié du multiplicateur 5, le reſte 8 eſt la plus grande racine poſitive, & cette grande moitié 3 du multiplicateur 5 eſt elle-même la petite racine négative;

j'aurai encore cette petite racine en ôtant le multiplicateur 5 de la grande racine 8.

Remarque troisiéme. On peut encore avoir la seconde racine d'une équation du second degré par la division aprés avoir trouvé la premiére, soit $x^2 + 10x - 144 = 0$, dont j'ai trouvé la racine positive $x - 8 = 0$, je divise l'équation par cette racine, & le quotient donne l'autre racine.

Diviseur	*Dividende*	*Quotient & 2de Racine*
$x - 8 = 0$	$x^2 + 10x - 144 = 0$	$x + 18 = 0$

Quotiens.

x . . .	$x^2 - 8x$	premier produit à ôter.
	$0 + 18x - 144$	premier reste.
$+ 18$	$+ 18x - 144$	second produit à ôter.
$= 0$	$0 \quad 0$	second & dernier reste.

Remarque quatriéme. Il y a une série infinie d'équations dans la troisiéme formule, qu'on peut former sur chacune des deux valeurs de l'inconnuë x, parce qu'on peut combiner tous les nombres possibles avec une valeur déterminée en nombre quelconque. Ainsi prenant une racine constante égale à 2, l'autre racine peut varier par la suite de tous les nombres à l'infini, ce qui fait une série infinie, & comme je peux prendre successivement pour la valeur constante de la premiére racine chacun des nombres à l'infini, & dans chaque cas prendre successivement tous les nombres à l'infini pour la seconde racine; il suit delà que je peux former une infinité de séries infinies d'équations du second degré dans cette troisiéme

formule, dans laquelle le multiplicateur *a* croissant continuellement, fait aussi croître à proportion le dernier terme ou l'homogéne de comparaison qui contient le produit des deux racines.

Outre cela sur chaque valeur déterminée de *a* constante, on peut former une série infinie d'équations dont tous les homogénes sont différens, ce qui donne des équations Arithmétiquement semblables à l'infini.

Séries infinies d'équations du second degré dans la troisiéme formule sur a *&* b *variables.*

Pour $x = 2$.	Pour $x = 4$.
$x^2 + 0x = 0$	$x^2 + 0x = 16$. Rac. — $4 + 4$
$x^2 + 1x = 6$	$x^2 + 1x = 20$. R. — $5 + 4$
$x^2 + 2x = 8$	$x^2 + 2x = 24$. R. — $6 + 4$
$x^2 + 3x = 10$	$x^2 + 3x = 28$. R. — $7 + 4$
$x^2 + 4x = 12$	$x^2 + 4x = 32$. R. — $8 + 4$
$x^2 + 5x = 14$	$x^2 + 5x = 36$. R. — $9 + 4$
$x^2 + 6x = 16$	$x^2 + 6x = 40$. R. — $10 + 4$
$x^2 + 7x = 18$	$x^1 + 7x = 44$. R. — $11 + 4$
&c. à l'infini.	&c. à l'infini.

Série infinie pour a *constant* $= 7$.

$x^2 + 7x = 0$
$x^2 + 7x = 8$
$x^2 + 7x = 18$
$x^2 + 7x = 30$
$x^2 + 7x = 44$
$x^2 + 7x = 60$
$x^2 + 7x = 78$
$x^2 + 7x = 98$
$x^2 + 7x = 120$ &c. à l'infini.

Remarque eimquiéme. Dans cette troisiéme formule toutes les racines sont inégales, il n'y en peut avoir d'égales, car elles sont dans la premiére formule qui comprend les équations pures & simples.

Dans la troisiéme formule la grande racine est toujours négative à cause du signe $+$ du second terme, c'est $x + a$, & la petite racine est positive, c'est $x - a$.

Remarque sixiéme. Dans la quatriéme formule $x^{2} - ax = b''$ les équations possibles sur une valeur déterminée du multiplicateur a du second terme forment deux séries, l'une finie réellement, qui arrive au zéro homogéne, après lequel commence la seconde série qui est infinie, dont tous les homogénes croissent à l'infini.

Dans la premiére série qui est finie, les deux racines sont toutes les deux positives & inégales.

Dans la seconde série qui est infinie, la grande racine est positive, & la plus petite est négative.

Série finie d'équations dans la quatriéme formule du second degré ;

Formule. $x^{2} - ax = b''$. en lettres.
La même $x^{2} - 7x = b''$. en chiffres.

Série finie.

$x^{2} - 7x = 0$. Rac. $x - 0 = 0$, $x - 7 = 0$.

Minimum. $x^{2} - 7x = 6$. Rac. $x - 1 = 0$, $x - 6 = 0$.

$x^{2} - 7x = 10$. Rac. $x - 2 = 0$, $x - 5 = 0$.

Maximum. $x^{2} - 7x = 12$. Rac. $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$.

Maximum. $x^{2} - 7x = 12$. Rac. $x - 4 = 0$, $x - 3 = 0$.

$x^{2} - 7x = 10$. Rac. $x - 5 = 0$, $x - 2 = 0$.

$x^{2} - 7x = 6$. Rac. $x - 6 = 0$, $x - 1 = 0$.

$x^{2} - 7x = 0$. Rac. $x - 7 = 0$, $x - 0 = 0$.

Point de partage & origine de la série infinie.

$x^2 - 7x = 8$. Rac. $x - 8 = 0$, $x x + 1 = 0$.
$x^2 - 7x = 18$. Rac. $x - 9 = 0$, $x x + 2 = 0$.
$x^2 - 7x = 30$. Rac. $x - 10 = 0$, $x x + 3 = 0$.
$x^2 - 7x = 44$. Rac. $x - 11 = 0$, $x x + 4 = 0$.
$x^2 - 7x = 60$. Rac. $x - 12 = 0$, $x x + 5 = 0$.
$x^2 - 7x = 78$. Rac. $x - 13 = 0$, $x x + 6 = 0$.
$x^2 - 7x = 98$. Rac. $x - 14 = 0$, $x x + 7 = 0$.
$x^2 - 7x = 120$. Rac. $x - 15 = 0$, $x x + 8 = 0$.
$x^2 - 7x = 144$. Rac. $x - 16 = 0$, $x x + 9 = 0$.
&c. &c. &c. à linfini.

Série des Equations de la quatriéme formule sur les valeurs de a *&* de x, *variables mais égales.*

Racines.

0. $x^2 - 0x = 0$.
1. $x^2 - 1x = 0$.
2. $x^2 - 2x = 0$.
3. $x^2 - 3x = 0$.
4. $x^2 - 4x = 0$.
5. $x^2 - 5x = 0$.
6. $x^2 - 6x = 0$.
7. $x^2 - 7x = 0$.
8. $x^2 - 8x = 0$.
9. $x^2 - 9x = 0$.

Série pour x conſtant $= 4$ & a variable.

$x^2 - 0x = 0$. Racines. $x - 4 = 0 \times x + 0 = 0$.

$x^2 - 1x = + 12$ . . . $x - 4 = 0 \times x + 3 = 0$.

$x^2 - 2x = + 8$ . . . $x - 4 = 0 \times x + 2 = 0$.

$x^2 - 3x = + 4$ . . . $x - 4 = 0 \times x + 1 = 0$.

$x^2 - 4x = - 0$ . . . $x - 4 = 0 \times x + 0 = 0$.

$x^2 - 5x = - 4$ . . . $x - 4 = 0 \times x - 1 = 0$.

$x^2 - 6x = - 8$ . . . $x - 4 = 0 \times x - 2 = 0$.

$x^2 - 7x = - 12$ . . . $x - 4 = 0 \times x - 3 = 0$.

$x^2 - 8x = - 16$ . . . $x - 4 = 0 \times x - 4 = 0$.

$x^2 - 9x = - 20$ . . . $x - 4 = 0 \times x - 5 = 0$.

$x^2 - 10x = - 24$ . . . $x - 4 = 0 \times x - 6 = 0$.

&c. à l'infini homogénes négatifs. &c. à l'infini.

Réſolution de la cinquiéme formule $x^2 + ax = - b''$.
& de la ſixiéme formule $x^2 - ax = - b''$.

Dans ces deux formules il y a deux racines qui ſont, ou toutes deux réelles, ou toutes les deux imaginaires ; de ſorte que celles qui ſont toutes les deux poſitives dans la cinquiéme formule ſont toutes les deux négatives dans la 6e. formule, ſuivant les différens cas qu'il faut déveloper.

La formule de ces deux racines eſt $x = \mp \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa - b''}$.

Or comme ſuivant cette formule, il faut prendre la ſomme ou la différence du binôme $\frac{1}{4} aa - b''$. qui eſt ſous le ſigne radical, & en tirer la racine, cette ſom-

me devient négative, lorſque $\frac{1}{4}aa$ eſt moindre que l'homogéne b'', qui répréſente en général tout nombre entier qui peut être l'homogéne ou le dernier terme de l'équation; or lorſque cette ſomme ou cette différence eſt négative, c'eſt une ſeconde puiſſance négative dont il faut tirer la racine quarrée, or il eſt impoſſible qu'une ſeconde puiſſance, & même que toute puiſſance paire $-b''$, en général ſoit procédée du ſigne $-$, puiſque $-b \times -b$ donne $+b''$, de même que $+b \times +b$ donne $+b''$. donc cette grandeur eſt une grandeur impoſſible, & ſa racine eſt imaginaire & impoſſible. Il ſuffit pour cela que $\frac{1}{2}a$ ſoit moindre que b'', car $\frac{1}{4}aa$ eſt moindre que $\frac{1}{2}a$, puiſque le quarré d'une fraction eſt moindre que la fraction & décroît en raiſon des puiſſances, c'eſt ce qui m'engage à conſidérer les différens rapports qui peuvent ſe rencontrer entre $\frac{1}{4}aa$ & b''.

Premier cas, lorſque $\frac{1}{4}aa = b''$. ou lorſque $\frac{1}{2}a = \sqrt{b''}$ alors les deux racines ſont égales, dans la cinquiéme formule $x + ax = -b''$, ſoit l'équation $x^2 + 10x = -25$ ſes deux racines ſont négatives, c'eſt $x + 5 = 0$. car ſuivant la formule c'eſt $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - b''}$, ou $x = -5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 25}$ ou $x = -5 \pm \sqrt{25 - 25}$, qui donne $x = -5 \pm \sqrt{0}$. & par tranſpoſition $x + 5 = 0$, & $x + 5 = 0$ qui ſont les deux racines négatives déſirées.

Dans la ſixiéme formule $x^2 - ax = -b''$, ſoit l'équation $x^2 - 10x = -25$, j'ai la formule $x = +\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - b''}$. qui donne $x = 5. \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 25}$, ou $x = 5. \pm \sqrt{25 - 25}$, ou $x = 5 \pm 0$. & par tranſpoſition $x - 5 = 0$, & $x - 5 = 0$, qui ſont les deux racines poſitives dans ce cas pour la

ſixiéme

ſixiéme formule; la formation de l'équation en donnera la preuve.

Le ſecond cas, eſt lorſque $\frac{1}{4}aa$ ſurpaſſe b'', ou lorſque $\frac{1}{2}a$ ſurpaſſe $\sqrt{b''}$ alors la ſomme ou le reſte du binôme $\frac{1}{4}aa - b''$ qui eſt ſous le ſigne radical $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b''}$, eſt toujours une grandeur poſitive, dans ce ſecond cas les deux racines ſont réelles, inégales & négatives dans la cinquiéme formule.

Exemple. Soit l'équation $x^2 + 10x = -16$. ſes deux racines réelles inégales & négatives ſont $x + 8 = 0$, $x + 2 = 0$. car j'ai par la formule $x = -5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 16}$, ou $x = -5 \pm \sqrt{25 - 16}$, ou $x = -5 \pm \sqrt{9}$, ou $x = -5 \pm 3$. donc $x = -2$ & $x = -8$.

Mais dans la ſixiéme formule les deux racines ſont réelles, inégales & poſitives. *Exemple.* Soit l'équation $x^2 - 10x = -16$, j'ai par la formule de la racine $x = +5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 16}$, ou $x = 5 \pm \sqrt{25 - 16}$ qui donne $x = 5 \pm \sqrt{9}$, ou $x = 5 \pm 3$, qui donne $x = 8$, & $x = 2$. Donc les deux racines poſitives ſont $x - 8 = 0$ & $x - 2 = 0$.

Le troiſiéme cas, eſt lorſque $\frac{1}{4}aa$ eſt moindre que b'', ou ce qui revient au même, lorſque b'' ſurpaſſe $\frac{1}{4}aa$. ou lorſque $\sqrt{b''}$ ſurpaſſe $\frac{1}{2}a$; dans ce troiſiéme cas les deux racines ſont imaginaires, mais égales & négatives dans la cinquiéme formule. *Exemple.* Soit l'équation $x^2 + 8x = -25$. Ses racines ſont $x = -4 \pm \sqrt{\frac{64}{4} - 25}$, ou $x = -4 \pm \sqrt{16 - 25}$, ou $x = -4 \pm \sqrt{-9}$ qui donne $x = -4 \pm \sqrt{-3}$. Donc les deux racines ſont $x + 4 + -3 = 0$, &

Analyſe. Z

$x + 4 - - 3 = 0$, qui sont deux racines imaginaires à cause des doubles signes $+ -$, & $- -$.

Dans la sixiéme formule, les deux racines sont imaginaires, égales & positives. Soit l'équation $x^2 - 8x = -25$, ses racines sont $x = 4 \pm \sqrt{\frac{64}{4} - 25}$, ou $x = 4 \pm \sqrt{16 - 25}$, ou $x = 4 \pm \sqrt{-9}$ qui donne $x = 4 \pm - 3$. Donc les deux racines positives, égales & imaginaires sont $x - 4 + - 3 = 0$, $x - 4 - - 3 = 0$.

La preuve se tire de la formation de ces équations par les deux racines trouvées.

Formation de l'Equation dans la cinquiéme Formule.

Par les deux racines imaginaires égales & négatives.

$$x + 4 + - 3 = 0$$
$$\times\ x + 4 - - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + - 3x$$
$$+ 4x + 16 + - 12$$
$$- - 3x - - 12 + 9 = 0$$

$$x^2 + 8x : (+ 16 + 9) + 25 = 0$$
ou $x^2 + 8x + 25 = 0$.

Remarque. Toutes les racines de l'équation ont le signe $+$, ce qui marque que toutes les racines sont négatives, ce qui fait que cette formule n'est d'aucun usage: d'ailleurs le dernier terme étant positif dans cette équation égalée à zéro, & dont l'exposant est un nombre pair; c'est une marque qu'il y a des racines imaginaires & en nom-

bre pair, puiſqu'elles ne peuvent ſe rencontrer que deux à deux, quatre à quatre, &c.

Donc les deux racines de l'équation ſont imaginaires.

Formation de l'Equation dans la ſixiéme formule.

Par les deux racines imaginaires égales & poſitives.

$$x - 4 + \sqrt{-3} = 0.$$
$$x\;x - 4 - \sqrt{-3} = 0.$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4x + \sqrt{-3x} \\ \quad - 4x + 16 - \sqrt{-12} \\ \quad\quad - \sqrt{-3x} + \sqrt{-12} + 9 = 0 \end{array}$$

$$x^2 - 8x\,(+16+9) + 25 = 0.$$

ou $x^2 - 8x + 25 = 0.$

Remarque. Les imaginaires communiquent leur contagion dans les racines à tout ce qui les accompagne; ainſi la racine $4 + \sqrt{-3}$ qui eſt en partie réelle & en partie imaginaire, ou mixte imaginaire eſt regardée comme totalement imaginaire.

L'imaginaire ſe détruit ici par des ſignes contraires, & le produit rétablit la grandeur réelle & poſitive $+ 9$. parce que le premier chifre des deux qui précede l'imaginaire eſt différent dans les deux racines; voyez ce que nous en avons dit au commencement de cette Section. Nous en parlerons encore dans la ſuite. Ces racines imaginaires marquent que le Problême qui donne cette équation, eſt abſolument impoſſible.

Ainſi on peut ſe diſpenſer de réſoudre ces ſortes d'équations lorſqu'on a remarqué que les racines ſont ima-

ginaires, si ce n'est qu'elles viennent de la résolution d'autres équations des degrez plus élevez.

Remarque générale. Dans toutes les équations du second degré, qui comme celle-ci a deux racines inégales, & positives. $x^2 - 10x = -21$

Il y a deux résolutions, & x^2 représente généralement le quarré des deux racines 7 & 3. $x^2 - 10x = -21$
qui sont 49 quarré de 7 grande rac. $49 - 70 = -21$
& 9 quarré de la petite racine 3. $9 - 30 = -21$
comme cela est général dans toutes les équations du second degré; il suit de là que toutes les équations du second degré ont autant de résolutions que l'exposant de leur degré contient d'unitez, ce qui est général dans toutes les équations déterminées.

La résolution des Equations du second degré qui ont des racines irrationelles.

Nous n'avons donné jusques ici que des exemples d'équations dont les racines sont rationnelles pour ne point embarrasser les commençans en multipliant les difficultez; j'expliquerai ici la maniére de résoudre les équations qui ont des racines réelles, irrationnelles; & ensuite je parlerai des racines irrationelles imaginaires, qui sont celles qu'on ne peut exprimer exactement ni en nombres entiers, ni par des fractions ni par un nombre mixte quelconque, mais dont on peut approcher à l'infini comme nous le verrons; comme entre les deux homogénes consécutifs & semblables 36 & 50, il y a dans la suite naturelle les treize nombres 37, 38, 39, 40, 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. qui remplissent cet interval. Ainsi entre l'équation $x^2 + 5x = 36$ dont les racines sont $x - 4 = 0$, $x + 9 = 0$, ou pour abréger dont les valeurs de x sont $+ 4$ & $- 9$ d'une part.

Et l'équation $x^2 + 5x = 50$ dont les valeurs de x sont $+5$ & -10. qui sont deux équations arithmétiquement semblables, puisqu'elles ne différent que dans le dernier terme. Si je les écris dans une colonne avec une distance j'en remplirai l'interval de treize équations qui seront aussi arithmétiquement semblables, parcequ'elles ne différeront que dans le seul dernier terme : or on ne peut exprimer les racines de ces équations par exemple de $x^2 + 5x = 37$ par aucun nombre entier ; car comme $6 \times 6 = 36$. & $6 \times 7 = 42$ dans les nombres, ainsi la racine de l'homogéne 37 est irrationnelle dans l'équation $x^2 + 5x = 37$. Si je prens pour racines $x - 4 - \sqrt{1} = 0$, & $x + 9 + \sqrt{1} = 0$, l'erreur sera $13\sqrt{1} = 13$ qui est la somme des deux racines, puisque $13\sqrt{1} = 13$.

$$\begin{array}{l} x - 4 - \sqrt{1} = 0 \\ \times\, x + 9 + \sqrt{1} = 0 \\ \hline x^2 - 4x - x\sqrt{1} \\ \quad + 9x - 36 - 9\sqrt{1} \\ \qquad + x\sqrt{1} - 4\sqrt{1} - 1 = 0. \\ \hline x^2 + 5x - 37 - 13\sqrt{1} = 0. \end{array}$$

Voici la série de treize équations arithmetiquement semblables dont les racines sont irrationelles, c'est-à-dire plus grande que $+4$ & -9, mais plus petites que $+5$ & -10 qui sont les racines rationelles des équations A & B qui sont au commencement & à la fin de cette Série.

Donc la petite racine est entre 4 & 5, la grande entre 9 & 10.

Série de treize équations semblables.

A... $x^2 + 5x = 36$ *Racines* $x - 4 - 0$ & $x + 9 = 0$

1... $x^2 + 5x = 37$

2... $x^2 + 5x = 38$

3... $x^2 + 5x = 39$

4... $x^2 + 5x = 40$

5... $x^2 + 5x = 41$

6... $x^2 + 5x = 42$

7... $x^2 + 5x = 43$

8... $x^2 + 5x = 44$

9... $x^2 + 5x = 45$

10... $x^2 + 5x = 46$

11... $x^2 + 5x - 47$

12... $x^1 + 5x = 48$

13... $x^2 + 5x = 49$

B... $x^3 + 5x = 50$ *Racines* $x - 5 = 0$, & $x + 10 = 0$

Comme il n'y a aucun nombre entre 4 & 5, ni entre 9 & 10 qui se suivent immédiatement & qui ne différent que de l'unité; donc les racines approchées à l'unité près de ces treize équations sont irrationelles $+ 4 +$, ou $+ 5 -$, & $- 9 +$, ou $- 10 -$, c'est-à-dire, que $+ 4$ & $- 9$ sont approchées par défaut étant trop petites, mais $+ 5$ & $- 10$ sont par excès étant trop grandes.

Pour en approcher à l'infini, il faut employer la nouvelle Méthode d'approximation qui suit dans le second Livre.

SECTION QUATRIE'ME.

La formation & la résolution des Equations du troisiéme degré.

LEs Equations du troisiéme degré sont formées par la multiplication de trois équations simples du premier degré ou pour abréger par une équation quelconque du second degré multipliée par une équation simple du premier degré.

Formation par trois racines.

$$x - 2 = 0$$
$$\times\, x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x$$
$$- 3x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\times\, x + 5 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6x$$
$$+ 5x^2 - 25x + 30 = 0$$

$$x^3 \pm 0x^2 - 19x + 30 = 0.$$
$$\text{ou } x^3 \pm 0x^2 - 19x = -30.$$

Formation par une Equation du second degré & une du premier degré.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\times\ x + 4 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6x$$
$$+ 4x^2 - 20x + 24 = 0$$

$$x^3 - 1x - 14x + 24 = 0$$
$$\text{ou } x^3 - 1x^2 - 14x = -24$$

Le dernier terme qui est l'homogéne de comparaison contient le produit des trois racines, il s'agit de les trouver, elles peuvent-être réelles ou imaginaires, rationelles ou irrationelles, &c.

La formule générale de toutes les équations possibles du troisiéme degré est $\pm x^3 \pm ax^2 \pm a^2 x = b'''$. dans laquelle b''' est l'homogéne de comparaison, c'est un nombre quelconque qui a trois dimentions par la multiplication des trois racines. Les multiplicateurs a & a^2, sont aussi des nombres.

La formule générale de Tartalea pour les racines est

$$x = \pm\sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{VI} \pm \frac{1}{27}a^3}}$$
$$\pm\sqrt[3]{\pm\frac{1}{2}b''' \mp \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{VI} \pm \frac{1}{27}a^3}}.$$

Cardan qui vivoit dans le même tems attribuë cette formule à Scipio Ferreus, dans son Traité d'Algebre, comme au premier inventeur; mais il dit que Tartalea a fait aussi dans la suite la même découverte.

METHODE

METHODE POUR TROUVER LA *Formule de la premiére racine des Equations du troisiéme degré.*

I. Soit $x^3 = * - a'' x + b'''$.

Pour trouver la formule de sa premiére racine.

1°. Je suppose $x = m - \frac{a}{3m}$ son cube est $x^3 = m^3 - am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$.

2°. Multipliant tout par a dans la premiére hypothése $x = m - \frac{a}{3m}$, j'ai $ax = am - \frac{a^2}{3m}$.

3°. Substitüant cette valeur dans le second membre de la premiére équation $x^3 = - a'' x + b'''$, j'ai $- a'' x + b''' = - am + \frac{a^2}{3m} + b'''$.

4°. Donc l'équation proposée $x^3 = - a'' x + b'''$, se changera en celle-ci $m^3 - am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3} = - am + \frac{a^2}{3m} + b'''$, ce qui donne par transposition & par soustraction $m^3 - \frac{a^3}{27m^3} = b'''$.

5°. Je multiplie les deux membres par m^3, ce qui donne $m^6 - \frac{1}{27} a^3 = b''' m^3$, & par transposition $m^6 - b''' m^3 = \frac{1}{27} a^3$.

6°. J'ajoûte $\frac{1}{4} b^{vi}$. de chaque côté, ce qui donne $m^6 - b''' m^3 + \frac{1}{4} b^{vi}. = \frac{1}{4} b^{vi}. + \frac{1}{27} a^3$, dont la racine quarrée est $m^3 - \frac{1}{2} b''' = \sqrt{\frac{1}{4} b^{vi} + \frac{1}{27} a^3}$, & par transposition $m^3 = \frac{1}{2} b''' + \sqrt{\frac{1}{4} b^{vi} + \frac{1}{27} a^3}$

dont la racine cubique est $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b^{vi} + \frac{1}{27}a^3}}$

Voilà la premiére partie de la racine qui est trop grande, puisque j'ai m & non pas x, & par la premiére hypotése $x = m - \frac{a}{3m}$, il faut donc en retrancher $- \frac{a}{3m}$ qui est la seconde partie de la racine en continüant comme il suit.

7°. Je substituë cette premiére partie trouvée de la racine dans l'équation simple de la premiére hypotése, $x = m - \frac{a}{3m}$ la substitution donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b^{vi} + \frac{1}{27}a^3}} - \frac{a}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b^{vi} + \frac{1}{27}a^3}}}$$

Cette formule ne demande qu'une seule extraction d'une racine cubique, & d'une racine quarrée.

8°. Mais si je veux avoir la formule ordinaire de Tartaléa rapportée par Cardan, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur de cette fraction par

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b^{vi} + \frac{1}{27}a^3}}$, qui donnera la formule entiére qui suit pour la premiére racine

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$$

où j'ai supprimé les exposans italiques de b pour abréger, mais cette formule demande deux extractions de racines cubiques, & deux de racines quarrées.

II. Soit $x^3 = * + a'' x + b'''$.

Pour trouver la formule de sa première racine.

1°. Je suppose $x = m + \frac{a}{3m}$ son cube est $x^3 = m^3 + am + \frac{a^2}{3m} + \frac{a^3}{27m^3}$.

2°. Je multiplie tout par a dans la première hypothése $x = m + \frac{a}{3m}$, ce qui donne $ax = am + \frac{a^2}{3m}$

3°. Je substitué cette valeur dans le second membre de l'équation proposée, ce qui donne $ax + b''' = am + \frac{a^2}{3m} + b'''$.

4°. Je substituë ces deux valeurs dans les deux membres de l'équation proposée, $x^3 = + a'' x + b'''$, ce qui donne $m^3 + am + \frac{a^2}{3m} + \frac{a^3}{27m^3} = am + \frac{a^2}{3m} + b'''$, qui donne en abrégeant par transposition & par soustraction $m^3 + \frac{a^3}{27m^3} = b'''$.

5°. Je multiplie ces deux membres par m^3, ce qui donne $m^6 + \frac{1}{27} a^3 = b''' m^3$, & par transposition, $m^6 + b''' m^3 = - \frac{1}{27} a^3$.

6°. J'ajoute de chaque côté $\frac{1}{4} b^{vi}$, ce qui donne $m^6 - b''' m^3 + \frac{1}{4} b^{vi} = \frac{1}{4} b^{vi} - \frac{1}{27} a^3$ dont la racine quarrée est $m^3 - \frac{1}{2} b''' = \sqrt[2]{\frac{1}{4} b^{vi} - \frac{1}{27} a^3}$, & par transposition $m^3 = + \frac{1}{2} b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4} b^{vi} - \frac{1}{27} a^3}$, dont la racine cubique est $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4} b^{vi} - \frac{1}{27} a^3}}$, c'est la 1re. partie de la racine qui est trop petite, car par l'hypothése x surpasse m, de $+ \frac{a}{3m}$; pour trouver cette

partie qu'il faut ajouter, je continuë

7°. Je substituë cette valeur trouvée de m dans la premiére hypothése $x = m + \frac{a}{3m}$, la substitution donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{vi} - \frac{1}{27}a^3}} + \frac{a}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{vi} - \frac{1}{27}a^3}}}$$

cette formule n'a besoin que de l'extraction d'une racine cubique & d'une racine quarrée pour trouver la premiére racine désirée.

8°. Pour réduire cette expression à celle de Tartaléa, je multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction trouvée par $\sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' - \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{vi} - \frac{1}{27}a^3}}$, le produit donne la formule entiére qui suit.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}},$$

où j'ai supprimé les exposans italiques de b pour abréger; mais il faut dans cette formule deux extractions de racines cubiques & deux extractions de racines quarrées; lorsque $\frac{1}{4}b^{vi}$ est moindre que $\frac{1}{27}a^3$, la racine quoique réelle vient sous une forme imaginaire d'où il est impossible de la tirer. *C'est le cas irréductible.*

III. Soit $x^3 = * + a''x - b'''$.

Pour trouver la formule de sa premiére racine.

1°. Je change les signes de la proposée dans le premier & le dernier terme, ce qui donne $-x^3 = + ax + b'''$, ensuite je suppose $-x = m + \frac{a}{3m}$, son cube est $-x^3 = m^3 + am + \frac{a^2}{3m} + \frac{a^3}{27m^3}$, ou bien $x^3 = -m^3 - am - \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$.

2°. Je multiplie tout par a dans l'hypothése de $x = m + \frac{a}{3m}$, ce qui donne $ax = -am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$.

3°. Je substituë cette valeur dans le second membre de la premiére équation, j'ai $ax - b''' = -am + \frac{a^2}{3m} + b'''$ & substitüant la premiére valeur à la place de $-x^3$, j'ai $-m^3 - am - \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3} = -am - \frac{a^2}{3m} + b'''$.

4°. Donc abrégeant par transposition & par soustraction, j'ai $-m^3 + \frac{a^3}{27m^3} = b'''$.

5°. Je multiplie tout par m^3, ce qui donne $-m^6 + \frac{1}{27}a^3 = b'''m^3$, & par transposition $m^6 - b'''m^3 = -\frac{1}{27}a^3$.

6°. J'ajoute $\frac{1}{4}b^{vi}$ dans chaque membre, ce qui donne $m^6 - b'''m^3 + \frac{1}{4}b^{vi} = \frac{1}{4}b^{vi} - \frac{1}{27}a^3$ dont la rac. quarrée est $m^3 - \frac{1}{2}b''' = \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{vi} - \frac{1}{27}a^3}$, & par transposition $m^3 = \frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{vi} - \frac{1}{27}a^3}$, dont la racine cubique est $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{vi} - \frac{1}{27}a^3}}$, c'est la premiére partie de la racine qui est trop petite, car $-x$ surpasse m, puisque par la premiére hypothése $-x = m + \frac{a}{3m}$, je continuë pour trouver la partie qu'il faut ajouter à cette racine.

7°. Je substituë cette valeur de m dans la premiére hypothése $-x = m + \frac{a}{3m}$, ce qui donne

$$-x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}b^{vi} - \tfrac{1}{27}a^3}} \;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\frac{a}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}b^{vi} - \tfrac{1}{27}a^3}}}$$

$+$ $3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}b^{vi} - \tfrac{1}{27}a^3}}$, qui ne demande qu'une extraction de racine cubique & une extraction de racine quarrée.

8°. Mais pour réduire cette expreſſion à la formule ordinaire de la premiére racine du troiſiéme degré, il faut multiplier comme ci-deſſus le numérateur & le dénominateur de cette fraction trouvée, le produit donnera la formule de Tartaléa, $-x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{27}a^3}}$ $+ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b - \sqrt[2]{\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{27}a^3}}$, qui demande l'extraction de deux racines quarrées qui ſont impoſſibles, & viennent ſous une forme imaginaire, lorſque $\tfrac{1}{4}b^{vi}$ eſt moindre que $\tfrac{1}{27}a^3$, quoique la racine ſoit réelle, ce qui fait *le cas irréductible.*

IV. Soit $x^3 = * - a''x - b'''$.

Pour trouver la Formule de ſa premiére racine.

1°. Je change les ſignes du premier & du dernier terme, ce qui donne $-x^3 = -a''x + b'''$. & je ſuppoſe $-x = m - \frac{a}{3m}$ ſon cube eſt $-x^3 = m^3 - am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$.

2°. Je multiplie tout par a dans la premiére hypothéſe, ce qui donne $+ax = am - \frac{a^2}{3m}$.

3°. Subſtituant ces deux valeurs dans l'équation pro-

posée $x^3 = - a''x$, j'ay $m^3 - am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$ $= am - \frac{a^2}{3m} + b'''$. qui donne en abrégeant par transposition & soustraction $m^3 - \frac{a^3}{27m^3} = b'''$.

4°. Je multiplie ces deux membres par m^3 ; ce qui donne $m^6 - \frac{a^3}{27m^3} = b'''m^3$ & par transposition $m^6 - b'''$ $= + \frac{1}{27}a^3$.

5°. J'ajoute de chaque côté $\frac{1}{4}b^{VI}$, ce qui donne $m^6 - b'''m^3. + \frac{1}{4}b^{VI} = \frac{1}{4}b^{VI} + \frac{1}{27}a^3$, dont la racine quarré est $m^3 - \frac{1}{2}b''' = \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{VI} + \frac{1}{27}a^3}$ qui donne par transposition $m^3 = \frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{VI} + \frac{1}{27}a^3}$ dont la racine cubique est $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{VI} + \frac{1}{27}a^3}}$ c'est la premiére partie de la racine qui est trop grande, car m surpasse x, puisque par l'hypothése $- x = m$ $- \frac{a}{3m}$. Je continuë pour trouver la partie qu'il faut retrancher de la racine.

6°. Je substituë cette valeur de m trouvée dans l'hypothése $- x = m - \frac{a}{3m}$, la substitution donne

$$- x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{VI} + \frac{1}{27}a^3}}$$

$$- \frac{a}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{IV} + \frac{1}{27}a^3}}}$$ qui n'a besoin que de l'extraction d'une racine cubique & d'une racine quarrée.

7°. Pour réduire cette expression à la formule ordinaire, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur de cette fraction par le même multiplicateur

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b^{VI} + \frac{1}{27}a^3}}$ le produit donnera

la formule ordinaire pour la premiére racine $x =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$

qui demande l'extraction de deux racines cubiques & de deux racines quarrées.

Nombre des Formules du troisiéme degré.

Toutes les équations possibles du troisiéme degré contiennent dix-huit cas qui donnent les dix-huit formules suivantes.

1.. $x^3 + b''' = 0$ 2.. $x^3 - b''' = 0$	} *Les deux Formules des Equations pures & simples.*
2.. $x^3 - ax = b'''$	*Une racine réelle positive, & deux négatives égales à la somme de la positive.*
4.. $x^3 - ax = - b'''$	*Toute entiére dans le cas irréductible.*
5.. $x^3 - ax = + b'''$	*Une racine négative égale à la somme des deux négatives.*
6.. $x^3 + ax = - b'''$	
7.. $x^3 - ax^2 \pm 0x = + b'''$	
8.. $x^3 - ax^2 \pm 0x = - b'''$	*Formule toute entiére dans le cas irrédutible.*
9.. $x^3 + ax^2 \pm 0x = b'''$	
10.. $x^{m} + ax^2 \pm 0x = - b'''$	

11... $x^3 - ax^2 - a^2x = b'''$.

12... $x^3 - ax^2 - a^2x = - b'''$.

13... $x^3 - ax^2 + a^2x = b'''$.

14... $x^3 - ax^2 + a^2x = - b'''$.

15... $x^3 + ax^2 - a^2x = b'''$.

16... $x^3 + ax^2 - a^2x = - b'''$.

17... $x^3 + ax^2 + a^2x = b'''$.

18... $x^3 + ax^2 + a^2x = - b'''$.

De ces dix-huit formules il en faut retrancher d'abord quatre formules qui ſont purement négatives & qui ne peuvent être jamais d'aucun uſage y compris la premiére qui eſt une équation pure & ſimple, mais négative.

Je retranche encore la ſeconde équation pure & ſimple $x^3 = b'''$. Sa réſolution eſt expliquée dans la Section troiſiéme. Il ne reſte donc que treize formules, qu'on peut réduire à cette ſeule & unique formule $\pm x^3 \pm ax^2 \pm a^2x = \pm b$.

Réduction des dix-huit Formules du troiſiéme degré à trois ſeules Formules.

Après avoir réduit les dix-huit formules des équations du troiſiéme degré à treize, on pourroit abſolument les réduire à une ſeule, dans laquelle on pourroit ſuivant les cas ſuppoſer quelques termes nuls, lorſqu'ils ſont évanoüis dans quelques équations propoſées, avec les différentes combinaiſons des ſignes, tant dans la formule générale des équations, que dans la formule générale des racines. Mais comme cela n'empêche pas la multiplicité des cas,& que cela eſt incommode pour les commençans,

d'ailleurs qu'il y a des équations & même des formules entiéres qui tombent dans le cas irréductible, dont on ne peut trouver les racines imaginaires, soit rationelles soit irrationelles par la formule de Tartalea; j'ai jugé à propos de réduire les dix-huit formules aux trois suivantes qui comprennent toutes les difficultez des équations du troisiéme degré, & ausquelles on pourra ramener les équations des autres formules de la maniére dont nous l'expliquerons dans la suite par l'évanoüissement de quelque terme.

1re. Form.... $x^3 + ax = b'''$. c'est la 5e. des anciennes.

2de. Form.... $x^3 - ax = b'''$. c'est la 3e. des anciennes.

3e. Form.... $x^3 - ax = - b'''$. c'est la 4e. des ancien.

Le second terme manque dans ces trois formules, c'est la seconde puissance x^2 que je suppose égale à zéro : ainsi les équations dans ces trois formules ont, ou deux racines positives dont la somme est égale à la troisiéme racine qui est négative, ou il y a une racine positive qui est égale à la somme des deux autres qui sont négatives.

Dans la premiére formule le nombre des équations possibles est infini, il n'y a qu'une seule série infinie, & il n'y a qu'une seule racine réelle & positive, qui est égale à la somme des deux autres qui sont négatives & mixtes imaginaires ; dans la seconde & rroisiéme formule il y a deux séries, une finie l'autre infinie.

Dans la seconde formule le nombre des équations possibles est égal au quarré moins un de la plus grande racine determinée. Si $x = 10$, il y a 99 équations, le centiéme homogéne est zéro & aprés commence la série infinie des équations de la troisiéme formule, entre lesquelles il y en a un quart qui tombe dans le cas irréductible, & le reste tombe dans le cas ordinaire qui est réductible.

Il n'y a qu'une seule racine réelle & positive, c'est la

grande ; les deux autres ſont négatives & imaginaires dans le cas ordinaire qui comprend les trois quarts des équations poſſibles.

Mais dans le cas irréductible les trois racines ſont réelles, la grande eſt poſitive & les deux autres ſont négatives & irrationelles.

Dans la troiſiéme formule qui tombe toute entiére dans le cas irréductible, il n'y a qu'une ſeule ſérie infinie, le nombre des équations poſſibles eſt infini.

Les équations poſſibles ſur la même valeur déterminée de x de la ſeconde & de la troiſiéme formule, forment une ſuite d'équations compoſées de deux ſéries, l'une finie dans la ſeconde formule qui commence au zéro, & continuë par l'équation pure & ſimple d'où elle retombe encore au zéro, qui eſt le point de partage de la ſeconde & de la troiſiéme formule, d'où partent les homogénes poſitifs d'un côté pour la ſeconde formule en montant, & les homogénes négatifs d'un autre côté en deſcendant pour la troiſiéme formule dont les homogénes négatifs s'étendent à l'infini, & donnent la ſeconde ſérie qui eſt infinie.

Dans cette troiſiéme formule, il y a deux racines poſitives & une racine négative qui eſt égale à la ſomme des deux poſitives, c'eſt pourquoi la ſeconde & la troiſiéme formule ſont des équations ſoû-contraires.

Série des Equations de la seconde & de la troisiéme formule sur la valeur de x = 10.

$x^3 - 4x = b'''$	Formule seconde.
$x^3 - 0x = 10.00.$	Equation pure & simple du 3me. degré.
$x - 1x = 990.$	Origine du 1er. cas réductible, où $\frac{1}{27}a^3 = \frac{1}{4}b^{vi}$. la racine est
$x^3 - 2x = 980.$	$x = \sqrt{\frac{1}{3}a} = \sqrt{\frac{1}{2}b}$
$x^3 - 3x = 970.$	
&c. &c. &c.	

$x^3 - 30x = 700.$	Premiére époque où $30x$ est triple de la racine 10.
$x^3 - 31x = 690.$	La racine est $x = \sqrt{\frac{4}{3}a}$
$x^3 - 32x = 680.$	$= \sqrt[3]{4b'''}$.
&c. &c. &c.	Fin du cas réductible.

$x^3 - 75x = 250.$	Seconde époque où 75 $x = \frac{3}{4}$ de 100 quarré de 60. & 25
$x^3 - 76x = 240.$	$= \frac{100}{4}$. c'est l'origine du cas ir-
$x^1 - 77x = 230.$	réductible qui continuë en des-
&c. &c. &c.	cendant.

$x^3 - 80x = 200.$	Troisiéme époque,
$x^2 - 81x = 190.$	
$x^3 - 82x = 180.$	
&c. &c. &c.	

$x^3 - 91x = 90.$

$x^3 - 92x = 80.$

$x^3 - 93x = 70.$

$x^3 - 94x = 60.$

$x^3 - 95x = 50.$

$x^2 - 96x = 40.$

$x^3 - 97x = 30.$

$x^3 - 98x = 20.$

$x^3 - 99x = 10.$

$x^3 - 100x = 0.$ Equation pure & ſimple du ſecond degré.

Et point de partage entre les homogénes poſitifs & négatifs de la ſeconde & de la troiſiéme formule.

Suite de la ſérie des équations de la ſeconde & troiſiéme formule.

$x^3 - ax = - b''$ Troiſiéme formule toute entiére dans le cas irréductible.

$x^3 - 100x = 0$ Equation pure & ſimple du ſecond degré, qui eſt le point de partage entre les deux formules, ou terme commun d'où partent les homogénes poſitifs de la 2e. formule, & les négatifs de la 3e. formule.

$x^3 - 101x = -10$

$x^3 - 102x = -20$

$x^3 - 103x = -30$

&c. &c. &c.

$x^3 - 120x = -200$	Premiére époque où $\sqrt[2]{a}$ surpasse $x = 10$ de l'unité.
$x^3 - 121x = -201$	
$x^3 - 122x = -202$	
&c. &c. &c.	
$x^3 - 300x = -2000$	Seconde époque où le cœfficient a est triple du quarré de $x = 10$, & b''' est le double du cube.
$x^3 - 301x = -2001$	
$x^3 - 302x = -2002$	
&c. &c. &c.	
$x^3 - 330x = -2300$	Troisiéme époque où b''' surpasse le triple du quarré de $x = 10$.
$x^3 - 331x = -2301$	
&c. &c. &c. à l'infini.	

On verra dans la Méthode de résoudre les équations par des tables la parfaite analogie qui regne entre les équations de la seconde & de la troisiéme formule qui arrivent au zéro, qui est le terme commun, d'où partent la série finie de l'une, & la série infinie de l'autre de ces deux formules : ceci suffit pour s'en former une idée assez claire pour les résoudre par la premiére Méthode que nous donnons ici, par la formule de Tartaléa ou Tartaglia géométre de grande réputation, qu'il publia dans ses livres imprimez à Venise en 1556.

Cette formule pour la premiére & la plus grande racine des équations du troisiéme degré, $x^3 \pm a'' x' = b'''$, est $x = \pm \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} b + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4} bb \pm \tfrac{1}{27} a^3}}$ $+ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} bb \mp \sqrt[2]{\tfrac{1}{4} bb \mp \tfrac{1}{27} a^3}}$.

Mais cette formule a trois défauts, le premier c'eſt d'engager à pluſieurs extractions de racines quarrées & cubiques, pour y rémédier il faut ſe ſervir des tables des quarrez & des cubes naturels pour tous les cas où les racines ſont rationelles, & de nos formules d'approximation pour tous les cas où les racines ſont irrationelles.

Mais le ſecond défaut de cette formule & le plus important, c'eſt que ces opérations ſont inutiles dans le cas irréductible. Voilà le défaut eſſentiel de cette Méthode; elle n'eſt point générale, & comme le cas irréductible embraſſe une grande partie des équations poſſibles du troiſiéme degré, la formule de Tartaléa a des bornes très limitées, & jette dans l'embarras du calcul ſans pouvoir l'éviter ni le prévenir.

Le troiſiéme défaut, elle donne la racine quoique réelle déguiſée ſous une forme imaginaire.

En quoi conſiſte le cas irréductible.

Dans les équations du troiſiéme degré, on diſtingue trois cas dans l'expreſſion générale de la formule des racines inventée par Tartaléa, ces trois cas ſont déterminez par le rapport du cœfficient ou du multiplicateur a, avec l'homogéne ou le dernier terme de l'équation b, auquel nous donnons dans la ſuite un expoſant en chifres Romains b''', pour indiquer ſes trois dimenſions, de même nous donnons un expoſant au multiplicateur a'', quoiqu'ils ne ſoient qu'un ſeul nombre l'un & l'autre, ou une lettre connuë, afin de conſerver la loi des homogénes, mais nous les ſupprimons ici pour abréger.

Les trois cas ſont, 1°. lorſque $\frac{1}{27} a^3 = \frac{1}{4} bb$. c'eſt-à-dire lorſque le cube du tiers du multiplicateur a eſt égal au quarré de la moitié de l'homogéne b.

Exemple. Soit $x^3 - 12 x = 16$.

1°. Je prends la moitié de 16, c'est 8, son quarré est 64 $= \frac{1}{4} bb$. 2°. Le tiers de 12 est 4, je l'éleve au cube, j'ai $64 = \frac{1}{27} a^3$, donc j'ai dans cette équation $\frac{1}{27} a^3 = \frac{1}{4} bb$. Je résous l'équation suivant la formule de Tartaléa qui suit, $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b + \sqrt{\frac{1}{4} bb - \frac{1}{27} a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} b - \sqrt{\frac{1}{4} bb - \frac{1}{27} a^3}}$, j'ai $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2} + \sqrt{\frac{256}{4} - 64}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{64 - 64}}$, ce qui donne $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8}$, qui donne $x = 2 + 2 = 4$; ou $x = 4$.

Donc dans ce premier cas, la premiére racine est toujours $x = \sqrt{\frac{1}{3} a} + \sqrt{\frac{1}{3} a}$, ou $x = \sqrt{\frac{4}{3} a}$, ou bien on peut prendre $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} b}$, ou $x = \sqrt[3]{b}$, c'est-à-dire, que dans le premier cas on peut prendre indifféremment le double de la racine quarrée du tiers du cœfficient a, ou le double de la racine cubique de la moitié de l'homogéne b.

Ce premier cas est toujours réductible, puisqu'on peut le résoudre par la formule de Tartaléa, & le réduire aux équations simples du premier degré, dont il contient le produit. ce qui se fait en divisant l'équation proposée par la racine trouvée, car le quotient sera une équation du second degré qu'on peut résoudre aisément par la formule du second degré, ses deux racines sont égales

Le second cas est, lorsque $\frac{1}{27} a^3 < \frac{1}{4} bb$, c'est-à-dire, lorsque le cube du tiers du cœfficient a est moindre que le quarré de la moitié de l'homogéne b; alors le cas est encore réductible, mais les racines viennent sous une forme imaginaire, la grande racine est réelle, les deux autres sont mixtes imaginaires; mais en apparence seulement,

lement, car elles ont des signes contraires qui détruisent la partie imaginaire.

Le troisiéme cas est, lorsque $\frac{1}{27} a^3 > bb$, c'est-à-dire, lorsque le cube du tiers du cœfficient *a* surpasse le quarré de la moitié de l'homogéne *b*, c'est ce qu'on appelle le cas *irréductible*, parce que la formule de Tartaléa ne peut le réduire aux équations simples du premier degré, qui sont les racines dont il contient le produit, parce qu'elle presente ces racines sous une forme imaginaire irrationelle, dont on ne peut les tirer pour les exprimer, quoiqu'elles soient réelles.

Moyen court & facile pour connoître ces trois cas dans une équation.

1°. J'ajoute au cœfficient *a* son tiers, & je tire la racine quarrée de la somme.

2°. Je multiplie l'homogéne *b* par 4, & je tire la racine cubique du produit.

3°. Je compare ces deux racines ensemble, si elles sont égales, l'équation est dans le premier cas réductible; si la racine quarrée de la somme des quatre tiers de *a*, ou seulement son premier chifre est moindre que la racine cubique de 4 *b*, ou seulement que le premier chifre de cette racine cubique, c'est le second cas, encore réductible.

Au contraire si la racine quarrée surpasse la racine cubique, ou seulement que le premier chifre de la racine quarrée surpasse le premier chifre de la racine cubique, l'équation est dans le troisiéme cas, & par consequent irréductible.

Méthode pour éviter les fractions dans la résolution des Equations du troisiéme degré.

On ne trouvera point de fractions dans la résolution

d'une équation du troisiéme degré, si l'homogéne b est un nombre pair, & si en même tems le cœfficient a est un nombre divisible par 3, qui est l'exposant du degré de l'équation.

Or l'homogéne b est toujours un nombre pair, lorsque son dernier chifre est l'un des chifres suivans. o. 2. 4. 6. 8. &c. ce qui se distingue du premier coup d'œil.

Pour connoître si a est divisible par 3, il suffit d'ajouter ensemble ses chifres comme dans la preuve de 9, & d'en ôter trois autant de fois qu'il est possible, s'il ne reste rien, c'est une preuve qu'il est divisible par 3.

Mais pour rendre b un nombre pair lorsqu'il ne l'est pas, il faut le préparer, & il y a trois cas.

1°. Si b étant impair, a est divisible par 3.

2°. Si b étant pair, a n'est pas divisible par 3.

3°. Si b étant impair, a n'est pas divisible par 3.

Dans le premier cas où b étant impair, a est divisible par 3, je multiplie a par 4, & b par 8, ce qui me donne une équation préparée & transformée avec une autre inconnuë dont je cherche la racine, dont la moitié sera la premiére racine de l'équation proposée.

Exemple. dans . $x^3 - a\, x = b'''$..

Soit . . . . $x^3 - 18\, x = 35$.

Je multiplie . . . $\times 4$ & $\times 8$.

Produit $y^3 - 72\, x = 280$. dont je trouve la racine par la Méthode ci-après $y - 10 = 0$, dont la moitié donne $x - 5 = 0$ pour la racine de l'équation proposée.

Dans le second cas où b qui est toujours de trois dimensions est pair, & a qui est toujours de deux dimensions n'est pas divisible par 3, je multiplie a par 9, qui est le quarré de 3, & b par 27 qui est le cube de 3, ou

par $30 - 3 = 27$, ce qui eſt le plus commode pour la multiplication.

Exemple. dans $x^3 - ax = 3$.	168 ou	168
Soit . . $x^3 - 8x = 168$.	$\times 27$	$\times 30 - 3$
Je multiplie $\times 9$ & $\times 27$	1176	50 400
ce qui donne $y^3 - 72x = 4536$.	336	-504
	4536	4536

J'opére ſur cette équation transformée par la Méthode ſuivante, & je trouve $y - 18 = 0$, c'eſt la racine dont le tiers donne $x - 6 = 0$ pour la racine de l'équation propoſée.

Dans le troiſiéme cas où b étant impair, a n'eſt point diviſible par 3, je prends 6 double de 3, ſon quarré eſt 36, & ſon cube eſt 216. Or comme par hypothéſe & par conſtruction, a eſt un quarré imparfait ou un produit de deux dimenſions, & b un cube imparfait ou un produit de trois dimenſions, c'eſt pourquoi je lui donne un expoſant en chifres Romains b''' qui ne marque point une troiſiéme puiſſance, mais un produit de trois dimenſions, pour conſerver la Loi des homogénes entre les termes de l'équation ; c'eſt-à-dire, afin qu'ils aïent chacun trois dimenſions, c'eſt pourquoi je multiplie a par 36, quarré de 6, & b par 216 cube de 6, ce qui donne une équation transformée mettant une autre inconnuë y à la place de x, dont je trouverai la racine par la Méthode qui ſuit, & la ſixiéme partie de cette racine ſera la racine de l'équation propoſée.

Exemple dans.... $x^3 - ax = b'''$

Soit . . . . . . $x^3 - 8x = 85.$

Je multiplie par × 36 & × 216.

48	510.
24.	85.
	170.

Ce qui donne $y^3 - 288 = 18360$, dont je trouve la premiére & plus grande racine par la Méthode suivante $y - 30 = 0$, je divise 30 par 6, sa sixiéme partie ou son quotient est 5, qui donne $x - 5 = 0$, pour la premiére & plus grande racine de l'équation proposée qui est positive.

La résolution des Equations du troisiéme degré.

Dans la premiére formule $x^3 + ax = b'''$.

Il n'y a qu'une seule série mais infinie d'équations possibles dans cette formule, soit sur la valeur déterminée de l'une des racines x, soit sur une valeur déterminée du multiplicateur a; on trouve dans l'un & l'autre de ces cas une série infinie, & ces deux séries sont différentes, puisqu'elles viennent d'une origine différente.

Dans cette formule qui comprend le cas ordinaire réductible, on peut toujours trouver la premiére racine des équation & les abaisser ensuite au second degré par la division pour avoir les deux autres.

Puisque le second terme manque dans cette formule, il y a une racine réelle & positive, égale à la somme des deux autres qui sont négatives imaginaires & égales.

La grande racine réelle & positive ne vient jamais sous une forme imaginaire par la formule de Tartaléa.

c'est $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$ . . . .

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt[2]{\frac{1}{4}b + \frac{1}{27}a^3}}$.

Les deux autres racines sont négatives, imaginaires & égales, on les trouve par cette formule, supposant $z =$ à la premiére racine trouvée.

$$y = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-a - \frac{3}{4}zz}.$$

Exemple. Soit l'équation $x^3 + 45x = 98$.

Je me sers de la formule $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$

$-\sqrt{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$, qui donne

$\sqrt[3]{\frac{98}{2} + \sqrt{\frac{9604}{4} + \frac{91125}{27}}}$ — . . . .

$-\sqrt[3]{\frac{98}{2} + \sqrt{\frac{9604}{4} + \frac{91125}{27}}}$ ce qui donne

$\sqrt[3]{49 + \sqrt{2401 + 3375}}$ — . . . .

$-\sqrt[3]{49 - \sqrt[3]{2401 + 3375}}$ qui se réduit à

$\sqrt[3]{49 + \sqrt[2]{5776}} - \sqrt[3]{49 - \sqrt[2]{5776}}$

ou $\sqrt[3]{49 + 76} - \sqrt[3]{49 - 76}$.

ou $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{-27}$ qui donne enfin

$x = 5 - 3$, ou bien $x = 2$, donc la racine est $+ 2$.

Explication de l'opération suivant la formule de Tartaléa.

1°. Je prends la moitié de l'homogéne 98, c'est 49 $= \frac{1}{2} b$ que je substituë dans la formule, de même que les nombres suivans.

2°. J'éléve au quarré cette moitié 49, son quarré est 2401. $= \frac{1}{4} bb$.

3°. Je prends le tiers du multiplicateur 45, c'est 15, je le cube, c'est 3375 $= \frac{1}{27} a^3$.

4°. J'ajoute ensemble ce quarré, & ce cube dans une somme 2401 + 3375, leur somme est 5776 $= \frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3$.

5°. Je tire la racine quarrée de cette somme c'est 76 $= \sqrt[2]{\frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3}$.

6°. J'ajoute cette racine quarrée 76 avec 49 moitié de l'homogéne, la somme est 125, dont je tire la racine cubique qui est 5 $= \sqrt[3]{\frac{1}{2} b + \sqrt[2]{\frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3}}$, c'est la premiére partie de la racine, qui répond au premier membre de sa formule.

7°. Présentement pour avoir la seconde partie de la racine suivant ce que prescrit le second membre de sa formule, j'ôte la moitié 49 de la racine cubique 76, la différence est -27, dont je tire la racine cubique qui est $-3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b - \sqrt{\frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3}}$ qui est le second membre de la formule de la racine.

8°. J'ai donc les deux parties de la racine $5 - 3 = 2$ donc la racine cherchée est $x - 2 = 0$, qui est positive.

Avis. Pour abréger ces opérations, il faut se servir des tables des quarrez & des cubes naturels, dont nous avons donné la construction.

Pour la preuve, je divise l'équation proposée par cette racine trouvée $x - 2 = 0$, & si la division est exacte, c'est une marque que la racine est juste. Le quotient est une équation du second degré qu'il faut résoudre par la formule du second degré pour avoir les deux autres racines qui sont négatives, & on aura de la sorte toutes les racines de l'équation proposée.

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
$x - 2 = 0$	$x^3 . 0x^2 + 45x - 98 = 0$	$x^2 + 2x + 49 = 0$

Quotient.

$x^2 \;.\;.\; x^3 - 2x^2.$ Premier produit à ôter.

$0 + 2x^2. + 45x.$ Premier reste.

$+ 2x. \;.\;.\; + 2x^2. - 4x.$ Second produit à ôter.

$0 \;\; + 49x. - 98.$ Second reste.

$+ 49. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + 49x. - 98.$ 3me. produit.

$= 0. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \;.\;.\;.\; 0$ dernier reste.

Pour achever la résolution, je cherche les deux racines du quotient $x^2 + 2x + 49 = 0$ qui est une équation du second degré ou $x^2 + 2x = -49$ suivant la formule du second degré

$$x + \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa - b}\text{, ce qui donne}$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 49}\text{, ou } x = -1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - 49}\text{,}$$

qui tombe dans le troisiéme cas de la cinquiéme formule du second degré puisque $\frac{1}{4}\, aa < 49$, par conséquent les deux racines sont négatives, égales & imaginaires, c'est $x = 1 \pm \sqrt{-48}$, la preuve en est évidente par la formation de l'équation qui suit.

$$x + 1 - \sqrt{-48} = 0$$

$$\times\, x + 1 + \sqrt{-48} = 0$$

$$x^2 + 1x - x\sqrt{-48}$$

$$+ 1x + 1 - 1\sqrt{-48}$$

$$+ x\sqrt{-48} + 1\sqrt{-48} + 48 = 0.$$

$$x^2 + 2x\,(+ 1 + 48) + 49 = 0.$$

où l'on voit que les produits des grandeurs réelles par les imaginaires se détruisent par des signes contraires, de même aussi le produit de l'imaginaire par l'autre imaginaire contraire détruit l'imaginaire & rétablit la grandeur positive & réelle $+ 48$.

La résolution des Equations du troisiéme degré dans la seconde formule $x^3 - ax = b'''$.

La seconde formule & la troisiéme qui suit ont une étroite liaison qui les unit & mêle ensemble leurs séries, elles en ont deux chacune sur chaque valeur de x déterminée, la premiére série est finie, & la seconde est infinie; la série finie de la seconde formule commence exclusivement par le cube de la valeur de x determinée, par exemple, soit $x = 7$ dont le cube est 343. La série finie commence exclusivement par $x - 0x = 343$ & continuë $x^3 - 1x = 336$. $x^3 - 2x = 329$, &c. De sotte que la suite des homogénes positifs décroît continüellement constamment de 7, tandis que le multiplicateur a croît suivant la suite des nombres naturels 1. 2. 3. &c. Ainsi l'homogéne arrive au zéro lorsque le multiplicateur a arrive à 49 quarré de la valeur de $x = 7$. dans $x^3 - 49x = 0$, qui est une équation pure & simple

ple du ſecond degré, car en diviſant tout par x, elle donne $x^2 - 49 = 0$. dont les deux racines ſont $x - 7 = 0$, & $x + 7 = 0$.

Enſuite comme le zéro eſt le terme commun de toutes les grandeurs poſitives & négatives, les homogénes qui étoient poſitifs avant d'arriver au zéro ſe changent en négatifs, tandis que le multiplicateur a continuë à croître ſuivant la ſérie naturelle des nombres; ce qui donne $x^3 - 50x = -7$. & $x^3 - 51x = -14$, $x^3 - 52x = -21$, & ainſi de ſuite à l'infini. De ſorte que cette ſérie infinie tombe dans la troiſiéme formule $x^3 - ax = -b'''$.

Pareillement dans la troiſiéme formule il y a une ſérie finie qui commence excluſivement par l'équation pure & ſimple du 3me. degré, $x^3 - 0x = -343$. $x^3 - 1x = -336$. $x^3 - 2x = -329$. &c. De ſorte que la ſuite des homogénes négatifs décroît juſqu'à ce qu'ils ſoient arrivez au zéro, d'où enſuite ils deviennent poſitifs & forment la ſérie infinie des équations de la ſeconde formule $x^3 - 50x = 7$, $x^3 - 51x = 14$. $x^3 - 52x = 21$, &c. Tout cela s'éclaircira par l'opération & ſe découvrira du premier coup d'œil dans les Tables.

La liaiſon des deux ſéries différentes de ces deux formules vient de ce qu'elles donnent des équations ſoûcontraires, c'eſt-à-dire que les racines qui ſont poſitives dans l'une ſont négatives dans l'autre.

Dans cette ſeconde formule il n'y a qu'une racine réelle & poſitive. La formule de Tartaléa pour trouver cette 1er. & plus grande racine eſt $x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b - \sqrt{\tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{27}a^3}}$.

Les deux autres racines ſont négatives: mais comme

la formule de la premiére racine contient deux binômes complexes ou composez de deux membres, qui comprennent tous les deux sous le signe radical de la troisiéme puissance, un signe radical qui couvre encore un binôme dont le premier terme $\frac{1}{4}bb$ est positif, & le second $\frac{1}{27}a^3$ est négatif, cette racine devient imaginaire lorsque $\frac{1}{4}bb$ est moindre que $\frac{1}{27}a^3$, & comme le rapport de ces deux grandeurs donnent trois cas que nous avons expliqué ci-devant, il faut les consulter.

Explication de l'opération suivant la Formule de Tartaléa.

Soit proposée l'équation $x^3 - 72x = 280$.

1°. Je prends la moitié de l'homogéne b''' qui est le dernier terme 280, sa moitié est $140 = \frac{1}{2}b$. que j'écris à part sous le premier radical $\sqrt[3]{}$.

2°. Je quarre cette moitié, son quarré est $19600 = \frac{1}{4}bb$, que je mets sous le signe radical $\sqrt[2]{}$.

3°. Je prends le tiers du cœfficient $72 = a$; c'est $24 = \frac{1}{3}a$, je l'éleve à la troisiéme puissance, c'est $13824 = \frac{1}{27}a^3$.

4°. J'ôte ce cube du quarré qui le précéde, c'est $19600 - 13824 = 5776$. qui répond à $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3$, dont la racine quarrée est $76 = \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}$.

5°. J'ajoûte cette racine à $\frac{1}{2}b$, c'est $76 + 140 = 216$ & je tire la racine cubique du total, c'est 6 en nombres, qui répond au premier membre de la racine $\sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$.

6°. Pour avoir le second membre de la racine, j'ôte la racine quarrée que je viens de trouver 76 de 140, le reste est 64, dont je tire la racine cubique, qui est 4, c'est

le second membre de la racine qui répond au second membre de sa formule $\sqrt[3]{\frac{1}{4}b - \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$.

7°. J'ajoûte ensemble les deux parties de la racine $6 + 4 = 10$. Donc 10 est la premiére racine & la plus grande de l'équation proposée $x^3 - 72x = 280$.

Ainsi ayant trouvé la premiére & plus grande racine qui est positive, en divisant l'équation par cette racine $x - 10 = 0$, si la division est exacte, c'est une marque que c'est la véritable racine; & le quotient est une équation du second degré dont il faut trouver les deux racines par la formule particuliére au second degré, qui seront les deux autres racines de l'équation proposée.

Diviseur	*Dividende*	*Quotient*
$x - 10 = 0$	$x^3 - 72x - 280 = 0$	$x^2 + 10x + 28 = 0$

x^2. . $x^3 - 10x^2$. Premier produit à ôter.

$0 + 10x^2. - 72x$. Premier reste.

$+ 10x$. . . $+ 10x^2. - 100x$. 2d. produit à ôter.

$0 + 28x. - 280$. 2d. reste.

$+ 28$. . . . . $+ 28x. - 280$. 3me. produit

$= 0$ . . . . 0 . . . 0. dernier reste.

Présentement il faut résoudre le quotient qui est une équation du second degré $x^2 + 10x + 28 = 0$, qui donne par transposition $x^2 + 10x = - 28$. J'ajoûte d'abord de part & d'autre $+ \frac{1}{4}aa$, ou 25, ce qui donne $x^2 + 10x + 25 = 25 - 28$, je tire la racine quarrée de chaque membre suivant la formule du second degré, c'est $x + 5 = \pm\sqrt{25 - 28}$, ou $x + 5$

$= 5 - 5 \pm \sqrt{-3}$. & abrégeant $x = -5 \pm \sqrt{-3}$ qui sont deux racines négatives & mixtes imaginaires que je multiplie pour en former l'équation du second degré qui en donne la preuve comme il suit.

$$x + 5 - \sqrt{-3} = 0$$
$$\times x + 5 + \sqrt{-3} = 0$$
$$\begin{array}{l} x^2 + 5x - x\sqrt{-3} \\ \quad + 5x + 25 - 5\sqrt{-3} \\ \quad\quad + x\sqrt{-3} + 5\sqrt{-3} + 3 = 0. \end{array}$$
$$x^2 + 10x\,(+ 25 + 3) + 28 = 0$$

Autre preuve par simple addition.

$$x^3 = 72x + 280.$$

puisque . . . $x = 10$

j'ai 720

$+ 280$

$1000 = x^3$.

Remarque. Cette formule de la racine n'est point générale pour tous les cas des équations qu'on peut former sur cette seconde formule $x^3 - ax = b$. Car il y a trois cas qui naissent du rapport de $\frac{1}{4} a^3$ avec $\frac{1}{4} bb$.

Or dans le premier cas où $\frac{1}{4} a^3 = \frac{1}{4} bb$, & dans le second cas où $\frac{1}{4} a^3 < \frac{1}{4} bb$, qui sont tous deux réductibles on peut se servir de la formule ; Mais dans le troisiéme cas où $\frac{1}{27} a^3 > \frac{1}{4} bb$, qui est le cas irréductible, la formule est absolument inutile quoique les racines soient réelles. Ce qui a engagé Mr. Delagny à rechercher d'autres

Méthodes pour le cas irréductible, que j'expliquerai ici.

Remaque importante. Dans cette formule le nombre des équations possibles sur la plus grande racine qui est positive forme deux séries, la premiére est finie, & la seconde est infinie, la premiére série qui est limitée est égale au quarré de cette racine moins un ; c'est-à-dire, que pour la racine $+ 9$, dont le quarré est 81, il y a 80 équations possibles, & dans cet interval, comme les deux autres racines sont négatives, & que leur somme est égale à la grande racine positive, il n'y a que quatre équations quiont des racines rationelles ;

$x^3 - 73x = 73$, dont les racines sont $+9, -8, -1$.

$x^3 - 67x = 126$, dont les 3 Rac. sont $+9, -7, -2$.

$x^3 - 63x = 162$. dont les Rac. sont $+9, -6, -3$.

$x^3 - 61x = 180$, dont les Rac. sont $+9, -5, -4$.

$x^3 - 61x = 180$, dont les Rac. sont $+9, -4, -5$.

Cette derniére n'est que la précédente répétée, car dans quelque ordre qu'on prenne les mêmes nombres pour racines, ils donnent précisément la même équation. Ainsi entre ces 80 équations, il n'y en a précisément que quatre qui aïent des racines réelles & rationelles, c'est précisément la moitié de 9 en entiers, mais il y en a le quart qui ont des racines imaginaires suivant la formule, quoiqu'elles soient réelles & irrationelles, & qui tombent par conséquent dans le cas irréductible, à commencer par $x^3 - 80x = 9$, laquelle ne peut être résoluë par la formule de Tartaléa, jusqu'à $x^3 - 61x = 180$ inclusivement, ce qui comprend même toutes les quatre équations ci-dessus qui ont des racines réelles & rationelles ; mais toutes les autres équations sont réductibles qui sont au nombre de 60, car leurs racines qui sont vé-

ritablement imaginaires, viennent sous une forme mixte imaginaire.

La serie finie de ces équations est facile à former à commencer par $81\,x = 0$ qui est hors d'œuvre, & continüant par $80\,x = 9$, $79\,x = 18$, $78\,x = 27$, &c. en continüant demême à diminüer le cœfficient a de l'unité, & prenant pour l'homogéne b la suite des multiples de 9, qui sont 9, 18, 27, 36, &c. on aura la derniére des 80 équations $x^3 - 1\,x = 720$.

On peut former de semblables séries sur les neuf premiers nombres commençant toujours par le quarré de la racine déterminée, ce qui est très-utile pour concevoir ces équations & leur résolution, que l'on peut trouver même directement par des tables construites de la sorte, comme nous l'avons vû ci-devant.

Résolution des équations du troisiéme degré.

Dans la troisiéme formule $x^3 - a\,x = - b'''$, qui est toute entiére dans le cas irréductible, c'est la plus difficile & la plus utile, parce que la trisection de l'angle s'y réduit.

Cette formule contient deux séries, l'une finie & l'autre infinie d'équations comme la précédente sur une racine déterminée, comme $x = 9$, elle contient dans la série finie 80 équations, c'est 81 moins 1, quarré de cette racine 9, à commencer par la plus grande équation $x^3 - 243\,x = - 1458$, & continüer en diminüant le cœfficient a de l'unité & l'homogéne b de 9, ce qui donne pour la 2de. équation $x^3 - 242\,x = - 1449$, & diminüant toujours de même, on arrive à la derniére équation $x^3 - 81\,x = 0$, entre lesquelles il y a cinq équations dont les racines sont rationelles; mais on ne peut absolument résoudre aucune de ces équations par la formule de Tartalea, ce qui s'appelle le cas irréductible,

qui comprend encore le quart des équations possibles de la seconde formule qui précéde, ce cas n'est pas moins célébre parmi les Analistes que la quadrature du cercle, l'est chez les Géométres, ce qui a engagé Mr. Delagny à rechercher des Méthodes pour le résoudre ; d'ailleurs par la formule de Tartaléa les équations du troisiéme degré qui sont réductibles, c'est-à-dire dans le cas ordinaire, & dont les racines sont rationelles, viennent par la formule sous la forme déguisée d'un binôme irrationel, ce qui est le plus fréquent, que sous une forme rationelle. Par exemple, entre les 99 équations possibles sur la valeur de $x = 10$ déterminée, il n'y a que 5 résolutions qui donnent la valeur de cette racine sous une forme rationelle qui sont.

$x^3 - 27x = 730$. forme de la Rac. $x^3 = 9 + 1 = 10$.

$x^3 - 48x = 520$. . . . . . . $x^3 = 8 + 2 = 10$.

$x^3 - 63x = 370$. . . . . . . $x^3 = 7 + 3 = 10$.

$x^2 - 72x = 280$. . . . . . . $x^3 = 6 + 4 = 10$.

$x^3 - 75x = 250$. . . . . . . $x^3 = 5 + 5 = 10$.

Ainsi de tous les autres cas semblables, toutes les autres équations donnent la premiére racine sous une forme irrationelle imaginaire, quoique la racine soit réelle.

En général pour déterminer tous ces cas.

Soit la plus grande racine d'une équation du troisiéme degré dans la seconde formule, un nombre pair quelconque $= 2a$, le nombre des équations possibles en nombres entiers est $4aa - 1$.

Le nombre des équations qui donnent la racine réelle sous une forme rationelle est $= a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine réelle

sous une forme irrationelle est $= 3aa - a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine réelle sous une forme imaginaire est $aa - 1$.

Mais si je suppose la plus grande racine un nombre impair quelconque $= 2a + 1$.

Le nombre des équations possibles sera $= 4aa + 4a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine sous une forme rationelle $= a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine sous une forme irrationelle réelle $= 3aa + 2a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine réelle sous une forme imaginaire $= aa + a$, c'est précisément le quart des équations possibles plus une.

Lorsque la grande racine est un nombre pair, alors le dernier terme de l'équation, où l'homogéne est toujours un nombre pair, & il y a précisément le tiers en entiers du nombre des équations qui viennent sans fractions, parce qu'il faut prendre le tiers du dernier terme de l'équation, ainsi la racine étant 10, il y a 33 équations qui viennent sans fractions.

Au contraire lorsque la racine est un nombre impair, le dernier terme est impair, le nombre des équations sans fractions n'est alors que la sixiéme partie, par exemple, la racine étant 13, il y a 168 équations possibles dans la seconde formule, dont il n'y en peut avoir que 28 sans fractions, ce qui fait la sixiéme partie en entiers.

Entre les racines qui viennent sous une forme imaginaire, il y en a qui viennent sous une forme rationelle, & d'autres sous une forme irrationelle.

Le nombre des équations qui donnent la racine sous une forme imaginaire rationelle est $\sqrt{\frac{aa}{12}}$ en nombres entiers, supposant la racine réelle & égale à a.

Ainsi soit la racine $= 10$, dont le quarré est 100, sa

douziéme

douziéme partie eſt $8\frac{2}{3}$ dont la racine approchée en entier eſt 2; c'eſt pourquoi il y a deux équations où la racine vient ſous une forme imaginaire rationelle, c'eſt

$$x^3 - 78x = 220.$$

$$\& \; x^3 - 87x = 130.$$

Si la racine réelle étoit 60, il y auroit 17 équations où la racine viendroit ſous une forme imaginaire rationelle; mais il y en a un tiers qui la donnent ſous une forme imaginaire irrationelle.

Quelque fois la formule donne la racine ſous une forme négative, au lieu de la racine poſitive qu'on cherche, exemple, dans $x^3 - 3x = -2$. on trouve ſuivant la formule $\sqrt[3]{-1 + -0} + \sqrt[3]{-1} - -0$, qui donne $- -\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = - -1 + -1 = -2$, qui eſt une racine négative, au lieu de la racine poſitive $x = 1$.

Enfin entre 99 équations poſſibles dont 10 eſt la racine, il y en a cinq où la racine vient ſous une forme rationelle, 70 ſous une forme irrationelle, mais réelle, & 24 ſous une forme irrationelle imaginaire.

REGLE NOUVELLE ET GENERALE

Pour trouver la premiére & la plus grande racine des Equations du troiſiéme degré dans la ſeconde formule.

Cette regle conſiſte à perfectionner la formule de Tartaléa. Exemple. Soit $x^3 - 60x = 400$, la racine vient par la formule ſous cette forme irrationelle.

$$x = \sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}} + \sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$$

Pour avoir ſous une forme rationelle cette racine, qui

eſt ainſi déguiſée ſous l'expreſſion d'un binôme irrationel, 1°. je prends le tiers de 60, c'eſt 20, je le cube, c'eſt 8000, $= a^3$ de la formule.

Suivant la formule générale de la racine

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} b''' + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4} b^{vi} - \tfrac{1}{27} a^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} b''' - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4} b^{vi} - \tfrac{1}{27} a^3}}$$

2°. Je prends la moitié de l'homogéne $= b''' = 400$, c'eſt 200 que je quarre, ſon quarré eſt 400. 00.

3°. J'ôte 80. 00 de 400. 00, il reſte 320. 00 $= \frac{1}{4} b^{vi} - \frac{1}{27} a^3$, & je tire la racine quarrée à cauſe du ſecond ſigne radical qui couvre ces deux grandeurs dans la formule, c'eſt 178 que j'ajoute à la partie rationelle 200, la ſomme eſt 378, ſuivant le premier membre de la formule.

4°. Cette racine quarrée 178 augmentée de l'unité c'eſt 179, que j'ôte de la partie rationelle 200 $= \frac{1}{2} b'''$, le reſte eſt 21, ſuivant ce que preſcrit le ſecond membre de la formule.

5°. Je tire la racine cubique de ces deux nombres en deſſous, ſuivant ce que preſcrit le ſigne radical $\sqrt[3]{\ }$. or la racine cubique approchée de 378 en deſſous eſt 7. & la racine cubique approchée de 21 en deſſous eſt 2, la ſomme de ces deux racines $7 + 2 = 9$, que j'augmente de l'unité c'eſt 10, d'où je conclus que 10 eſt la grande racine de l'équation propoſée, s'il y en a une rationelle, ou ce ſera la racine approchée ſi l'équation propoſée n'a que des racines irrationelles.

Démonſtration.

La véritable racine de l'équation propoſée eſt ſuivant la formule $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}} + \ldots\ldots\ldots$

$+\sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$.

Or pour la construction $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}}$ eſt la plus grande que $\sqrt[3]{378}$, mais plus petite que $\sqrt[3]{379}$.

Par la même construction $\sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$ eſt plus grande que $\sqrt[3]{21}$, mais plus petite que $\sqrt[3]{22}$.

Donc en prenant la racine cubique approchée de 378 en deſſous qui eſt 7, il eſt évident que la valeur de la racine de $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}}$, eſt entre 7 & 8.

Donc prenant pareillement la racine cubique approchée en deſſous de 21, qui eſt 2, il eſt évident que la racine cubique de $\sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$ eſt entre 2 & 3.

Donc la véritable racine cherchée eſt entre $8 + 3 = 11$, & entre $7 + 2 = 9$, donc cette valeur eſt 10, ſi l'équation propoſée a une racine rationelle, c'eſt-à-dire en nombres entiers, or s'il n'y en a point en nombres entiers, il eſt impoſſible qu'elle en aye en fractions. Donc 10 eſt la racine cherchée, ce qu'il falloit démontrer.

Preuve pour s'aſſurer ſi 10 eſt la Racine de l'équation propoſée, il ſuffit de ſubſtitüer ſa valeur & ſes puiſſances à la place de l'inconnuë & de ſes puiſſances.

1°. Je diviſe l'équation propoſée par cette racine poſitive $x - 10 = 0$, & ſi la diviſion eſt exacte, c'eſt une preuve que 10 eſt la véritable racine.

2°. Par la ſubſtitution, en ſubſtitüant 10 & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, ſi aprés la

ſubſtitution les deux membres de l'équation ſont égaux, c'eſt une preuve que 10 eſt la véritable racine.

Mais ſi après la ſubſtitution les deux membres de l'équation ne ſe trouvent point égaux, c'eſt une preuve que 10 n'eſt pas la racine cherchée, mais ſeulement une valeur approchée; or pour en approcher encore d'avantage, il faut ajouter des tranches de deux zéros au ſecond terme, & des tranches de trois zéros au troiſiéme terme, ou bien ſe ſervir de la Méthode d'approximation qui ſuit, qui eſt plus promte & plus exacte, & qui employe des formules rationelles.

Pour abréger & s'épargner la peine de la ſubſtitution, il ſuffit de conſidérer que la racine eſt toujours un nombre pair, lorſque a & b ſont tous deux pairs, car ſi a eſt pair, il eſt évident que ax ſera pair, par conſéquent dans l'équation générale $ax \pm b''' = x^3$, le cube x^3 ſera pair.

Or par la préparation b''' devient toujours un nombre pair, d'où il ſuit que ſi la racine trouvée eſt un nombre impair, c'eſt une marque que la racine cherchée eſt irrationelle, & que la valeur trouvée n'eſt qu'une valeur approchée.

RESOLUTION DU CAS IRREDUCTIBLE.

Premiére Méthode pour les racines rationelles.

Le cas irréductible eſt celui où une équation ne peut ſe réduire a des équations ſimples du premier degré par la formule de Tartaléa, ce qui comprend le quart des équations poſſibles de la ſeconde formule du troiſiéme degré, & la troiſiéme formule toute entiére dans une ſérie formée ſur une valeur conſtante de x, & ſur a variable depuis zéro, où les homogénes ſont les multiples de

x de suite jusqu'au triple de son quarré, ce qui vient des racines imaginaires que donne la formule, dans ce cas où $\frac{1}{27}a^3 > b^{vi}$.

Premiére Régle.

Soit $x^3 - 90x = 100$. qui est dans la seconde formule du troisiéme degré ; je me sers de cette formule qui me donne la racine sous une forme irrationelle imaginaire $x = \sqrt[3]{50 + \sqrt{-24500}} + \ldots$

$+ \sqrt[3]{50 - \sqrt{-24500}}$; c'est-à-dire suivant cette formule.

1°. Je prends le tiers du multiplicateur $a = 90$, c'est 30, dont le cube est 2700. 00. $= \frac{1}{27}a^3$.

2°. Je prends la moitié de l'homogéne $b = 100$, c'est 50, son quarré est 2500. $= b^2$.

3°. J'ôte 270. 00 de 2500, il reste -24500, dont je tire la racine quarrée qui est imaginaire ; c'est $+ \sqrt[2]{-24500}$.

4°. J'ajoute cette racine imaginaire à $50 = \frac{5}{9}a$, la somme est $\sqrt[3]{50 + \sqrt{-24500}}$, dont je tire la racine cubique en mettant sur le tout le signe radical $\sqrt[3]{}$. c'est la premiére partie de la racine qui se réduit $5 + \sqrt{-5}$.

5°. J'ôte cette même racine imaginaire de 50, & je tire la racine cubique de la différence, c'est $\sqrt[3]{50 - \sqrt{-24500}}$, qui se réduit à $5 - \sqrt{-5}$. C'est la seconde partie de la racine.

6°. Je réünis ces deux parties pour avoir la racine totale $x = \overline{5 + \sqrt{-5}} + \overline{5 - \sqrt{-5}} = 10$, puisque la partie imaginaire de chaque binôme se détruit par des signes contraires ; car $+\sqrt{-5}, -\sqrt{-5} = 0$. partant il reste $5 + 5 = 10$, & c'est la racine cherchée & positive.

Autre Exemple. Soit l'équation $x^3 - 15x = 4$, sa racine vient par la formule ci-dessus sous cette forme irrationelle imaginaire.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

qui donne $x = \sqrt[3]{2 + -11} + \sqrt[3]{2 - -11}$.

Or la racine cubique de $\overline{2 + -11}$, est $\overline{2 + -1}$, & la racine cubique de $\overline{2 - -11}$, est $\overline{2 - -1}$, il suffit d'en former le cube pour s'en convaincre. Or comme ces imaginaires se détruisent par des signes contraires, ils ne sont qu'apparens & non pas de véritables imaginaires, & tout se réduit à $2 + 2 = 4$, qui est la véritable racine cherchée ; pour en avoir la preuve il suffit de diviser l'équation proposée par $x - 4 = 0$.

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
$x - 4 = 0$	$x^3 - 15x - 4 = 0$	$x^2 + 4x + 1 = 0$.

Quotient.		
x^2 . .	$x^3 - 4x^2$.	Premier produit à ôter.
	$0 + 4x^2. - 15x$.	Premier reste.
$+ 4x$. . .	$+ 4x^2. - 16x$.	Second produit à ôter.
	$0 + 1x. - 4$.	Second reste.
$+ 1$	$+ 1x. - 4$.	3me. produit.
$= 0$	0 . . . 0	dernier reste.

Le Quotient est une équation du 2^d. degré à résoudre, dont les racines sont $x = -2 + \sqrt{\frac{1}{4}16 - 1}$, ou $x = -2 + \sqrt{4-1}$, ou $x = -2 + \sqrt{3}$. Et $x = -2 - \sqrt{3}$.

$$x + 2 + \sqrt{3} = 0$$
$$\times\; x + 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$x^2 + 2x + x\sqrt{3}$$
$$+ 2x + 4 + 2\sqrt{3}$$
$$- x\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3 = 0.$$

$$x^2 + 4x\,(+4-3) + 1 = 0.$$

ou $x^2 + 4x + 1 = 0$

RE'SOLUTION DU CAS IRREDUCTIBLE.

Seconde Méthode pour les Racines irrationelles.

Je suppose une équation dans la 2de. formule $x^3 - ax = b'''$. Régle générale. dans les trois cas, je tire la racine de la puissance du terme dominant dans le cas irréductible, c'est-à dire, qui soit telle que $\frac{1}{27}a^3 > \frac{1}{4}b^{vi}$, c'est-à-dire que le cube du tiers du cœfficient a surpasse le quart du quarré de l'homogéne b''', ou le quarré de sa moitié, ce qui revient au même; il y a des racines imaginaires & imaginaires irrationelles suivant la formule.

Dans ce cas je tire seulement la racine quarrée du cœfficient a, parce que c'est le terme dominant, & je néglige entiérement l'homogéne b''', la raison en est évidente, puisque par l'hypothése a peut être infiniment grand, il croît toujours, ainsi c'est sur lui qu'il faut se régler.

Au contraire l'homogéne b''' a un terme fixe de grandeur, il peut diminuer & arriver au zéro; mais il ne peut croître dans ce cas, puisque son quarré doit être moindre que le tiers du cube du cœfficient a; c'est pourquoi je regarde comme nul l'homogéne b''', & je considére cette équation $x^3 - ax = b$, comme s'il y avoit $x^3 - ax = 0$, ce qui me donne $x^2 = a$, & $x = \sqrt{a}$. Voilà une valeur de la racine.

Mais cette valeur est trop petite, car l'équation proposée est $x^2 - ax = b$, qui donne $x^3 = ax + b$.

C'est pourquoi la valeur trouvée n'est point exacte, mais pour la rendre exacte je fais une seconde supposition; je suppose $x = \sqrt{a + y}$, & je substituë cette valeur & ses puissances dans l'équation proposée $x^3 - ax = b$; ou bien pour rendre le calcul plus facile, je suppose x^3 égale à la troisiéme puissance parfaite du binôme $\overline{a + y}$, c'est $x^3 = a^3 + 3aay + 3ay^2 + y^3$.

Et je fais encore $x^3 = a^3 + aay + b'''$. ensuite j'ôte le second membre de cette égalité du second membre de la précédente, ce qui donne $x^3 = 3ayy + 2aay + y^3 - b'''$.

Du second membre de cette derniére, je fais l'équation suivante $3ay^2 + 2aay + y^3 = b'''$, dans laquelle je néglige $+ y^3 =$ zéro, puisque c'est un infiniment petit; il reste $3ay^2 + 2aay = b$, qui est une équation du second degré, que je résous par la formule du second degré, & je trouve $y = -\frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$. par conséquent $x = \sqrt{a + y}$ donne $x - \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$. c'est une seconde valeur approchée de la racine de l'équation proposée.

Mais elle est un peu trop grande; car ce n'est pas seulement $3ay^2 + 2aay$ qui est égal à b'''; mais c'est $3ay^2 + 2aay + y^3$.

Ainsi

Ainsi la racine exacte est $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b - y^3}{3a}}$ de sorte que si l'on substituë à la place de y sa valeur qui est $y = -\frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$: on aura une troisiéme valeur un peu trop petite, mais plus approchée de beaucoup que la précédente, & on pourra continuer d'en approcher à l'infini par la même formule.

La seconde valeur est une racine approchée d'une maniére assez simple, & l'erreur de cette racine est toujours moindre que l'unité, lorsque l'homogéne b''' est plus petit que 368. 43. 65. ce qui suffit pour la pratique; c'est ce qu'il faut éclaircir par un exemple en nombres.

1er. *Exemple.* Soit l'équation proposée $x^3 - 7569x = 2409.03.$ dans laquelle le cœfficient $aa = 7569.$ donc $a = 87.$ & l'homogéne $b'' = 24.09.03.$

Donc $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$; c'est-à-dire,

$x = \frac{2}{3}87. + \sqrt{\frac{1}{9}7579 + \frac{24.09.03.}{3 \times 87.}}$ ce qui donne

$x = 58 + \sqrt{1764}.$ or $\sqrt{1764} = 42.$ Donc

$x = 58 + 42 = 100.$

Donc 100 est la racine approchée à moins d'une unité prés.

Par la seconde formule d'approximation, $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b - y^3}{3a}}$ je trouve pour la troisiéme valeur approchée $x = 58 + \sqrt{1755\frac{152}{261}}$, qui approche encore beaucoup plus près. Et on en peut trouver de même de plus approchées de suite à l'infini.

Avis. Il n'y a point d'équation dans le cas irréductible

de celles même où les racines ſont irrationelles & réelles, que l'on ne puiſſe réſoudre par cette Méthode auſſi exactement qu'il eſt poſſible.

Remarque importante. Le cas irréductible du troiſiéme degré, vient d'une équation du ſecond degré qui a des racines irrationelles réelles, multipliée par une équation du premier degré, ce qui donne une équation du troiſiéme degré dans le cas irréductible; d'où il ſuit que ce cas peut par la même raiſon ſe trouver dans les équations de tous les autres degrez ſupérieurs. Davantage; dans les degrez pairs, toutes les racines peuvent être imaginaires ou irrationelles: ainſi dans le quatriéme degré, les quatre racines peuvent être imaginaires ou irrationelles.

EXEMPLE.

Dans la formule $x^3 - a''x = b'''$

Soit l'équation propoſée $x - 7569x = 240.903$.

Suivant la loi des homogénes, tous les termes doivent avoir trois dimenſions, de ſorte que le multiplicateur $a^{\text{II}} = 7569$ eſt par conſtruction de deux dimenſions que j'exprime par un expoſant en chifres romains dans $a''x$ qui marque non pas une ſeconde puiſſance mais ſimplement un produit de deux dimenſions. De même l'expoſant dans b''' en chifres romains marque un produit de trois dimenſions & non pas un cube; cependant à la rigueur c'eſt une troiſiéme puiſſance imparfaite, ou le ſimple produit de trois nombres qu'il faut trouver.

Donc dans l'équation propoſée $a'' = 7569$, & $a = 87$. & $b''' = 240.903$. ſubſtituant ces nombres dans la formule $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$

j'ai . . $x = \frac{2}{3}87 + \sqrt{\frac{1}{9}7569 + \frac{240.903}{3\times 87\ (261)}}\ (923 = \frac{b}{3a})$

ce qui donne $x = 58 + \sqrt{1764} = 58 + 42 = 100$.

Donc 100 eſt la valeur approchée par excès de la racine à moins d'une unité près.

Puiſque cette racine eſt un peu trop grande, je me ſers de la ſeconde formule $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b - y^3}{3a}}$ dans laquelle je ſubſtituë la valeur de y trouvée ci-deſſus

$y = -\frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$ qui eſt

$y = -29 + 42\ (13)$ ce qui donne par ſubſtitution la ſeconde formule $x = 58 + \sqrt{841 + \frac{240.903 - 2197}{261}}$

ou $x = 58 + \sqrt{841 + \frac{238.706}{261}}$

ou $x = 58 + \sqrt{841 + 914\frac{152}{261}}$, ou $58 + \sqrt{1755\frac{152}{261}}$

qui donne $x = \overline{58 + 41 +} \sqrt{74 + \frac{152}{261}}$ qui eſt une ſeconde valeur de la racine encore beaucoup plus approchée $x = 99 +$, on peut de même continüer pour en approcher à l'infini.

Explication de cette opération.

Si l'équation propoſée eſt $x^3 - 75.69\,x = 240,903$. dans la ſeconde formule du troiſiéme degré $x^3 - a''x = b'''$.

Ou ſi j'ai l'équation ſoûcontraire $- x^3 + 75.69\,x = -242.903$. qui eſt dans la troiſiéme formule $-x^3 + a''x = +b'''$.

1°. Je tire la racine quarrée de $75.69 = a''$, c'eſt 87 dont je prends les deux tiers, c'eſt $58 = \frac{2}{3}a'$.

2°. Je diviſe l'homogéne $240.903 = b'''$, par le triple de $87 = 3a$, le quotient eſt $923 = \frac{b}{3a}$.

3°. j'ajoute ce quotient 923 à la neuviéme partie du

multiplicateur ou cœfficient 75.69 qu[illegible]
la somme est 923 + 841 = 1764, dont je [illegible]
cine quarrée, c'est 42 = $\sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$.

4°. J'ajoute ces 42 à 58 = $\frac{2}{3}a$ trouvé d'abord, la somme 100 est la premiére racine approchée par excés, mais à moins d'une unité, elle est négative dans la troisiéme formule, mais positive dans la seconde formule.

5°. Pour trouver une seconde valeur de la racine encore plus approchée, suivant la seconde formule j'ôte 87 = $\frac{2}{3}a$ de 100 = x valeur trouvée, le reste est 13 = y dont je prends le cube 2197 = y^3 qui est au numérateur de la fraction du dernier terme de la seconde formule, $\frac{b - y^3}{3a} = \frac{240.903 - 2197}{261}$.

6°. Présentement au lieu de diviser 240.903 − 2197 = 238.706, je divise seulement 2197 par 261 ce qui est plus commode, le quotient est 8 $\frac{109}{261}$, que j'ôte de 1764, ce qui donne le reste 1755 $\frac{152}{261}$, qui donne pour seconde valeur approchée davantage de la racine $x = 58 + \sqrt{1755 \frac{152}{261}}$, qui se réduit à $x = 58 + 41 + \sqrt{74 + \frac{152}{261}}$ qui est un peu plus grande que 99, mais moindre que 100, mais son excés est encore moindre, & on pourra de même trouver des valeurs plus approchées à l'infini.

7°. Pour achever la résolution, il faut trouver les deux autres petites racines de cette sorte.

Je prends d'abord la moitié de la grande racine trou[illegible]vée 100 = x, c'est 50 que je quarre, c'est 2500, = $\frac{1}{4}x$[illegible] je triple encore ce quarré, c'est 7500 = $\frac{3}{4}xx$.

Ensuite j'ôte 7500 = $\frac{3}{4}xx$ de 7569 = $\sqrt{\frac{1}{9}aa}$[illegible]

reste $69 = \sqrt{\frac{1}{9}aa - \frac{3}{4}x^2}$, or la racine quarrée $\sqrt{69}$ est $8\frac{5}{16}$ à peu près.

Par conséquent les deux petites racines approchées sont $x = 50 + \sqrt{69}$, & $x = 50 - \sqrt{69}$, ou $58\frac{5}{16}$ & $41\frac{11}{16}$, suivant la formule suivante qui est du second degré $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa - \frac{3}{4}xx}$, ces deux petites racines sont positives dans la troisiéme formule, & négatives dans la seconde.

Exemple second. Soit l'équation dans la troisiéme formule $x^3 - 84x = -160$, qui est dans la troisiéme formule.

1°. Je tire la racine quarrée de 84, c'est $9\frac{3}{18}$ à peu près, j'en prends les deux tiers, $6\frac{3}{18}$, ou $6\frac{1}{9}$, c'est la premiére partie de la racine.

2°. Je divise 160 par trois fois $9\frac{3}{18}$, c'est-à-dire je divise 160 par $27\frac{1}{2}$, ou bien ce qui revient au même pour éviter les fractions je multiplie tout par 2, c'est 320 que je divise par $55 = 2 \times 27\frac{1}{2}$, dont le quotient est $5\frac{9}{11}$.

3°. J'ajoute ce quotient à la neuviéme partie de 84 qui est $9\frac{1}{3}$, la somme de ces deux fractions après les avoir réduit au même dénominateur est $15\frac{5}{33}$, dont la racine approchée est 4, que j'ajoute à la premiére partie trouvée de la racine $6\frac{1}{9}$ la somme en entiers est 10, valeur de la premiére & plus grande racine cherchée qui est négative, car en substitüant -10 dans l'équation proposée, je trouve

$$+x^3 - 84x = -160, \text{ou} -x^3 + 84x = +160.$$

$$\text{ou } +1000 - 840 = -160, \& -1000 + 840 = +160$$

Remarque. Pour éviter les fractions lorsque a n'est pas un nombre quarré, je lui ajoute deux zéros, & trois zéros à l'homogéne, ce qui donne $x^3 - 84.00\,x =$

— 160. 000. dont je tire les racines approchées par excès.

REGLE GENERALE

Pour trouver l'une des petites racines, lorsqu'on a trouvé l'autre dans la seconde & la troisiéme formule du troisiéme degré.

Dans la seconde formule il y a deux petites racines négatives, & la troisiéme qui est positive est égale à la somme des deux autres.

Dans la troisiéme formule au contraire les deux petites racines sont positives, & la troisiéme qui est négative est égale à la somme des deux autres petites racines.

Soit l'une des petites racines trouvées $x = c$, on trouvera l'autre par cette formule $\sqrt[2]{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$.

Par exemple, dans la troisiéme formule $x^3 - ax = -b'''$.

Soit l'équation $x^3 - 19x = -30$. dans laquelle a ou $a'' = 19$, & b, ou $b''' = 30$.

Je suppose que la petite racine trouvée positive est $2 = c$. donc $x = \sqrt[2]{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$ . . .

ou $x = \sqrt[2]{19 - \frac{3}{4}4} - 1$.

ou $x = \sqrt[2]{19 - 3} - 1$, qui donne $x = \sqrt[2]{16} - 1 = 4 - 1 = 3$. donc la seconde des petites racines cherchée est $3 = d$.

Au contraire si je suppose que la petite racine trouvée d'abord est $3 = c$, je trouverai par la même formule la seconde racine $x = \sqrt[2]{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$. qui donne par la substitution $x = \sqrt[2]{19 - \frac{3}{4}9} - \frac{1}{2}3$.

qui donne $x = \sqrt[2]{19 - 6\frac{3}{4}} - 1\frac{1}{2}$.

qui se réduit à $x = \sqrt[2]{12\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 2 = d$, donc la seconde racine cherchée $d = 2$.

Pour le démontrer, il n'y a qu'à former l'équation du troisiéme degré par la multiplication des trois racines.

$x - c = 0,\ x - d = 0,\ x + c + d = 0.$

$$x - c = 0.$$
$$\times\ x - d = 0.$$

$$x^2 - cx$$
$$- dx + cd = 0$$
$$\times\ x + c + d = 0.$$

$$x^3 - cx^2$$
$$- dx^2 + cdx + ccd = 0$$
$$+ cx^2 - ccx + cdd.$$
$$+ dx^2 - cdx$$
$$- cdx$$
$$- ddx$$

Pour trouver la formule, je suppose que tous les produits du troisiéme terme sont égaux au multiplicateur a de la formule, en les comparant j'aurai l'équation suivante.

$cc + dd + 2cd - cd = a$, & abrégeant j'ai

$c^2 + d^2 + cd = a$, ce qui donne par transposition

l'équation $d^2 + cd = a - c^2$, dans laquelle ajoutant de part & d'autre $+ \frac{1}{4}cc$, j'ai $d^2 + cd + \frac{1}{4}cc$

$= a - c^2 + \frac{1}{4} c^2$, ensuite je tire la racine quarrée de chaque membre, ce qui donne $d + \frac{1}{2} c = \sqrt{a - c^2 + \frac{1}{4} cc}$. or dans le 2d. membre $- c^2 + \frac{1}{4} cc = \frac{3}{4} cc$, donc en abrégeant & transposant, j'ai $d = \sqrt{a - \frac{3}{4} cc} - \frac{1}{2} c$; voilà la démonstration trouvée de la formule ci-dessus.

La résolution de toutes les autres formules du troisiéme degré.

Le reste des 18 formules anciennes du troisiéme degré se réduisent à 12 qui sont de deux sortes.

1°. Il y en a quatre où le troisiéme terme manque, qui est la puissance linéaire de x, ces quatre formules sont en général $x^3 \pm a x^2 = \pm b$, & retombent dans le premier degré, car en divisant tout par xx, on aura $x \pm a = \pm b$. par exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 - 30 x^2 = - 3705$, qui est dans le cas *irréductible*, je divise tout par xx, ce qui donne $x = 30 - \frac{3705}{xx}$, or je suppose d'abord $x < 30$, ce qui donne $x < 30 - \frac{3705}{30 \times 30}$ (900), puisque $\frac{3705}{900} = 4 + \frac{105}{900}$ donc $x < 30 - 4 + \frac{105}{900}$, ou $x < 26 +$, donc $x < 26$, ce qui donne $xx < 676$, d'où je tire $x < 30 - \frac{3705}{676} < 30 - 6 < 24$ or $24 \times 24 = 576$, donc $x = 30 - \frac{3705}{576}$; donc $x = 30 - 7$, donc $x = 23$, ou $x < 24$, donc 23 est la premiére racine positive.

Diviseur

Diviseur	*Dividende*	*Quotient*
$x - 23 = 0$	$x^3 - 30\,xx + 3703 = 0$	$xx - 7\,x - 161 = 0$

xx	$x^3 - 23\,xx$	premier produit à ôter.
	$0 - 7\,xx$	premier reſte.
$-7x$	$-7\,xx + 161\,x$	ſecond produit.
	0 . . $-161\,x + 3703$.	ſecond reſte.
-161	$-161\,x + 3703$.	
$= 0$	$0 \quad 0$	

Le quotient eſt une équation du ſecond degré. $x^2 = 7\,x + 161$, que je réſoud par la formule propre du ſecond degré $x = \frac{1}{2}\,a \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,aa + b}$, ce qui donne $x = 3\frac{1}{2} \pm \sqrt{173\frac{1}{4}}$ qui ſe réduit à $x = 3\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}$ donc $x = +17$, c'eſt la ſeconde racine; la troiſiéme eſt $x = -10$.

2°. Il reſte les 8 derniéres formules qui ont tous leurs termes, leſquelles ſe réduiſent à ſept, puiſque nous en avons déja retranché une comme inutile, parce qu'elle eſt entiérement négative.

Or pour ramener ces ſept formules aux trois premiéres formules expliquées ci-deſſus, il faut en faire évanoüir le ſecond terme comme il ſuit.

Méthode pour faire évanoüir le ſecond terme dans une Equation d'un degré quelconque.

Pour faire évanoüir le ſecond terme dans une équation, il faut la transformer dans une autre équation dont le ſecond terme ſoit évanoüi.

Régle générale.

1°. Je suppose dans l'équation proposée l'inconnuë x égale à une nouvelle inconnuë y augmentée ou diminuée d'une fraction, dont le numérateur soit le multiplicateur a du second terme de l'équation proposée, & dont le dénominateur soit l'exposant du degré de l'équation, comme $y \pm \frac{a}{3}$ pour l'équation du troisiéme degré $x^3 \pm 30x^2 - 20x = 341$; de sorte que dans le binôme $y \pm \frac{30}{3}$ le signe qui joint ou précéde la fraction soit contraire au signe du multiplicateur a de l'équation proposée, c'est-à-dire, que pour l'équation $x^3 - 30x^2 - 20x = 341$, je suppose $x = y + \frac{30}{3}$.

2°. Je substituë cette valeur de x en sa place, & les puissances de la même valeur de x à la place des puissances semblables de x; ce qui donnera l'équation transformée qui n'aura point de second terme.

1er. Exemple. Soit $x^3 - 30x^2 - 20x - 341 = 0$.

dans laquelle Soit $x = y + \frac{30}{3}$

Donc $x^2 = y^2 + 20y^2 + \frac{900}{9}$

Donc $x^3 = y^3 + 30y^2 + \frac{900y}{3} + \frac{27000}{27}$.

Et substitüant ces valeurs dans l'équation proposée comme il suit, j'aurai l'équation transformée où le second terme est évanoüi.

$$x^3 = y^3 + 30y^2 + \frac{900y}{3} + \frac{27000}{27}$$

$$-30x^2 = \ldots - 30y^2 + 20y + \frac{900}{9}$$

$$-20x = \ldots\ldots - 20y + \frac{30}{3}$$

$$-341 = \ldots\ldots\ldots - 341$$

$$y^3 \pm 0y^2 + \frac{900y}{3} + \frac{27000}{27} = 0.$$

La transformée . . . . $+ \frac{900}{9}$

$+ \frac{30}{3}$

$- 341.$

Je prépare d'abord cette transformée en ôtant toutes les fractions, & ensuite je trouve la valeur de $y = 21$, qui étant substituée dans l'équation simple $x = y + \frac{30}{3}$, donne $x = 21 + 10$, ou $x = 31$, c'est la racine désirée.

Pour rendre l'opération plus courte & plus facile, on peut prendre d'abord $x = y + 10$, puisque $10 = \frac{30}{3}$; mais j'ai voulu donner un exemple où il y entre des fractions.

SECOND EXEMPLE.

Soit l'équation proposée $x^3 + 30x^2 + 20x + 341 = 0$. je suppose $x = y - \frac{30}{3}$; & substituant cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances

dans l'équation proposée, j'ai l'équation transformée où le second terme est évanoüi.

$$y^3 \pm 0y^2 - \frac{900y}{3} - \frac{27000}{27} = 0.$$
$$+ \frac{900}{9}$$
$$- 341.$$

Remarque 1re. Si dans l'équation proposée, le premier terme avoit un cœfficient différent de l'unité, comme $a\,x^3$, &c. Dans ce cas, je divise tout par ce multiplicateur a du premier terme; ainsi je suppose $x = \frac{y}{a} \pm \frac{30}{3a}$ & substitüant de même cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans l'équation proposée, j'aurai une équation transformée où le second terme sera évanoüi; ainsi si l'équation n'avoit que trois termes comme dans les trois formules générales ausquelles je réduis toutes les équations possibles dans chaque degré, alors l'équation transformée seroit une équation pure & simple du degré de la proposée, danslaquelle il n'y auroit que deux termes. Ainsi il sera facile de trouver la racine de la nouvelle inconnuë y, & substitüant cette valeur dans l'équation simple ou du premier degré, sçavoir $x = y \pm \frac{a}{3}$ pour le troisiéme degré & $x = y \pm \frac{a}{2}$ pour le second degré, on trouvera la valeur de l'inconnuë x.

Remarque seconde & fondamentale.

On peut résoudre toutes les équations du second degré, en faisant évanoüir le second terme par la transformation, car alors il ne reste plus que deux termes, dont

le premier est inconnu & le second est tout connu, car tirant la racine quarrée de chaque membre on aura la valeur de y, qui étant substituée dans $x = y \pm \frac{a}{2}$ donnera la valeur de x, ce qui est trop facile pour s'y arrêter davantage.

SECTION CINQUIE'ME.

Méthode générale & nouvelle,

Pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, par le terme dominant.

MOnsieur de Lagny a donné cette Méthode à l'Académie ; elle est imprimée dans le Recüeil de l'année 1706. page 296.

Cette Méthode s'étend à tous les degrez à l'infini, & sert à trouver d'abord la premiére racine de l'équation proposée, par une simple extraction de racine, qui n'est proprement qu'une simple division, dans les équations affectées de termes moyens, comme dans les équations pures & simples.

1°. *Préparation.* Je réduis d'abord les équations affectées de termes moyens à trois formules seulement, en conservant la loi des homogénes, en sorte que tous les termes dans chaque formule aïent le même nombre de dimensions.

Dans le second degré, j'ai les trois formules suivantes,

1re. formule. $x^2 + ax = b''$.

2de. formule. $x^2 - ax = b''$.

3me. formule. $-x^2 + ax = b''$. ou $x^2 - ax = -b''$.

Dans le 3me, degré, j'ai les trois formules ſuivantes.

1re. formule. $x^3 + a''x = b'''$.

2de. formule. $x^3 - a''x = b'''$.

3me. formule. $-x^3 + a''x = b'''$. ou $x^3 - a''x = -b'''$.

& pareillement dans tous les degrez ſupérieurs.

Or il eſt facile de réduire les autres formules du troiſiéme degré aux trois précédentes en faiſant évanoüir le ſecond terme par la transformation ſuivant les Méthodes connuës; on peut même opérer directement ſur une équation quelconque par cette nouvelle Méthode, ſans faire évanoüir aucune terme.

En quoi conſiſte la Méthode, je néglige la haute puiſſance que je ſuppoſe nulle, & je n'opére que ſur a *&* b.

2°. La Méthode conſiſte à faire une diviſion ſimple, dont le dividende & le diviſeur ſont toujours donnez dans toute équation propoſée, c'eſt le cœfficient *a* & l'homogéne *b*; mais la dìfficulté conſiſte à connoître quel eſt le diviſeur, car dans un cas *a* eſt le diviſeur, & dans un autre cas c'eſt *b* qui eſt le diviſeur.

En général le terme, *dominant*, eſt toujours le diviſeur.

Premier cas. Si *a* eſt le terme dominant il eſt le diviſeur, & l'homogéne eſt le dividende,

Second cas. Au contraire ſi *b* eſt le terme dominant d'une équation propoſée, *a* eſt le dividende, & *b* le diviſeur.

Troiſiéme cas. Mais ſi *a* & *b* dominent également, ou plûtôt s'ils ne dominent ni l'un ni l'autre, on peut en ce cas d'égalité tirer la racine du degré de l'équation dans l'homogéne, ce ſera la premiére racine deſirée. Cependant ſi le nombre des tranches eſt égal, celui dont la premiére

tranche contient le plus grand nombre est le terme dominant.

3°. Voici la marque du terme dominant. Je divise a & b par tranches comme dans les puissances.

Dans le second degré où le multiplicateur numérique a n'a qu'une dimension, je le coupe par tranches d'un seul chifre de droite à gauche.

Et comme l'homogéne b a deux dimensions, je le coupe par tranches de deux chifres de droite à gauche.

Celui des deux qui a plus de tranches est le terme dominant & par conséquent c'est le diviseur.

Dans le troisiéme degré où le multiplicateur a'' est de deux dimensions, je le coupe par tranches de deux chifres de droite à gauche.

Et l'homogéne b est de trois dimensions, je le coupe par tranches de trois chifres de droite à gauche,

Premier cas où a *est le terme dominant.*

Premier Exemple. Dans la premiére formule du second degré $x^2 + ax = b''$, soit l'équation proposée $x^2 +$ 5. 4. 8. 7. 6. $x =$ 38. 41. 81. je suppose x^2 nul ou égal à zéro, partant je le néglige entiérement, & je ne considére que le cœfficient $a =$ 5. 4. 8. 7. 6. & l'homogéne de comparaison $b'' =$ 38. 41. 81.

Comme le cœfficient a n'est que d'une dimension, je le divise par tranches d'un seul chifre, j'en trouve cinq ; & comme b'' est de deux dimensions, je le divise par tranches de deux chifres de droite à gauche, je n'en trouve que trois. Donc a est le terme dominant, & par conséquent c'est le diviseur, & b'' est le dividende ; & je fais la division comme il suit.

Dividende. $b'' =$ 38. 41. 81. } *Quotient.*
Diviseur. $a =$ 5. 4. 8. 7. 6. } 7.

Je dis en 38 qui est la premiére tranche du dividende combien de fois cinq premier chifre ou premiére tranche du diviseur, il y est sept fois ; car $5 \times 7 = 35$. de 38 reste 3.

Ensuite je multiplie le diviseur entier. 54876 par le quotient trouvé 7, le produit est 38. 41. 32. auquel j'ajoûte le quarré de $7 = 149$ qui est l'homogéne proposé, la somme est 38. 41. 81. $= b''$.

Donc 7 est la racine exacte.

Remarque. Dans l'équation $x^2 + 5.4.8.7.6x = 38.41.86$.

Diviseur a dominant	*Dividende b''.*	*Quotient*
5. 4. 8. 7. 6.	38. 41. 86.	$7. + \frac{5}{54.87.6.}$

$$
\begin{array}{lllll}
7. & \ldots\ 38.\ 41.\ 81. & = & 38.\ 41.\ 32. \\
 & \text{reste}\ 5. & & \underline{+\ 49} \\
 & & & 38.\ 41.\ 81.
\end{array}
$$

$$\left\{ x - 7 = 0 \left\{ x^2 + 54876\, x. - 384186 = 0 \right.\right.$$

$$
\begin{array}{llll}
x \ldots\ldots & x^2 - 7x & & \\
 & 0 + 54883x & & \\
+ 54883.. & + 54883x & - 384181. & \\
0 & 0 & \text{reste}\ 5 &
\end{array}
$$

Comme la division n'est pas exacte, & qu'il y a un reste moindre que le diviseur qui est le terme dominant *a* ; dans ce

ce cas l'équation proposée a ses racines irrationelles, l'une plus grande que 7, mais plus petite que 8. l'autre plus grande que 54883 mais plus petite que 54884.

2[d]. *Exemple.* Dans la seconde formule $xx - ax = b''$. soit l'équation proposée $xx - 5.4.8.7.6.x = 38.41.81$.

Le multiplicateur a est le terme dominant, puisqu'il a cinq tranches de chifres, & que l'homogéne b'' n'en a que trois.

Dans ce cas je suppose $x = a + \frac{b''}{a}$, ce qui donne $x = 5.4.8.7.6. + \frac{38.41.81.}{5.4.8.7.6.}$ or cette fraction donne au quotient 7, ce qui donne $x = 5.4.8.7.6 + 7 = 54883$. pour la grande racine positive, & divisant l'équation proposée par cette racine, le quotient donne la petite racine négative -7.

1[re]. Racine. *Diviseur* $x - 54883$	Equation proposée. $xx - 54876x - 38.41.81$

Quotient,

$x \ldots\ldots xx - 54883x$ premier produit à ôter.

$0 \qquad + 7x - 38.41.81.$

$+ 7 \ldots\ldots\ldots + 7x - 38.41.81.$

$= 0 \qquad 0 \qquad 0$

Dans la troisiéme formule $- xx + 5.4.8.7.6x = 38.41.81$, j'ai $x = \frac{38.41.81}{5.4.8.7.6}$ qui donne encore $x = 7$.

Remarque. Lorsque b'' est plus petit que a, je suppose

$b'' = 0$, & j'ai $x = a$ pour la valeur approchée de la racine.

Second cas où l'homogéne de comparaison b'' est le terme dominant.

Dans ce cas, je peux absolument négliger le multiplicateur numérique a du second terme, & ne faire qu'une simple extraction de la racine quarrée de l'homogéne de comparaison b'', & dans tous les degrez supérieurs tirer la racine exprimée par l'exposant du degré de l'équation.

Troisiéme cas où il n'y a aucun terme dominant.

C'est lorsque le cœfficient a & l'homogéne b'' ont un égal nombre de tranches; il suffit alors de tirer la racine de l'un ou de l'autre, suivant l'exposant de leurs dimensions.

Les tables des quarrez & des cubes naturels présentent un moïen facile pour trouver ces racines du premier coup d'œil lorsqu'elles sont rationelles, & lorsqu'elles sont irrationelles, on les trouve d'abord approchées à moins de l'unité près, soit par excés, soit par défaut, & on approchera indéfiniment par la Méthode d'approximation.

Remarque. Cette nouvelle Méthode par le terme *dominant*, où l'on néglige x^2, ou x^3 qu'on regarde comme nul, abrége les opérations qu'on ne pourroit pas finir dans un jour entier de calcul par les formules ordinaires, car il est évident que quelque petite que soit la premiére racine, elle peut se trouver multipliée par un très-grand nombre, & le produit augmenté ou diminué du quarré de cette petite racine sera égal à un homogéne indéfiniment grand, ce qui demande des opérations très-longues dans la Méthode ordinaire.

Résolution des Equations du troisiéme degré par le terme dominant.

Je réduis à trois formules seulement toutes les équations du troisiéme degré, dans lesquelles il y a deux racines positives & la troisiéme négative, ou deux racines négatives & la troisiéme positive, de sorte que la somme des racines positives est égale à celle de la négative, ce qui détruit le second terme & donne $o x^2$.

Premiére formule $x^3 + a'' x = b'''$.

Seconde formule $x^3 - a'' x = b'''$.

Troisiéme formule $- x^3 + a'' x = b'''$.

Dans lesquelles le multiplicateur a'' est de deux dimensions, & l'homogéne b''' de trois dimensions; ainsi dans les équations numériques je divise a'' par tranches de deux chifres de droite à gauche, & l'homogéne b''' par tranches de trois chifres de droite à gauche.

1er. *Exemple.* Soit $x^3 - 75.\ 00\, x = 250.\ 000.$ dans laquelle $a = 75.\ 00$ contient deux tranches de deux chifres, & $b''' = 250.\ 000$, contient aussi deux tranches de trois chifres, donc ces deux termes sont dans l'égalité & ne dominent point.

Préparation. J'ajoute à 75. 00, son tiers 25. 00, pour avoir ses quatre tiers 100. 00. j'en tire la racine quarrée c'est 100, voilà la premiére racine trouvée.

Ou bien je multiplie l'homogéne $b''' = 250\ 00$ par 4, le produit est 1000. 00, j'en tire la racine cubique 100, c'est encore la racine désirée.

En général, je résous toutes les équations affectées comme les équations pures & simples. Ainsi pour $x^3 - 6x = 464$, il suffit de trouver un nombre dont le

cube diminué de six fois sa racine, soit $=$ 464, or ce nombre est 8, dont le cube est 512, or 512 $-$ 8×6 (48) $=$ 464.

Dans tous les cas où l'un des deux termes domine peu, comme b''' dans $x^3 - 2.00x = 980.000$, puisqu'il y a deux tranches dans a'' & dans b''', mais les tranches de a'' sont foibles, je me contente de tirer simplement la racine approchée de b'''. prochainement plus grande, c'est 100.

Résolution des équations du troisiéme degré dans la première formule $x^3 + a''x = b'''$.

Soit l'équation proposée $x^3 + 21x = 8\,420$. où le multiplicateur a'' de deux dimensions $=$ 21, & b''' $=$ 8. 420. je coupe a'' pour tranches de deux chifres, il n'en a qu'une, je coupe b''' par tranches de trois chifres de droite à gauche, il en a deux dont la seconde n'a que le seul chifre 8, par conséquent b''' est le terme dominant; je tire la racine cubique de 8 qui fait la premiére tranche c'est 2, j'ajoute un zéro pour la seconde tranche, ou simplement je dis la racine cubique de 8 000, est 20, c'est la premiére racine positive, je multiplie 20 par a'' $=$ 21, le produit est 421, que je multiplie par la même racine 20, le produit donne 8 420 qui est égal à l'homogéne b'''.

Autrement. Je quarre la racine trouvée 20, c'est 400, que je multiplie par 21, le produit est 8 400, auquel j'ajoute la même racine 20, la somme 84200 est égal à l'homogéne proposé.

Pour la preuve je divise l'équation proposée par la racine positive trouvée, la division se fait exactement.

$\left\{ x - 20 = 0 \left\{ x^3 \pm 0x^2 + 12x - 8.420 = 0 \right.\right.$

Quotient.

$x^2 \ldots\ldots\ x^3 - 20x^2$

$0 + 20x^2 + 21x$

$+20x \ldots\ldots + 20x^2 - 400$

$0 + 421x - 8420$

$+421 \ldots\ldots + 421x - 8.420$

$= 0 \ldots\ldots 0 \quad 0$

Second exemple. Soit $x^3 + 18x = 44$ où $a'' = 18$, & $b''' = 44$., dont la premiére racine eſt 42, pour la trouver je dis $a'' = 18$ eſt ici le terme *dominant*, & par conſéquent le diviſeur, puiſqu'il a ſa tranche complette de deux chifres, & $b = 44$ n'a que deux chifres au lieu qu'il devroit en avoir trois, ainſi b''' eſt le dividende.

Pour ſuivre la régle générale le diviſeur eſt 18, or 44 diviſé par 18 donne 2 au quotient, c'eſt la premiére racine, je multiplie 18 par cette racine 2, le produit eſt 36 auquel j'ajoute le cube 8 de la même racine 2, la ſomme eſt 44 égale à l'homogéne propoſé.

$$x - 2 = 0 \left\{ x^3 \pm 0 x^2 + 18 x - 44 = 0. \right.$$

x^2	x^3	$- 2x^2$		
	0	$+ 2x^2$	$+ 18x$	
$+ 2x$		$+ 2x^2$	$- 4x$	
		0	$+ 22x$	$- 44$
$+ 22$			$+ 22x$	$- 44$
$= 0$			0	0

Résolution des Equations du troisiéme degré dans la seconde formule $x^3 - a''x = b'''$, *ou* $x^3 - aax = b^3$.

C'est proprement dans les grands nombres qu'on a besoin de Méthodes, ainsi je donnerai ici de grands nombres pour exemples.

La formule universelle pour trouver la premiére & plus petite racine est $x = a + \frac{b}{2aa} - \frac{cd - b}{3cc - aa} - \frac{ef - b}{3ee - aa}$ &c. dans laquelle le premier terme complexe donne la racine par excés, c'est pourquoi il faut le diminuer & continuer la soustraction jusqu'à ce que les deux termes du numérateur soient égaux ou donnent zéro, car si $cd - b = 0$, ou $ef - b = 0$, alors l'opération est finie, & la racine est trouvée exactement $= c$, ou $= e$ &c.

Or l'équation proposée donne le premier terme complexe $a + \frac{b}{2aa}$, car a est la racine quarrée du multiplicateur a''. b est l'homogéne & $2aa$ est le double du multiplicateur de l'équation $a''x$, ou aax, pour avoir les autres fractions qu'il faut soustraire, je suppose $a +$.

$\frac{b}{2aa} = c$ pour abréger, & $cc - aa = d$, je ſuppoſe auſſi $ee - aa = f$, &c.

Je prends toujours les quotients marquez par les fractions de cette formule en nombres entiers, ſçavoir le premier $\frac{b}{2aa}$, par défaut, & les autres comme $\frac{cd-b}{3cc-aa}$ $\frac{ef-b}{3ee-aa}$ par excés.

Je pourrois même au lieu de la fraction $\frac{b}{2aa}$ prendre $\frac{b}{2aa+3a+1}$, ce qui abrége en quelques rencontres & conſerve l'analogie, mais comme $3a + 1$ eſt un infiniment petit à l'égard de la grandeur conſtante $2aa$, on peut le négliger, comme je le néglige effectivement.

Je ſuppoſe toujours l'équation préparée à l'ordinaire, c'eſt-à-dire ſans fractions & ſans incommenſurables, & même ſi l'on veut pour une plus grande facilité ſans multiplicateur à la haute puiſſance que l'unité, cette derniére préparation n'eſt que d'élégance & non pas de néceſſité, car ſi j'ai $cx - aax = b$, ſuppoſant que c repréſente un nombre entier quelconque, alors au lieu de a pour premier membre de la racine, je prendrois $\sqrt{\frac{aa}{c}}$, ou $\frac{a}{c}$, ce qui ne change rien dans l'eſſence de la Méthode.

Il faut auſſi examiner ſi l'équation eſt primitive, ou ſi elle eſt dérivée, on connoîtra qu'elle eſt dérivée ſi on peut diviſer l'homogéne par le cube d'un nombre quelconque, & le multiplicateur aa par le quarré du même nombre, & l'équation qui réſulte de cette diviſion eſt l'équation primitive ſur laquelle il faut opérer, car c'eſt préciſément la même faute d'exactitude en matiére d'équations, d'en réſoudre une qui ſoit dérivée ou compo-

ſée ſans l'avoir réduite à ſon équation ſimple ou primitive, comme d'opérer ſur les fractions ſans les avoir réduites à leurs moindres termes.

Exemple. Soit l'équation propoſée $x^3 - 75.69x = 243.100.$ dans la ſeconde formule du troiſiéme degré, dans laquelle $aa = 75.69.$ qui contient deux tranches de deux chifres chacune, parce qu'il a deux dimenſions, & l'homogéne $b''' = 243.100$, qui contient deux tranches chacune de trois chifres, parce que cet homogéne a trois dimenſions.

Puiſqu'il y a deux tranches de part & d'autre, je tire la racine quarrée de 75. Premiére tranche du cœfficient aa, c'eſt 8, enſuite je tire la racine cubique de 243 premiére tranche de b''' c'eſt 6, car le cube de 6 eſt 216 moindre que 243, & le cube de 7 eſt 343.

Or la racine quarrée 8 du multiplicateur aa, eſt plus grande que 6, racine cubique de l'homogéne 243. Ainſi le multiplicateur aa eſt le terme dominant, & par conſéquent c'eſt le diviſeur, & b''' eſt le dividende.

1°. Pour avoir le premier membre de la racine qui eſt toujours plus grand que la racine cherchée, je me ſers de la 1[re]. partie de la formule $a + \frac{b}{2aa}$, c'eſt-à-dire, je prends la racine quarrée de $75\,69 = aa$, cette racine eſt $87 = a$.

Et ſuivant $\frac{b'''}{2aa}$ j'ai la fraction $\frac{243100}{15138}$ qui indique une diviſion.

Diviſeur.	Dividende.	Quotient.
$2aa = 15138$	$b''' = 243100.$	16 +

1 . . . . . . 15138.

91720.

6 . . . . 90828.

892.

Racine.

	7569	87—
S.	64	
	11:69	
16;7.	11 69	

Ainſi

Ainsi le premier membre de la formule $a + \frac{b'''}{2aa}$ donne pour premier membre de la racine $87 + 16 = 103 +$ qui excéde la véritable valeur de la racine cherchée, & c'est en quoi consiste l'esprit de la Méthode qui se sert de la soustraction ensuite pour trouver la racine, par la voïe la plus courte. Or il est indifférent en général qu'on employe dans une Méthode, ou l'addition ou la soustraction.

2°. Pour avoir le second membre de la racine, je me sers du second membre de la formule $- \frac{cd - b}{3cc - aa}$ dans laquelle $c = a + \frac{b}{2aa} = 103$.

Donc $cc = 103 \times 103 = 10609$. Donc $3\,cc = 31827$.

$\& - aa = -7569$.

Donc $3\,cc - aa = 24258$.

Valeur du Dénominateur.

Pour trouver la valeur du numérateur $cc - aa = d$ ou $10609 - 7569 = 3040 = d$.

multiplié $\times c = 103$.

9120.

3040...

produit $cd - 313120$.

$- b = 243100$.

Donc $cd - b = 70020$. valeur du numérateur

ce qui donne $- \frac{cd - b}{3cc - aa} = \frac{70020}{24258} = -3-$.

C'eſt le ſecond membre de la racine; je fais l'addition des deux membres 103 +
— 3 —

Somme 100 c'eſt la racine cherchée; pour juger ſi elle eſt exacte, je la quarre, 100 × 100 donne 100.00. dont j'ôte 7569, il reſte 2431, que je multiplie par la même racine trouvée 100, le produit eſt 243100. qui eſt égal à l'homogéne propoſé. Ainſi 100 eſt la racine cherchée, par laquelle je diviſe l'équation ſans paſſer au reſte de la formule univerſelle.

$$x - 100 = 0 \left\{ x^3 \pm 0x^2 - 7569x - 243100 = 0 \right.$$

x^2	$x^3 - 100x^2$.		
	$0 + 100x^2. - 7569x$.		
$+ 100x$ . . .	$+ 100x^2. - 10000x$.		
	0	$+ 2431x$.	
$+ 2431$		$+ 2431x$	$+ 243100$.
		0	0
$= 0$			

Le quotient $x^2 + 1.0.0x + 24.31 = 0$ eſt une équation du ſecond degré où $a = 100$ eſt le terme dominant parce qu'il eſt d'une ſeule dimenſion, & que ſes chifres font trois tranches, mais $b'' = 24.31$, eſt de deux dimenſions, car ſes quatre chifres ne font que deux tranches chacune de deux chifres.

Ainſi $a = 100$ eſt le terme dominant & le diviſeur; mais $b = 2431$ eſt le dividende.

Diviſeur. a terme dominant 100.	*Dividende.* $b'' = 24.31.$	*Quotient.* $24 + \frac{31}{100}$
2	200	
	4.31	
4	400	
	reſte 31.	

Comme le quotient donne un reſte, les deux racines de cette équation du ſecond degré ſont irrationelles l'une plus grande que 24, mais moindre que 25., l'autre plus grande que 76 & plus petite que 77. toutes deux négatives, puiſque tous les ſignes de l'équation ſont +

$x + 24 = 0. \{ x^2 + 100x + 2431 = 0. \}$

x	$x^2 + 24x.$	76
	$0 + 76x. + 2431$	×24
$+76$	$+76x. + 1824$	304
		152.
$= 0$	$0 \ldots 607$	1824

Remarque. 1. Pour conſerver une Analogie entiére & parfaite dans la formule univerſelle de la racine

1°. Je ſuppoſe le premier membre $= a$, enſuite j'ai $aa - aa = 0$.

2°. Je prends pour le ſecond membre $+ \frac{aa + b}{3aa - aa}$ $= a + \frac{b}{2aa}$ dans lequel enſuite ſuppoſant $a + \frac{b}{2aa} = c$, & $cc - aa = d$ pour avoir le troiſiéme membre ſuivant.

3°. J'ai pour le troisiéme membre $-\frac{cd-b}{3ee-aa}$ dans lequel suppofant enfuite $c-\frac{cd-b}{3cc-aa}=e$, & $ee-aa=f$. Pour avoir le quatriéme membre fuivant.

4°. J'ai pour le quatriéme membre $-\frac{ef-b}{3ee-aa}$ & continuant ainfi de fuite on trouvera des membres différens à l'infini.

Remarque. 2. Lorfque dans l'un ou l'autre de ces membres le numérateur donne zéro, c'eft-à-dire, lorfque $cd=b$, ou $ef=b$, &c. La queftion eft réfoluë, dans ce cas la racine cherchée eft c, ou e, &c. Alors il faut s'arrêter au membre qui l'a donnée fans pouffer plus loin l'opération après qu'on a trouvé une racine, ou exacte ou approchée à moins de l'unité près.

Réfolution des Equations du troifiéme degré.

Dans la troifiéme formule $x^3-aax=-b'''$, ou $-x^3+aax=b'''$; je prends toutes les quotiens par excès dans la formule univerfelle pour la premiére racine qui fuit.

Je néglige x^3 que je fuppofe égal à zéro, & je fais une équation des deux termes $aax=b'''$. ce qui donne 1°. par tranfpofition & divifion en dégageant l'inconnuë $x=\frac{b'''}{aa}$. C'eft le premier membre de la racine.

Exemple. Soit $x^3-5.24.16x=-1.244.160$, dans laquelle $aa=5.24.16$. qui a trois tranches de deux chifres chacune, parce qu'il eft de deux dimenfions, & $b'''=-1.244.160$, cet homogéne eft de trois dimenfions & a trois tranches de chifres; mais la derniére tranche eft incomplette, puifqu'elle n'a que le feul chifre 1 au lieu de trois chifres qu'elle devroit avoir, & la troifié-

me tranche du multiplicateur aa est 5 qui surpasse 1. Ainsi aa est le terme dominant ou le diviseur, b''' est le dividende.

Diviseur aa	Dividende. b'''.	Quotient.
= 5. 24. 16.	1. 244. 160.	23 + ou 24 —

2 . . . . . 1. 04832
195840
4 — 209664
reste — 13824

Ainsi je prends pour le premier membre de la racine 24. qui est un quotient par excès, que je suppose $= c$, que je quarre pour substituer sa valeur, dans le second membre de la racine dont la formule est $c + \frac{b - cd}{aa - 3cc}$, j'ai $cc = 476$, que j'ôte de $aa = 5.\ 24.\ 16$, ce qui donne $51840 = d$, que je multiplie par la même racine trouvée $c = 24$, le produit $cd = 1.\ 244.\ 160$ est égal à l'homogéne proposé b''', & ils se détruisent par des signes contraires.

Donc la premiére racine est 24, qui est exacte; mais si b''' ne se trouvoit pas égal à cd, dans ce cas, il faudroit continüer l'opération suivant la formule universelle de la premiére racine $\frac{b'''}{aa} + \frac{b''' - cd}{a^2 - 3cc} + \frac{b''' - ef}{a^2 - 3ee}$ &c. dans laquelle on suppose dans le premier membre $\frac{b'''}{aa} = c$ & $a - cc - d$, pour avoir le second membre $\frac{b''' - cd}{a^2 - 3cc}$ ensuite supposant ce second membre $= e$ &

$a^2 - ee = f$, pour former le troisiéme membre
$\frac{b''' - ef}{a^2 - 3ee}$,

Ce qui donne 1°. $x = \frac{b'''}{aa}$,

2°. $x\, c + \frac{b''' - cd}{aa - 3cc}$, ou $c + \frac{c^3}{aa - 3cc}$, car j'ai supposé

$d = a - c$, & $c = \frac{b'''}{aa}$, or $c \times cc = c^3$.

3°. $x = e + b''' - ef$, & ainsi de suite à l'infini, ou simplement 1°. $x = \frac{b}{a}$, 2°. $x = \frac{c}{d}$, 3°. $x = \frac{e}{f}$

4°. $x = \frac{g}{h}$, &c.

Régle générale. Je prends toujours en nombres entiers les valeurs de tous les quotients $\frac{b'''}{c}$, $\frac{b''' - cd}{a^2 - 3cc}$, ou

$\frac{c^3}{a - 3cc}$, &c. parce que je suppose que a & b sont des nombres entiers, & que je cherche la racine ou la valeur de x en nombres entiers.

Mais dès que le produit $c\,d$, ou ef, &c. se trouve égal à l'homogéne proposé, l'opération est finie, & j'ai la valeur de x en nombres entiers, qui est une racine rationelle.

Au contraire si après avoir trouvé que le produit $c\,d$, est moindre dans une opération que l'homogéne proposé b''', ce produit se trouve plus grand que cet homogéne dans l'opération suivante, la racine est alors irrationelle, & sa valeur est trouvée en nombres entiers à moins d'une unité près dans ces deux équations, dont l'une donne la racine par défaut à l'unité près, & la suivante donne la racine par excés.

Mais il faut que $\frac{1}{27}a^3$ ſoit ou plus grand ou égal à $\frac{1}{4}$ bb, car s'il étoit plus petit dans ce cas, l'équation ſeroit impoſſible, car dans le cas d'égalité ou $\frac{1}{27}a^3 = \frac{1}{4}bb$, on aura $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}a} = \sqrt{\frac{1}{2}b}$; c'eſt-à-dire, qu'il ſuffit de tirer la racine cube du tiers du multiplicateur a'', ou la racine quarrée de la moitié de l'homogéne b''', mais dans le cas d'inégalité, la racine ſera d'autant plus aiſée à trouver que a^3 ſurpaſſera davantage bb.

Remarque générale. Lorſque le cœfficient a'' & l'homogéne b''', ſont tels que le même nombre qui meſure a'' par ſon quarré, meſure b''' par ſon cube, on pourra toujours réduire l'équation à moindres termes, alors c'eſt une équation dérivée qu'il faut réduire à ſon équation primitive, & c'eſt une faute auſſi importante de négliger cette opération dans une équation, que de vouloir opérer ſur les fractions ſans les réduire auparavant à leurs moindres termes; l'équation précédente ſervira d'un troiſiéme exemple $x^3 - 52416x = -1244160$, c'eſt un exemple tiré exprès d'Hariot, page 146, 147, & 148 de ſon exégétique numérique pour comparer cette Méthode (qui eſt très-courte comme il paroît ci-deſſus) avec la ſienne & celle de Viette qui demandent trois pages in folio de calcul.

Cependant Hariot a très mal choiſi cet exemple, car l'équation $x^3 - 52416x = -1244160$, qui a pour racines $+24$, $+216$, -240, eſt une équation dérivée, puiſque le multiplicateur $a'' = 52416$ eſt meſuré par 576, qui eſt le quarré de 24, qu'il contient 91 fois, & l'homogéne -1244160 eſt meſuré par 13824, qui eſt le cube du même nombre 24, qu'il contient 90 fois.

Ainſi l'équation ſimple & primitive dont celle d'Hariot eſt dérivée eſt $y^3 - 91y = -90$, dans laquelle $aa = 91$, & $b''' - 90$, dont les trois racines ſont $+1$, $+9$ & -10, car le multiplicateur $aa = 91$ eſt

le diviſeur, & $b''' = 90$ le dividende, ce qui donne $\frac{91}{90} = 1 + \frac{1}{90}$.

$$\left\{ y - 1 = 0 \left\{ y^3 \pm 0y^2 - 91y + 90 = 0 \left\{ y^2 + 1y - 90 = 0. \right.\right.\right.$$

$y^2 \ldots y^3 - 1y^2$ premier produit.

$0 + 1y^2 - 91y$ premier reſte.

$+ 1y \quad + 1y^2 - 1y$ ſecond produit.

$0 - 90y + 90$ ſecond reſte.

$- 90y + 90.$

$-90 \ldots\ldots 0 \quad 0.$

$= 0 \ldots\ldots$

$$\left\{ y - 9 = 0 \left\{ y^2 + 1y - 90 = 0. \right.\right\}$$

$y \ldots\ldots y^2 + 1y$

$0 + 10y - 90$

$+ 10 \ldots\ldots + 10y - 90$

$0 \quad 0$

$= 0$

$\left\{ x - 24 = 0 \left\{ x^3 \pm 0x^2 - 52416x + 1244160 = 0. \right.\right.$

$x^2 \ldots\ldots x^3 - 24x^2$

$0 + 24x^2 - 52416x$

$+ 24x \ldots + 24x^2 - 576x$

$0 - 51840x + 1244160.$

$- 51840 \ldots\ldots\ldots - 51840x + 1244160.$

$= 0 \qquad 0 \qquad 0$

$\left\{ x - 216 = 0 \left\{ x^2 + 24x - 51840 = 0. \right.\right.$

$x \ldots\ldots\ldots x^2 - 216x$

$0 + 240x - 51840.$

$+ 240 \ldots\ldots + 240x - 51840.$

$= 0 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots 0$

Méthode pour trouver la seconde racine.

La premiére étant trouvée, dans la seconde & la troisiéme formule du troisiéme degré, je me sers de la formule $\sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c = d$.

Ainsi dans l'Exemple précédent tiré d'Hariot où il y a deux racines positives & la troisiéme qui est négative, égale à la somme des deux positives.

J'ai trouvé ci-dessus la premiére racine positive $+ 24 = c$, pour trouver la seconde $= d$, suivant la formule ci-dessus, j'ai $\frac{1}{2}c = 12$; ensuite je quarre c c'est $cc = 144$, que je multiplie par 3 c'est 432, que j'ôte du

cœfficient ou multiplicateur $aa = 52416$, le reste est $51989 = a - \frac{1}{4}cc$; ensuite j'en tire la racine quarrée c'est $228 = \sqrt{a - \frac{1}{4}cc}$, de laquelle j'ôte $12 = \frac{1}{2}c$, le reste est $216 = \sqrt{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c$. Donc 216 est la seconde racine positive cherchée $= d$.

Autre Exemple dans la troisiéme Formule du 3me degré.

On demande le côté de l'octo-décagone, ou ce qui est la même chose la sécante de 80 degrez ou des $\frac{2}{9}$ de la circonférence du cercle. Si je suppose le raïon $= 1$, le sinus de 10 degrez ou de la trente-sixiéme partie du cercle est la moitié du côté de l'octo-décagone lequel côté est la petite racine de l'équation $x^3 - 3x = -1$, mais la sécante de 80 degrez est le double d'une valeur de y dans l'équation $y^3 - 3y^2 = -1$; il en est de même de toutes les sécantes dont les arcs ne peuvent être donnez que par la trisection de l'angle.

Dans l'équation $x^3 - 3x = -1$, j'ai $a'' = 3$, & $b''' = 1$. Par conséquent substituant dans la formule ces nombres en la place des lettres au lieu de $a - \frac{ab}{a^3 - 2b}$ j'ai $3 - \frac{3 \times 1}{27 - 2}$ $\left(= \frac{3}{25}\right)$ ou $3 - \frac{3}{25} = \frac{72}{25} = c$.

Ensuite pour avoir le terme suivant je quarre c, c'est $cc = \frac{5184}{625}$ & $a - c = d = 3 - \frac{72}{25} = \frac{75 - 72}{25}$ $\left(= \frac{3}{25}.\right)$ Donc $ccd = \frac{15552}{15625}$ que j'ôte de $b''' = 1$; il reste $\frac{73}{15625}$, que je divise par $3cc - 2ac = \frac{15552}{625} = \frac{432}{25}$, c'est-à-dire $\frac{118800}{15625}$, le quotient est $\frac{73}{118800}$ que j'ôte de $\frac{72}{25}$, il reste $\frac{342071}{118800} = 2.\,879385^{\text{VI zéros}}$, &c. dont le double $5.\,758770^{\text{VI}}$, est effectivement la sécante de 80 degrez conformément aux Tables.

Démonstration de la résolution des Equations.

Dans la troisiéme formule $x^3 - a''x = b'''$.

1°. Je cube a, & je quarre b, ce qui donne a & bb.

2°. Je divise a^3 par bb, c'est $\frac{a^3}{bb}$. Si le quotient est $6\frac{1}{4}$, la racine sera $\frac{3b}{2a}$.

Or le quotient ne peut jamais être moindre que $6\frac{1}{4}$; car si je suppose dans l'équation proposée $a'' = 3cc$, & $b''' = 2c^3$, la substitution donnera $x^3 - 3ccx = - 2c^3$. Or le cube de $3cc$ est $27c^6$, & le quarré de $2c^3$ est $4c^6$, & divisant l'un par l'autre $\frac{27c^6}{4c^6}$, le quotient $= 6\frac{3}{4}$. Maintenant lorsque $x^3 = 3ccx - 2c^3$, il est évident que $x = \frac{3b}{2a} = \frac{6c^3}{6cc} = c$, car en substitüant c à la place de x, on aura $c^3 = 3c^3 - 2c^3 = c^3$.

3°. Pareillement on démontrera que si le quotient de $\frac{a^3}{bb} = 7\frac{1}{9}$, la racine ou plûtôt l'une des racines sera $\frac{4b}{3a}$, par exemple dans l'équation $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $a = 4cc$, & $b = 3c^3$, par conséquent $a^3 = 64c^6$, & $bb = 9c^6$. Donc $\frac{a^3}{bb} = \frac{64c^6}{9c^6} = 7\frac{1}{9}$. & $\frac{4b}{3a} = \frac{12c^3}{12c^2} = c$.

Il est évident que $x = c$, car en substituant c à la place de x dans l'équation $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $c^3 = 4c^3 - 3c^3 = c^3$.

4°. Si le quotient est $5\frac{7}{4}$ ou $6\frac{3}{4}$ une des racines sera $\frac{3b}{2a}$

Si le quotient est $6\frac{10}{9}$ ou $7\frac{1}{9}$ une des racines sera $\frac{4b}{3a}$

Si le quotient est $7\frac{13}{16}$, la racine sera $\frac{5b}{4a}$

Si le quotient est $8\frac{16}{25}$, la racine sera $\frac{6b}{5a}$

Si le quotient eſt $9\frac{19}{36}$, une des racines ſera $\frac{7b}{6a}$.

Si le quotient eſt $10\frac{22}{29}$, une des racines ſera, $\frac{8b}{7a}$

Si le quotient eſt $11\frac{25}{64}$, une des racines ſera $\frac{9b}{8a}$, &c.

& univerſellement ſi le quotient $\frac{a^3}{bb} = c + \frac{\frac{3c-8}{2}}{c-3}$, ou

$= c + \frac{3c-8}{cc-6c+8}$, la racine ſera $\frac{\overline{c-2} \times b}{\overline{c-3} \times a}$

Mais ſi le quotient ne ſe trouve pas l'un des termes de la ſuite de cette progreſſion ; il doit néceſſairement ſe trouver entre deux termes conſécutifs de cette progreſſion & la racine de même ſera contenuë entre deux termes prochains des formules des racines de cette progreſſion. Par exemple, lorſque ce quotient eſt entre 26. & 27. la racine eſt entre $\frac{25}{24}$ & $\frac{24}{23}$, comme dans $x^3 = 3x - 1$, en ſuppoſant $a = 3$ & $b = 1$, & ſubſtituant j'ai $\frac{25b}{24a} = \frac{25}{72}$, & $\frac{24b}{23a} = \frac{24}{69}$.

Or $\frac{24}{69} - \frac{25}{72} = \frac{3}{4968} - \frac{1}{1656}$. Voilà une racine très-approchée, parce que lorſque $x - \frac{24b}{23a}$, le quotient $\frac{a^3}{bb} = 26\frac{70}{529}$; & lorſque $x = \frac{25b}{24a}$ alors le quotient $\frac{a^3}{bb} = 27\frac{73}{576}$ ſuivant la formule pour le quotient $c + \frac{\frac{3c-8}{2}}{c-3}$, & ſuivant la formule pour la racine $\frac{\overline{c-2} \times b}{\overline{c-3} \times a}$

Or ces deux formules commencent par $5\frac{7}{4}$, $6\frac{10}{9}$, $7\frac{1}{1}$ & continüent à l'infini dans la même progreſſion.

C'eſt-à-dire, le premier membre de la racine cherchée =

est $\frac{\overline{c-2}\times b}{\overline{c-3}\times a}$, & parce que $c=\frac{a^3}{bb}$ par hypothése, & que d'ailleurs la fraction $\frac{\frac{3c-8}{2}}{c-3}$ est un infiniment petit par rapport aux grandeurs constantes a, b, c, si l'on substituë $\frac{a^3}{bb}$ à la place de c dans la fraction $\frac{\overline{c-2}\times b}{\overline{c-3}\times a}$, on aura

$\frac{a^3b-2b^3}{a^4-3abb}$, ou $\frac{b}{a}+\frac{b^3}{a^4-3abb}$ ou enfin $+\frac{b^3.}{\overline{a^3-3bb}\times a}$

Mais présentement si l'on suppose $\frac{b}{a}=c$, (alors c'est une nouvelle valeur de c différente de la formule $\frac{\overline{c-2}\times b}{\overline{c-3}\times a}$) & si on substituë cette valeur dans la fraction $\frac{b^3}{\overline{a^3-3bb}\times a}$, on aura pour le premier membre de la racine cherchée cette valeur $c+\frac{c^3}{a-3cc}$ qui est précisément la valeur trouvée ci-dessus, dont nous avons fait la régle, ce qu'il falloit démontrer.

Ensuite pour trouver les autres membres de la racine $e+\frac{b-ef}{a-3ee}$, &c. je supppose $c+\frac{c^3}{a-3cc}=e$ ou $ax-x^3=b$, or puisque $e<x$, il s'ensuit de-là nécessairement que l'homogéne de comparaison donné, pris pour le premier pour $ax-a^3$, sera plus petit que b.

Soit donc $a-ee=f$, il suit de là que f est plus petit que b, & $b-ef$, est la différence des deux homogénes de comparaison pour les deux équations semblables qui suivent.

$ax-x^3=b$. & supposant $b=ae-ee$

$ae-e^3=ef$, & supposant $ef=\overline{a-ee}\times e$, &c.

Enfin pour avoir un troisiéme homogéne, puisque x est

un nombre entier, & que e eſt plus petit, la moindre valeur que je puiſſe ſuppoſer pour x eſt $e + 1$, je ſubſtituë cette valeur dans l'équation $ax - x^3 = b$, ou $a - x^2 = \frac{b}{a}$, la ſubſtitution donne $ae + 1a - ee - 3ee - 3e - 1 = d$.

Alors ſi $d = b$ qui eſt l'homogéne propoſé, la racine eſt trouvée, c'eſt $x = e + 1$: mais ſi l'homogéne d eſt encore moindre que l'homogéne propoſé b, il eſt évidemment plus grand que ef, car l'homogéne de comparaiſon augmente à meſure que la racine qui le forme augmente auſſi ; or l'homogéne d eſt formé du produit de e ſeul, c'eſt pourquoi je fais une régle de trois, ainſi je dis la différence des homogénes $ae - e^3 = ef$, & $ae - e^3 - 3ee - 3e - 1 + 1a = d$, cette différence eſt $a - 3ee - 3e - 1$.

Mais entre les deux homogénes $ax - x^3 = b$, & $ae - e^3 = ef$, la différence eſt $b - ef$.

Préſentement la racine qui a donné l'homogéne ef eſt e, la racine qui a donné l'homogéne d eſt $e + 1$, la différence de ces deux racines eſt 1, ce qui donne cette regle de trois.

Si $a - 3ee - 3e - 1$ différence dans l'homogéne vient de 1 différence dans les racines.

De combien viendra $b - ef$?

Le quotient $\frac{b - ef}{a - 3ee - 3e - 1}$ donnera le troiſiéme membre de la racine cherchée, mais parce que $3e - 1$ eſt un infiniment petit par rapport aux grandeurs conſtantes a, b, ef, je me contente de prendre univerſellement $\frac{b - ef}{a - 3ee}$, ce qu'il falloit trouver & démontrer.

Enfin il reſte à démontrer que ce troiſiéme membre de la racine, & les autres ſuivans qu'on peut trouver de la même maniére à l'infini, forment une ſomme plus petite que la racine lorſqu'elle eſt irrationelle, & qui en

approche de plus en plus à l'infini, & c'est tout ce qu'on peut désirer.

Soient trois équations géométriquement semblables,

1°. $x^3 = ax - b$, & soit $y = x + e$.

2°. $y^3 = ay - c$, & soit $z = y + f = x + e + f$

3°. $z^3 = az - d$.

Je dis que si l'on fait comme $c - b : d - c :: y - x$: à une quatriéme grandeur $\frac{d - c \times y - x}{c - b}$, la composée $y + \frac{d - c \times y - x}{c - b}$ sera plus petite que z, ou que son égale $x + e + f$, car en substitüant cette valeur dans $ax - x^3 = b$, & dans $ay - y^3 = c$, on aura

$ax + ae - x^3 - 3exx - 3eex - e^3 = c$.

donc $c - b = ae - 3exx - 3eex - e^3$, &c.

& enfin on aura

$$\frac{afe - f^3 - 3ffex - 3ffee - 3fexx - 6eefx - 3fe^3.}{ae - 3exx - 3eex - e^3.}$$

différence qui est plus petite que f, puisqu'il ne reste que tous termes négatifs.

On prouvera de la même maniére que cette différence deviendra plus petite qu'aucune grandeur donnée, & que par conséquent on peut approcher à l'infini de la valeur de la racine lorsqu'elle est irrationelle, & on la trouvera exactement dans le cas où elle est rationelle, ce qu'il falloit démontrer.

Remarque fondamentale.

La regle de trois que nous venons d'employer pour comparer la différence des homogénes & celles des racines qui les ont produits dans les équations géométriquement semblables, est un principe général & très fé-

cond pour résoudre les équations de tous les degrez à l'infini dans tous les cas possibles, réductibles ou irréductibles.

SECTION SIXIE'ME.

Méthode pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, par les progressions Arithmétiques.

JE suppose ici tout ce que Mr. de Lagny a démontré touchant les progressions Arithmétiques dans les Mémoires de l'Académie imprimez dans les années 1705, 1706 & 1722, où il démontre que les séries des homogénes des équations de tous les degrez à l'infini, sont des progressions Arithmétiques du même degré qui ont une derniére différence constante qui a le même exposant que le degré de l'équation proposée : je suppose cette vérité comme un axiome, & je me renferme seulement dans le détail des opérations néceſſaires pour résoudre les équations qu'il avoit promis.

Cette Méthode est générale pour tous les degrez, elle donne toujours les racines exactes lorsqu'elles sont rationelles, ou approchées à moins de l'unité près lorsqu'elles sont irrationelles. Il n'est point néceſſaire de faire évanoüir aucun terme, s'il en manque quelques-uns, il faut les remplir des puiſſances de l'inconnuë qui manquent, & leur donner le zéro pour cœfficient.

Je suppose l'équation proposée seulement sans fractions & sans incommensurables, & que l'inconnuë du premier terme n'a point d'autre cœfficient que l'unité, mais cette derniére condition n'est que d'élégance & non pas de néceſſité,

Dans

Dans le ſecond degré, ſoit l'équation propoſée $x^2 + 20x = 189$.

1°. Je ſubſtituë dans cette équation trois valeurs de x, commençant toujours par l'unité $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en la place de x, & leurs quarrez en la place de xx, comme l'équation eſt du ſecond degré. je fais trois ſubſtitutions, car il en faut toujours une de plus que l'expoſant du degré de l'équation ne contient d'unitez.

Ces ſubſtitutions me donnent trois équations arithmétiquement ſemblables.

$$x^2 + 20x = 189.$$

$x = 1$	... 1	+ 20	=	21.
$x = 2$	... 4	+ 40	=	44.
$x = 3$	... 9	+ 60	=	69.

Ce qui me donne trois homogénes primitifs, dont je cherche les différences par ſouſtraction comme il ſuit.

1er.	2d.	3e. homogéne.
+ 21.	+ 44.	+ 69.
	+ 21.	+ 44.
1re. différence.		
	+ 23.	+ 25.
		+ 23.
		+ 2.

2de. différence conſtante.

Je prends la premiére des premiéres & des ſecondes

différences avec le premier des homogénes que je range dans un ordre contraire.

1re. différence constante.	la 1re. des 1res. différences.	le 1er. des homogénes.
+ 2.	+ 23.	+ 21.

Ce sont trois nombres générateurs qui serviront à former par addition le Trapése logarithmique qui suit, chaque nombre générateur trouvé est à la tête de sa colonne de même nom, & la derniére colonne qui est celle des racines est la suite des nombres naturels. 1. 2. 3. &c.

Trapéſe logarithmique.

1re. col.	2de. colonne.	3e. colonne des homogénes.	4e. col. desRac.
		+ 21	1
	+ 23	+ 23	
+ 2	+ 2	+ 44	2
	+ 25	+ 25	
+ 2	+ 2	+ 69	3
	+ 27	+ 27	
+ 2	+ 2	+ 96	4
	+ 29	+ 29	
+ 2	+ 2	+ 125	5
	+ 31	+ 31	
+ 2	+ 2	+ 156	6
	+ 33	+ 33	
+ 2	+ 2	+ 189	7
	+ 35	+ 35	bon
		+ 224	8

Comme l'homogéne propoſé 189 ſe trouve dans la troiſiéme colonne qui eſt celle des homogénes dans la 7e. cellule, le nombre 7 qui eſt vis-à-vis eſt la racine déſirée, on trouvera la ſeconde racine en diviſant l'équation par $x - 7 = 0$, qui eſt la racine trouvée poſitive, puiſque l'homogéne a ici le ſigne $+$.

Diviſion.

Diviſeur.	*Dividende.*	*Quotient.*
$x - 7 = 0$	$x^2 + 20x - 189 = 0$	$x + 27 = 0.$

x . .	x^2	$- \; 7x$	
	0	$+ \; 27x$	$- \; 189$
$+ \; 27$		$+ \; 27x$	$- \; 189$
$= 0$		0	0

Donc la ſeconde racine eſt 27 qui eſt négative.

Si on avoit continüé le trapéſe logatithmique juſqu'à la vingt-ſeptiéme cellule, on auroit trouvé une ſeconde fois l'homogéne 189 avec le ſigne — dans la troiſiéme colonne qui eſt celle des homogénes, & vis-à-vis 27 dans la quatriéme colonne des racines.

Autre Exemple. Soit $- x^2 + 20x = 96.$

Subſtitutions. $x = 1$ donne $- 1 + 20 = + 19.$

$x = 2$ donne $- 4 + 40 = + 36$

$x = 3$ donne $- 9 + 60 = + 5.$

Ce qui donne les trois homogénes primitifs $+ 19$, $+ 36$, $+ 51$, dont je cherche les différences par la ſouſtraction, en ôtant le prémier du ſecond, enſuite le ſecond du troiſiéme pour avoir les premiéres différences, ôtant enſuite la premiére des premiéres différences de la ſeconde, pour avoir la ſeconde différence conſtante comme il ſuit.

Homogénes primitifs.	$+ 19$	$+ 36$	$+ 51.$
		$+ 19$	$+ 36.$
Premiéres différences		$+ 17$	$+ 15.$
			$+ 17.$
Secondes différences constantes.			$- 2.$

Ce qui donne pour nombres générateurs du Trapése logarithmique les trois nombres suivans.

2de. différence constante.	la 1re. des premiéres différences.	le 1er. des homogénes primitifs.
$- 2$	$+ 17$	$+ 19$

C'est par l'addition réïtérée de ces trois nombres que je forme le trapése logarithmique suivant, je le nomme trapése à cause de sa figure, & logarithmique, parce que je fais par son moïen par simple addition ou soustraction les opérations qui demanderoient naturellement la multiplication ou la division, c'est ce qu'il a de commun avec les Logarithmes avec lesquels on opére ainsi.

Or je trouve deux fois l'homogéne proposé *96*, dans la troisiéme colonne du trapése qui est celle des homogénes, la premiére fois il a le signe $+$, ce qui marque que sa racine 8 à côté est positive, la seconde fois je trouve $-$ *96*, & à côté 24, ce signe $-$ marque que la racine 24 qui est à côté est sa seconde racine, & qu'elle est négative.

Trapése Logarithmique.

1re. colonne.	2de. colonne.	3e. colonne. homogénes.	4e. colon. Racines.
		+ 19	1
	+ 17	+ 17	
— 2	— 2	+ 36	2
	— 15	+ 15	
— 2	— 2	+ 51	3
	+ 13	+ 13	
— 2	— 2	+ 64	4
	+ 11	+ 11	
— 2	— 2	+ 75	5
	+ 9	+ 9	
— 2	— 2	+ 84	6
	+ 7	+ 7	
— 2	— 2	+ 91	7
	+ 5	+ 5	
— 2	— 2	+ 98	8
	+ 3	+ 3	bon
— 2	— 2	+ 99	9
	+ 1	+ 1	
2 —	— 2	+ 100	10
	— 1	— 1	
— 2	— 2	+ 99	11
	— 3	— 3	
— 2	— 2	+ 96	12

Continuation.

1re. colonne.	2de. colonne.	3e. colonne. homogénes.	4e. colon. Racines.
		+ 96	12
	− 5	− 5	bon
− 2	− 2	+ 91	13
	− 7	− 7	
− 2	− 2	+ 84	14
	− 9	− 9	
− 2	− 2	+ 75	15
	− 11	− 11	
− 2	− 2	+ 64	16
	− 13	− 13	
− 2	− 2	+ 51	17
	− 15	− 15	
− 2	− 2	+ 36	18
	− 17	− 17	
− 2	− 2	+ 19	19
	− 19	− 19	
− 2	− 2	± 0	20
	− 21	− 21	
− 2	− 2	− 21	21
	− 23	− 23	
− 2	− 2	− 44	22
	− 25	− 25	
− 2	− 2	− 69	23
	− 27	− 27	
		− 96	24 bon

Remarque premiére. Par ce même trapese je peux résoudre toutes les équations arithmétiquement semblables, car si au lieu de l'homogéne proposé 96, j'avois quelqu'autre homogéne avec les autres termes semblables, $-x^2 + 20x$ dans l'équation. Par exemple, $-x^2 + 20x = 64$.

Cet homogéne se trouve deux fois dans le trapése & toujours avec le signe +, ce qui marque que ses deux racines sont positives, la premiére fois il y a 4 à côté, c'est la premiére racine, la seconde fois il y a 16 à côté, c'est la seconde racine.

Remarque seconde. La série des homogénes contenuë dans la troisiéme colonne croît d'abord jusqu'à 100, qui est le quarré de 10, moitié du cœfficient 20, dans le second terme $20x$, aprés ce terme qui est le dixiéme la série continuë, mais les homogénes qui sont encore positifs comme auparavant, décroissent d'un terme à l'autre, & tombent enfin à zéro aprés lequel, les homogénes suivans sont tous négatifs, & croissent à l'infini sans devenir jamais positifs comme auparavant, cela vient du nombre générateur négatif -2 de la premiére colonne, qui aprés le dixiéme terme rend ensuite la seconde colonne entiérement négative, ce qui diminuë les homogénes peu à peu dans la troisiéme colonne, & les conduit au zéro, aprés lequel cette troisiéme colonne ne contient plus que des homogénes négatifs.

La même chose arriveroit dans un sens contraire, si l'on avoit les mêmes nombres générateurs avec des signes contraires, $+2$, -17, -19 pour former le trapése, car dans ce cas la série des homogénes contiendroit d'abord des homogénes négatifs qui croîtroient jusqu'à 100, aprés lequel ils décroîtroient jusqu'au zéro, aprés lequel ils seroient ensuite positifs & croîtroient à l'infini.

Remarque troisiéme. Si l'homogéne d'une équation proposée ne se trouvoit pas dans la série des homogénes

génes de la troisiéme colonne, il y a deux cas.

Le premier cas est, lorsque l'homogéne proposé se trouve dans la suite des nombres entre deux homogénes consécutifs compris dans la troisiéme colonne. Par exemple. Si l'on propose l'équation $-x^2 + 20x = 86$, dont l'homogéne 86 est compris dans la suite des nombres entre les deux homogénes 84 & 91, qui se suivent immédiatement dans la troisiéme colonne.

Dans ce cas l'équation est irrationelle, je prends les racines de 84, elles sont approchées par défaut mais trop petites, ou je prends les racines de 91, elles sont trop grandes, mais approchées par excés à moins d'une unité près, car les racines de 84 & de 91, ne différent entre-elles que de l'unité.

Second cas, si j'ai l'équation proposée $-x^2 + 20x = 113$, comme l'homogéne positif 113 surpasse 100 qui est le plus grand des homogénes positifs, dans ce cas les racines sont imaginaires & l'équation est impossible; on peut la rendre possible en diminüant de 13 cet homogéne, ce sera 100, or le diminüant de plus ce sera un autre homogéne compris dans la troisiéme colonne, ou compris dans l'intervale de deux homogénes de cette troisiéme colonne. De même l'homogéne positif 18 est trop petit, puisqu'il est moindre que 19 le plus petit des homogénes positifs, par conséquent l'équation $-x^2 + 20x = 18$ est impossible, il faut augmenter cet homogéne pour la rendre possible.

Remarque quatriéme. Lorsque dans la substitution les valeurs de x prises par hypothése ne donnent dans l'équation que des homogénes négatifs, alors toutes les racines de l'équation proposée sont imaginaires, & de même si dans la troisiéme colonne du trapése on trouve l'homogéne proposé toujours négatif & jamais positif, c'est une marque que ses racines sont imaginaires, parce que par hypothése & par construction l'homogéne

eſt poſitif, ce qui eſt eſſentiel à cette Méthode.

Autre exemple du quatriéme degré.

Soit propoſée l'équation $-x^4 + 46x^3 - 776x^2 + 5666x = 15015$. Les cinq hypothéſes préparées pour les valeurs de x & de ſes puiſſances avec leurs cœfficiens ou multiplicateurs ſont.

$x = 1 = 5666x$	$1\,xx = 776$	$x^3 = 46$	$x^4 = 1$
$x = 2 = 11332..$	$4 = 3104$	$8 = 368$	$2 = 16$
$x = 3 = 16998..$	$9 = 6984$	$27 = 1242$	$3 = 81$
$x = 4 = 22664..$	$16 = 12416$	$64 = 2944$	$4 = 256$
$x = 5 = 28330..$	$25 = 19400$	$125 = 5750$	$5 = 625$

Préſentement je fais deux ſommes de chaque ſubſtitution, l'une des termes poſitifs, l'autre des négatifs, & le réſultat donne un homogéne primitif, de cette ſorte je trouve cinq homogénes primitifs.

1re. hypothéſe $x = 1$ donne

$$
\begin{array}{rclcrcl}
-x^4 & = & -1 & \& & +46x^3 & = & +46 \\
-776x^2 & = & -776 & & +5666x & = & +5666 \\
\hline
\text{ſomme} & & -777 & & \text{ſomme} & & +6712 \\
\text{or} & & +6712 & & & & \\
 & & -777 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

donne $+ 4935$ premier homogéne.

La 2de. hypothése $x = 2$ donnne

$- x^4 = -16$	& $+ 46x^3 = +368$
$- 776x^2 = -3104$	$+ 5666x = + 11332$
somme $-$ 3120	somme $+$ 11700
or $+$ 11700	
$+$ 3120	

donne $+$ 8580 second homogéne.

La 3e. hypothése $x = 3$ donne

$- x^4 = -256$	& $+ 46x^3 = + 1242$
$- 776x^2 = -6984$	$+ 5666x = + 16998$
somme $-$ 7865	somme $+$ 18240
or $+$ 18240	
$-$ 7075	

donne $+$ 11175 troisiéme homogéne.

La 4e. hypothése $x = 4$ donne

$- x^4 = -256$	& $+ 46x^3 = + 2944$
$- 776x^2 = -6984$	$+ 5666x = + 22664$
somme $-$ 12416	somme $+$ 25608
or $+$ 25608	
$-$ 12672	

donne 12936 quatriémehomogéne.

La 5e. hypothése $x = 5$ donne

$- x^4 = -625$	& $+ 46x^3 = + 5750$
$- 776x^2 = -19400$	$+ 5666x = + 28330$
somme $-$ 20025	somme $+$ 34080
or $+$ 34080	
$-$ 20055	

donne 14055 cinquiéme homogéne.

Ensuite j'écris de suite ces cinq homogénes & j'en tire les différences par soustraction pour avoir les premiéres de chaque différence.

+ 4935	+ 8580	+ 11175	+ 12936	+ 14055.
	+ 4935	+ 8580	+ 11175	+ 12936.
1res. differ.	+ 3645	+ 2595	+ 1761	+ 1119.
		+ 3645	+ 2595	+ 1761.
2des. differences		— 1050	— 834	— 642.
			— 1050	— 834.
3es. differences.			+ 216	— 192.
				+ 216.
4e. & derniére différence constante.				— 24.

Ce qui me donne cinq nombres générateurs dans cet ordre contraire.

La 1e. des 4e. diff.	la 1e. des 3e. diff.	la 1e. des 2de. diff.	la 1e. des 1e. diff.	le 1e. des homogénes.
— 24	+ 216	— 1050	+ 3645	+ 4935

dont je forme le trapése logarithmique suivant, dans lequel l'homogéne proposé 15015, revient quatre fois vis-à-vis de ses quatre racines positives, 7. 11. 13. 15. qui sont les racines cherchées.

Trapése Logarithmique.

1re. col.	2de. colon.	3e. colonne.	4e. colon.	5e. colonne. homogénes.	6e. colon. Racines.
				+ 4935	1
			+ 3645	+ 3645	
		— 1050	— 1050	+ 8580	2
	+ 216	+ 216	+ 2595	+ 2595	
— 24	— 24	— 834	— 834	+ 11175	3
	+ 192	+ 192	+ 1761	+ 1761	
— 24	— 24	— 642	— 642	+ 12936	4
	+ 168	+ 168	+ 1119	+ 1119	
— 24	— 24	— 474	— 474	+ 14055	5
	+ 144	+ 144	+ 645	+ 645	
— 24	— 24	— 330	— 330	+ 14700	6
	+ 120	+ 120	+ 315	+ 315	
— 24	— 24	— 210	— 210	+ 15015	7 bon
	+ 96	+ 96	+ 105	+ 105	
— 24	— 24	— 114	— 114	+ 15120	8
	+ 72	+ 72	— 9	— 9	
— 24	— 24	— 42	— 42	+ 15111	9
	+ 48	+ 48	— 51	— 51	
— 24	— 24	+ 6	+ 6	+ 15060	10
	+ 24	+ 24	— 45	— 45	
— 24	— 24	+ 30	+ 30	+ 15015	11 bon
	0	0	— 15	— 15	
— 24	— 24	+ 30	+ 30	+ 15000	12
	— 24	— 24	+ 15	+ 15	
— 24	— 24	+ 6	+ 6	+ 15015	13 bon
	— 48	— 48	+ 21	+ 21	
— 24	— 24	— 42	— 42	+ 15036	14
	— 72	— 72	— 21	— 21	
— 24	— 24	— 114	— 114	+ 15015	15 bon

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIERE.

Méthode générale d'approximation des racines irrationelles par des formules rationelles.

AVant de résoudre les puissances imparfaites & les équations qui ont des racines irrationelles, il faut trouver des formules rationelles qui puissent donner l'approximation de ces racines : c'est ce que nous enseignerons dans cette Section ; & la suivante contiendra l'application de ces formules aux équations simples & composées de tous les degrez.

AVERTISSEMENT.

C'Est ici la place naturelle où je dois mettre la nouvelle Méthode d'Approximation de Mr. de Lagny par des formules générales & rationelles, pour trouver les racines des puissances imparfaites & des équations de tous ses degrez à l'infini, afin de ranger avec ordre toutes les nouvelles Méthodes ; celle-ci servira à faciliter aux jeunes gens l'étude de l'Analyse. Il a déja donné au public deux éditions de cette Approximation, celle-ci sera la troisiéme, elle est plus étenduë ; & pour la rendre plus facile aux Commencençans, j'entre dans le détail de tous les calculs ; ce sont autant d'exemples utiles qui montrent l'usage des Régles du calcul qui sont expliquées dans les Sections précédentes, & dont l'application n'est point facile dans la résolution des Problêmes, ce qui rebute d'ordinaire les jeunes

gens, & les engage à se borner aux sciences des Mathématiques pratiques, parce que si-tôt qu'ils ne peuvent surmonter les difficultez qu'ils rencontrent dans l'Analyse, ils sont forcez de renoncer à une étude dans laquelle ils désespérent de faire du progrès ; de là vient qu'il y a si peu de personnes qui s'adonnent à l'Analyse qui est le fondement de toutes les Matématiques, parmi ceux qui s'appliquent aux sciences Phisico-Mathématiques qui ont besoin de son secours.

Cette Méthode générale d'approximation est utile & importante pour la perfection de l'Analyse, elle s'étend à toutes ses différentes parties, elle comprend généralement la résolution des puissances imparfaites, des égalitez pures, des égalitez affectées de termes moïens, & des équations de tous les degrez à l'infini, sans en exclure le cas irréductible, qui quoiqu'intraitable par toute autre Méthode, se résoud par celle-ci avec la même facilité que le cas ordinaire & réductible; nous en ferons dans la suite l'application au fameux Problême de la quadrature du cercle.

Elle sert encore à résoudre par le cercle & la ligne droite les Problêmes géométriques du troisiéme & du quatriéme degré, par une approximation infinie mais commode pour la pratique, comme on le verra par l'exemple du Problême de la duplication du cube.

Elle fournit des Méthodes simples & faciles pour extraire les racines de toutes les puissances imparfaites numériques, sans aucun tâtonnement & par une simple soustraction.

Je joins à cela la pierre de touche des Méthodes, qui est une Régle générale pour comparer avec facilité toutes les Méthodes possibles, & pouvoir juger de leur mérite par des principes solides; de même qu'on peut avec la pierre de touche connoître l'excellence & le prix des différens métaux.

M^r. de Lagny a donné un essai de cette Méthode dans le Journal des Sçavans de Paris, le 14. Mai 1691. il l'a expliquée plus au long dans la premiére édition du mois de Décembre 1691. il en a donné une autre édition au mois de Juin 1692. Le 12. du mois de Décembre 1691. il distribua des Exemplaires de la premiére édition à Messieurs de l'Académie Royale des Sciences en pleine Assemblée. Dans le même tems il en envoya aux Sçavans de Paris, des Provinces & des païs étrangers, en Angleterre, en Allemagne & en Hollande.

Voilà l'histoire abregée de cette Méthode que je suis obligé de rapporter pour réfuter un Auteur, à qui il avoit fait présent de la premiére édition, & qui depuis n'a point fait difficulté de s'attribuer l'invention de cette Méthode dans un Livre imprimé au mois de Mars 1692. Ce Livre n'est qu'un mauvais Commentaire sur cette Méthode qu'il n'a point conçûë; il donne l'une des formule pour le cube $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$ qui est essentielle à la Méthode, elle occupe seule les trois quarts de son Livre; mais il la forme de quatre maniéres très-obscures, très-embarrassées, sans aucun principe d'Analyse sur lequel il puisse les appuyer, & contraires à l'esprit de la Méthode. Tout le reste de son Livre ne contient que la formule générale du second degré, $a + \frac{b}{2a}$ qui a été trouvée il y a près de deux cens ans avec ses dérivées, & qui se tire si naturellement & si facilement de cette Méthode, que M^r. de Lagny avoit négligé d'en donner des exemples. D'ailleurs peu content lui-même de son Commentaire, il promet de parler encore dans la suite de sa formule favorite $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$. On sçait que les Commentateurs sont féconds en réflexions; mais enfin, peut-être lui auroit-il pris envie de citer l'Auteur sur

le

le texte duquel il a travaillé long-tems avec si peu de succès, il peut s'en épargner la peine, & au public le soin de lire un livre inutile, c'est le dessein de cette troisiéme édition.

Elle étoit préparée pour l'impression en 1692. Mais Mr. de Lagny l'a différée jusques ici par l'éloignement qu'il a pour tout ce qui peut blesser quelqu'un; c'est aussi le sujet pour lequel je supprime le nom de cet Auteur.

Axiôme 1. Un nombre quelconque est réellement, & sans fiction la racine de toute puissance quelconque finie. *Ex.* 16 peut d'un côté être consideré comme la racine exacte & parfaite de toutes les puissances de 16, & comme la racine imparfaite de tous les nombres possibles qui surpassent les puissances de 16 à l'infini, dont les racines complexes peuvent être exprimées par un polinôme, c'est-à-dire que 16 peut entrer dans la grandeur complexe qui forme par addition de plusieurs nombres entiers une seule racine, quoiqu'elle soit exprimée par un terme complexe 16 + 3, + 1. &c.

D'un autre côté 16 peut entrer dans la racine de tout nombre exprimé par un terme complexe composé de plusieurs nombres entiers par soustraction 16 — 3, — 4, &c. & même dans toute racine exprimée par un terme complexe formé tout ensemble par addition & par soustraction de plusieurs nombres soit entiers, soit rompus, rationels ou irrationels, où les signes plus & moins sont combinez diversement

Donc, tout nombre grand ou petit, soit entier, soit rompu, soit rationel & irrationel, peut faire partie de la racine d'un nombre très-petit exprimée par un terme composé de plusieurs nombres liez ensembles avec les signes + & — combinez diversement.

Axiôme 2. Un nombre quelconque est réellement, & sans fiction une puissance quelconque. *Ex.* 16. est un quar-

ré dont la racine eſt 4 ; c'eſt auſſi une quatriéme puiſſance dont la racine eſt 2.

Si je prends un nombre plus grand, comme 4096, il contiendra un plus grand nombre de puiſſances finies, car c'eſt la ſeconde puiſſance de 64, la 4e. puiſſance de 8, la 3e. puiſſance de 16, la 6e. puiſſance de 4, & la 12e. puiſſance de 2. Voilà ſes puiſſances finies, dont les racines ſont compriſes dans la ſuite naturelle, entre ces nombres & l'unité.

Mais ces deux nombres 16 & 4096 ſont encore toute autre puiſſance à l'infini, dont les racines ſont compriſes dans la ſuite naturelle des nombres, entre l'unité & chacun de ces nombres mais diviſée à l'infini, auquel cas ces racines ſont incommenſurables.

Axiôme 3. Tout nombre formé par la multiplication de pluſieurs autres, peut ſe diviſer exactement par tous les nombres qui ſont les racines de ſon produit. De même toute puiſſance a pour racines exactes les nombres générateurs qui ont ſervis à former la puiſſance donnée.

Pareillement toute équation qui eſt le produit continuel ſoit d'une racine, ſoit de pluſieurs racines multipliées les unes par les autres, peut ſe diviſer exactement par les racines qui l'ont formée par leur multiplication.

Or par l'axiôme 2. tout nombre eſt réellement la racine de toute puiſſance, c'eſt-à-dire qu'il peut être, lorſqu'il eſt incomplexe la racine exacte, ou faire partie de la racine exacte lorſqu'elle eſt complexe, ſoit que cette racine complexe contienne deux ou trois nombres ou davantage joints enſemble avec les ſignes + & — combinez différemment.

Dans toute équation il y a autant de racines que l'équation a de degrez, (ou ce qui eſt la même choſe,) autant que l'expoſant de la haute puiſſance de l'inconnuë x contient d'unitez.

Chacune de ces racines eſt une valeur de l'inconnuë x.

Exemple. Dans les équations du premier degré, nous avons vû que la valeur de l'inconnuë x qui résulte de la derniére équation est ou simple comme $x = a$; mais dans la résolution des Problêmes, avant d'en venir à la derniére équation simple qui résulte du Problême, il faut résoudre plusieurs équations.

Si on multiplie un nombre 2 par lui-même, on l'éleve au quarré ou à la deuxiéme puissance 4. Si on multiplie ce produit par la même racine 4×2, on aura la troisiéme puissance 8, Et si on continuë à multiplier chaque produit par la racine, on aura toutes ses puissances parfaites.

Or dans la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, &c. il y a une infinité de nombres qui ne sont aucune puissance parfaite, c'est-à-dire, qui ne sont ni des quarrez ni des cubes, &c. & ce sont 1°. tous les nombres premiers qui ne sont formez par aucun produit. 2°. Tous les nombres qui ne peuvent être que le produit de nombres différens entr'eux, de sorte qu'il en reste peu qui soient le produit de quelque nombre par lui-même, ou une puissance quelconque, qui ait au-dessous d'elle dans la suite naturelle des nombres la racine correspondante à cette puissance. Car entre 1 & 100, il n'y a que 10 quarrez, sçavoir, 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. dont les racines sont 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Par conséquent il y a dans cet interval 90 nombres entiers qui sont des quarrez imparfaits & dont la racine ne se trouve point dans la suite naturelle des nombres; mais comme chaque quarré imparfait comme 26, est nécessairement compris entre deux quarrez parfaits qui se suivent immédiatement 25 & 36, dont l'un 25 est plus petit, & l'autre 36 est plus grand que le proposé 26; sa racine est plus grande que 5 racine de 25, mais moindre que 6 racine de 36, c'est une racine qui contient quelque partie moindre que l'unité. C'est une racine inconnuë irrationelle ou incommensurable, que je ne peux exprimer

par aucun nombre, mais que je peux seulement déterminer par le signe radical ainsi $\sqrt{26}$.

Je dis que je ne peux exprimer cette racine quarrée de 26 par aucun nombre; car je peux exprimer en général la racine quarrée de tout quarré parfait par ce binôme $a + 1$, & le quarré même par le quarré de cette racine $a^2 + 2a + 1$. substituant dans cette formule un nombre à la place de a, qui soit la racine d'un quarré quelconque, comme 2 racine de 4, j'aurai le quarré parfait 9 qui le suit immédiatement;
car $a^2 + 2a + 1 = 4 + 4 + 1$: si je substituë 3 racine de 9, j'aurai par la formule le quarré parfait suivant 16, car $9 + 2 \times 3 + 1 = 16 = a^2 + 2a + 1$. Donc si j'ajoûte 1 à la racine d'un quarré a, j'aurai le binôme $a + 1$. Donc ce quarré servira de formule générale pour avoir le quarré parfait suivant, qui différe de celui qui précéde immédiatement de $2a + 1$. Mais leurs racines différent seulement de l'unité.

Je ne puis appliquer la même formule à 26, car sa racine surpasse 5 & est moindre que 6, & la différence est moindre que l'unité, c'est une partie inconnuë infiniment petite & inexprimable, qui est réellement comprise dans la suite des nombres divisée à l'infini, (qui est inexprimable parce que l'infini se trouve mêlé avec le fini,) & non pas dans la suite naturelle des nombres qui est la seule qui puisse être exprimée en nombres ordinaires.

Tout ce qu'une intelligence finie & bornée tel qu'est l'esprit humain, peut faire de mieux est de trouver une racine par défaut $a + x$, de comparer 26 à $25 = aa + x$, & à $36 = cc - x = \sqrt{26}$ dont le quarré $a^2 + ax + x^2 > 25$.

Et de trouver une autre racine par excès $c - x = \sqrt{26}$ dont le quarré $c^2 - cx + x^2 < 36$.

Il faut donc deux formules, l'une par défaut $a^2 + b$, pour comparer le quarré imparfait avec celui qui est

moindre, & l'autre par excès pour le comparer avec le quarré parfait immédiatement plus grand $cc - d$. Ce qui donne ces deux expressions générales pour le quarré imparfait proposé $z^2 = a^2 + b$

$$\& \; z^2 = cc - d.$$

Le même raisonnement a lieu dans toutes les autres puissances à l'infini en se servant des formules propres à chaque puissance; ainsi dans le cube ou la troisiéme puissance, dont la formule est $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, si on substituë un cube quelconque à la place de a, & les produits de sa racine à la place des autres produits, on aura le cube parfait qui le suit immédiatement. *Exemple.* La racine du cube parfait 27 est 3. Donc $a^3 + 3a^2 \times 1 + 3a \times 1 + 1. = 27 + 3 \times 9 \times 1 + 3 \times 3 \times 1 + 1. = 27 + 27 + 9 + 1 = 64$ qui est le cube parfait qui suit, immédiatement 27. Cependant entre les cubes 27 & 64, dont les racines sont 3 & 4 qui différent seulement de 1, il y a 37 nombres entiers ou cubes imparfaits dont la racine > 3, & < 4.

Dans l'intervale compris entre 1 & 100, il n'y a que quatre cubes parfaits. 1. 8. 27. 64. dont les racines sont 1. 2. 3. 4. Donc il y a 96 cubes imparfaits dans le même intervale dont les racines sont irrationelles. Dans le même intervale il n'y a que trois puissances quatriémes 1. 16. 81. dont les racines sont 1. 2. 3.

Il n'y a que deux puissances cinquiémes 1. 32. dont les racines sont 1 & 2. Ces puissances parfaites sont encore plus rares, dans la suite. depuis 100 jusqu'à 200, il n'y a que le cube de 5. 125.

Ce qui montre combien il est important dans l'Analyse d'avoir une Méthode pour résoudre les puissances imparfaites, qui sont les plus fréquentes qui se rencontrent dans la résolution des équations & des problêmes, & dont les

racines sont irrationelles, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent s'exprimer exactement par aucun nombre entier, ni rompu, ni mixte en façon quelconque ; mais dont on peut approcher continuellement par deux nombres consécutifs, l'un plus grand, l'autre plus petit, qui ne différent entr'eux que de la moindre différence possible.

L'origine & le progrès de cette nouvelle Méthode d'approximation par les Formules rationelles.

Voici l'origine de cette Méthode.

Il y a plus de deux cens ans qu'on a découvert la formule générale d'approximation pour les racines des puissances imparfaites du second degré $a + \frac{b}{2a}$ & pour les équations $\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \pm b}$.

Surpris de voir que les Géométres en soient demeurez là, je m'appliquai à découvrir une formule semblable pour le troisiéme degré, & je recherchai si cette formule du second degré ne pourroit pas être employée encore dans le troisiéme degré pour donner une racine si approchée d'un cube imparfait, que le cube de cette racine differât de moins d'une unité du cube imparfait proposé.

Je pris pour exemple l'égalité $z^3 = a^3 + b$.

Donc $z = \sqrt[3]{a^3 + b}$. Donc z est entre a, & $a + 1$.

La racine cubique de a^3 est a; il reste à trouver dans b tous les produits qui joints avec a^3 soient égaux à $a^3 + b$.

L'esprit de la Méthode va à trouver dans b tous ces produits, qui n'ont pour racine aucun nombre entier ni mixte quelconque qui soit connu. Et à cet effet je prends dans b une partie quelconque indéterminée que je nomme x, & je suppose $z = a + x$, j'éleve les deux membres de cette égalité comme il suit la 3e. puissance.

Formation de la troisiéme puissance.

$$z = a + x.$$
$$\times z = a + x.$$
$$zz = a^2 + ax + xx.$$
$$\qquad + ax$$
$$z^2 = a^2 + 2ax + x^2 \quad \text{Quarré.}$$
$$\times z = a + x.$$
$$z^3 = a^3 + 2a^2x + ax^2 + x^3$$
$$\qquad + a^2x + 2ax^2$$
$$z^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \quad \text{Cube.}$$

Voilà une égalité transformée au lieu de $z^3 = a^3 + b$. Mais si je la laisse en cet état, elle me recule plûtôt qu'elle ne m'avance, car elle contient tous les termes moïens de la troisiéme puissance parfaite du binôme $a + x$, qui la rendent plus composée que l'égalité proposée $z^3 = a^3 + b$.

Mais faisant réflexion que x qui est une partie inconnuë & indéterminée de la valeur de b, est par hypotése une fraction moindre que l'unité, & par conséquent x^3 est une fraction encore plus petite en raison triplée : ainsi si on suppose $x = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{1}{4}$, $x^3 = \frac{1}{8}$. donc $x^3 = \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ &c.

Donc si je suppose $x^3 = 1$, en substituant cette valeur de x^3 dans l'égalité transformée, j'aurai $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$. suivant cette hypothése, ôtant de part & d'autre a^3, j'aurai $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 3a^2 + 3a + 1$.

Ces deux membres sont sensiblement égaux & contien-

nent deux valeurs des produits de b sensiblement égaux, qui forment une égalité du second degré. Voilà donc mon égalité du troisiéme degré abaissée au second degré; cependant je ne laisse pas de conserver sensiblement l'égalité des deux membres à moins d'une unité près, puisque x est moindre que l'unité. Donc j'ai pour égalité exacte

$$3a^2x + 3ax^2 + x^3 = b.$$

Et pour égalité sensiblement exacte à moins d'une unité près $3a^2 + 3a + 1 = b$.

Je résous la premiére égalité exacte $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = b$, en effaçant d'abord x^3 qui est moindre que l'unité, & que je néglige pour abaisser l'égalité au second degré, & divisant tout le reste par $3a$, ce qui donne $x^2 + ax = \frac{b}{3a}$.

Ensuite je prends $\frac{1}{2}a$ moitié du cœfficient ax, son quarré est $\frac{1}{4}aa$, que j'ajoute dans les deux membres pour conserver l'égalité, ce qui donne $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}$.

Je tire la racine quarrée de chaque membre, ce qui me donne $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} - \frac{1}{2}a$, c'est une valeur de x mais un peu trop grande, car dans la fraction $\frac{b}{3a}$, le numérateur b est trop grand, il faut suivant l'égalité exacte $\frac{b-x^3}{3a}$, mais puisque x^3 est une fraction inconnuë & indéterminée, mais moindre que l'unité, si je fais $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}} - \frac{1}{2}a$, j'aurai une valeur de x un peu trop petite, puisque j'ôte 1 de b, au lieu de x^3 qui est moindre que 1.

Donc la juste valeur de x qui est inexprimable exactement en nombres, est comprise entre $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} - \frac{1}{2}a$,

$-\frac{1}{2}a$, qui est une valeur trop grande, & $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}}, - \frac{1}{2}a$ qui est une valeur trop petite. Or par hypothése $z = a + x$.

Donc $z = a - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}}$, qui est une valeur trop grande, mais approchée à moins d'une unité près, & c'est ma premiére formule irrationelle.

Donc aussi $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}}$, qui est une valeur trop petite, mais approchée à moins d'une unité près, & c'est ma seconde formule irrationelle que j'ai publiées dans le Journal des Sçavans de Paris le 14 Mai 1691.

Pour la démonstration de ces deux formules *à priori*, par les causes il suffit d'examiner les cubes ou les égalitez du troisiéme degré d'où elles sont tirées.

$z^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + b$ égalité exacte, & $z^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + b$. ou directement celles-ci d'où elles sont tirées immédiatement.

$a^3 + 3a^2 + 3a = a^3 + b$, égalité qui donne la racine z trop grande à moins de l'unité près.

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + b$, égalité qui donne la racine z trop petite à moins de l'unité près.

On peut aussi en former la démonstration *à posteriori* par les effets, en cubant l'une & l'autre de ces deux formules irrationelles, & comparant leur cube avec le cube imparfait proposé $a^3 + b$, on trouvera toujours en substituant des nombres à la place des lettres que l'erreur sera dans l'un des deux cubes moindre que l'unité, & même dans tous les deux, excepté un seul cas, où l'erreur est précisément de l'unité, c'est lorsque $b = 1$.

Corollaire pour les puissances de tous les degrez à l'infini.

Ce que j'ai dit de la valeur de x^3, s'applique également à toutes les puissances de x à l'infini, elles sont toutes par hypothése des fractions moindres que l'unité, d'où j'espérois pouvoir étendre ce principe général à toutes les égalitez des degrez supérieurs ; mais je m'apperçûs bien-tôt qu'au-delà du troisiéme degré, la Méthode devenoit impraticable, parce qu'il n'y a que les égalitez du second degré qu'on puisse exprimer commodément par des formules irrationelles & universelles.

Exemple du quatriéme degré. Soit $z^4 = a^4 + b$, Quand cette égalité sera transformée en celle-ci $4ax^3 + 6aax^2 + 4a^3\ x = b - 1$, ou $= b$. Je n'en serois pas plus avancé, & je trouvai qu'à plus forte raison ce principe seroit inutile dans les puissances plus élevées.

C'est pourquoi je m'appliquai à découvrir un principe plus fécond ; mais je ne laissai pas de tirer de mes formules irrationelles trois avantages considérables.

1°. En cubant l'une & l'autre de ces formules, soit en lettres, soit en substituant des nombres à la place des lettres, & comparant leur cube avec le cube proposé $a^3 + b$, je trouvai que l'erreur étoit toujours moindre que l'unité dans tous les deux, excepté un seul cas où l'erreur est précisément d'une unité, c'est lorsque $b = 1$; or c'est un avantage considérable de réduire tout d'un coup par une premiére opération, à moins d'une unité près des erreurs qui sont souvent de plusieurs millions sur de fort petits nombres par les Méthodes ordinaires.

2°. J'ai tiré de ces formules irrationelles une duplication du cube approchée à moins de deux millionémes près, & c'est toute la précision où l'on peut atteindre par le cercle & la ligne droite, & qu'on doit espérer pour la pratique.

3°. J'ai réduit l'approximation & l'extraction des racines quarrées & cubiques à la simple soustraction, & par conséquent sans aucun tâtonnement, ce qui abrége & facilite infiniment le calcul.

Enfin j'ai remarqué par l'usage de ces formules irrationelles, que lorsque a étoit un nombre pair, & b un nombre mesuré par $3a$, la formule générale & irrationelle $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$ devenoit la plus simple qui fût possible, car soit $a = 4$, & $b = 36$, on aura suivant la formule $2 + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{36}{12}} = 2 + \sqrt{4 + 3}$; de sorte que la formule $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$ se transforme en celle-ci, $e + \sqrt{ee + d} = 2 + \sqrt{4 + 3}$, ou $2 + \sqrt{7}$, c'est pourquoi je pris en nombres l'exemple suivant où ces conditions se rencontrent.

Exemple en nombres

Soit $z^3 = 100$, il contient les conditions précédentes car $100 = 64 + 36$. donc on aura suivant la formule

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$$

$z = 2 + \sqrt{\frac{64}{4} + 3}$, ou $2 + \sqrt{7}$, puisque $\sqrt{64} = 4$; d'ailleurs le nombre 100 est commode, tant par sa petitesse, que parce que c'est un nombre rond, & ou l'erreur ou l'excès 36 sur le cube moindre 64, est trés sensible, puisque 36 est plus du tiers du total de 100.

Donc j'ai par ma formule $2 + \sqrt{7}$ pour la racine cubique de $z^3 = 100 = a^3 + b$, pour en avoir une preuve & une démonstration sensible, j'éleve $2 + \sqrt{7}$ racine trouvée à la troisiéme puissance comme il suit.

$$2 + \sqrt{7}$$
$$\times\ 2 + \sqrt{7}$$
$$4 + 2\sqrt{7} + 7$$
$$+ 2\sqrt{7}$$
$$4 + 4\sqrt{7} + 7 \text{ Quarré}$$
$$\times\ 2 + \sqrt{7}$$
$$8 + 8\sqrt{7} + 14$$
$$+ 4\sqrt{7} + 4\times 7\,(= 28) + 7\sqrt{7}$$
$$8 + 28 \quad + 12\sqrt{7}$$
$$+ 14 \quad + 7\sqrt{7}$$
$$50 \quad + 19\sqrt{7} \text{ Cube.}$$

Ensuite je réduis sous le signe radical le binôme $19\sqrt{7}$ comme il suit, multipliant 19×19 pour l'élever au quarré à cause du signe $\sqrt{7}$ qui est celui du quarré $= \sqrt{7}$, & multipliant ensuite le produit 361 par 7 qui est sous le signe radical, ce qui donne $\sqrt{2527}$ que j'écris sous le signe radical, & qui égale $19\sqrt{7}$, de sorte que j'ai deux expressions différentes, mais égales pour le cube de $2 + \sqrt{7}$, la premiére est $50 + 19\sqrt{7}$, la seconde est $50 + \sqrt{2527}$.

Opération pour réduire $19\sqrt{7}$ sous le signe radical.

$$19$$
$$\times\ 19$$
$$81$$
$$9$$
$$19$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 7 \\ \hline 427 \\ 21 \\ \hline \sqrt{2527} \end{array}$$

donc le cube est $50 + \sqrt{2527} = 50 + 19\sqrt{7}$

Réflexions sur le cube de $2 + \sqrt{7}$.

1°. Dans la racine $2 + \sqrt{7}$, la partie rationelle 2 répond au $\frac{1}{2}a$ de la formule, c'est la moitié de la racine approchée en entier, car $4 = a$, puisque $64 = a^3$, sa racine cubique est 4, car $4 \times 4 = 16$, & $16 \times 4 = 64$.

Comme il ne s'agit plus que de trouver la partie irrationelle $\sqrt{7}$ de la même racine, je crûs que j'abrégerois en supposant $y = 2 + x$, aulieu de $4 + x$, & universellement $\frac{1}{2}a + x$, aulieu de $a + x$, comme dans la formule générale du second degré.

2°. Dans le cube exprimé par $50 + \sqrt{2527}$, la partie rationelle 50 est la moitié du cube imparfait proposé 100; or $50 = 42 + 8$, mais 8 est le cube de 2, & 42 est formé par 21 multiplié par le même 2, moitié de la racine approchée, & 21 est formé par 7 quarré de $\sqrt{7}$ multiplié par 3, exposant de la puissance imparfaite proposée $y^3 = 100$

La partie irrationelle de ce cube $\sqrt{2527}$, ou $19\sqrt{7}$ qui est encore une expression égale, surpasse l'autre moitié 50 du cube $50 + \sqrt{2527}$, ou de $50 + 19\sqrt{7}$ qui lui est égale, de cette grandeur $\sqrt{2527} - 50$.

Or la grandeur $\sqrt{2527} - 50$ est précisément le cube du binôme négatif $\sqrt{7} - 2$ qui est le cube de la différence des deux parties du binôme positif $2 + \sqrt{7}$, d'où je tire facilement mon Théorême fondamental, comme on le verra, parce que les cubes de ces deux par-

ties sont sensiblement égaux, leur différence étant toujours moindre que l'unité, car tirant la racine quarrée de $\sqrt{2527}$, on trouve pour cette racine $50 + \frac{27}{1001}$, or cette fraction est bien moindre que l'unité, c'est environ un quart, car $\frac{27}{1008}$ est juste $\frac{1}{4}$ de l'unité.

3°. Dans le cube exprimé par $50 + 19\sqrt{7}$.
La partie rationelle 19 du binôme $19\sqrt{7}$ est formée par 12 triple de 4 quarré de 2. moitié de la racine cubique approchée 4, augmenté de 7 quarré de $\sqrt{7}$ qui est sous le signe radical, car $3 \times 4 = 12$, $12 + 7 = 19$.

C'est-àdire qu'en supposant la racine cubique $z = 2 + x = 2 + \sqrt{7}$, j'ai dans les cubes formez par chacun de ces deux binômes & comparez ensemble une égalité exacte.

$8 + 12x + 6xx + x^3 = 50 + 19\sqrt{7}$.
Et nous avons vû que $50 + 19\sqrt{7}$ est sensiblement égal au cube proposé 100, & que la différence est moindre que l'unité.

Or parce que x est par hypothése un irrationel du second degré ou une fraction moindre que l'unité, il suit de-là nécessairement que le 2e. & le 4e. terme $12x + x^3$ sont irrationels, mais le premier & le troisiéme terme du premier membre de la même égalité $8 + 6xx$ sont rationels, donc si j'égale la somme du deuxiéme & quatriéme terme du premier membre de l'égalité précédente avec la moitié du second membre, j'aurai $8 + 6xx = 50$, de même égalant la somme du premier & troisiéme terme du premier membre de l'égalité ci-dessus avec l'autre moitié du second membre, j'aurai $12x + x^3 = 19\sqrt{7}$, & ces deux derniéres égalitez me redonnent encore la même valeur de $x = \sqrt{7}$, mais la premiére me donne cette valeur d'une maniére plus simple, comme on le verra par les opérations qui suivent.

Opération pour la premiére égalité.

$8 + 6xx = 50$

donc $6xx = 50 - 8 = 42$

divisant tout par 6

donc $x^2 = 7$

donc $x = \sqrt{7}$.

Opération pour la seconde égalité.

$12x + x^3 = 19\sqrt{7}$

donc ôtant 12 de part & d'autre,

j'ai $x^3 = 7\sqrt{7}$.

donc $x = \sqrt{7}$.

Maintenant puisque nous avons vû, 1°. que $8 + 12x + 6x^2 + x^3 = 100$, contenoit une égalité sensible entre ses deux membres, 2°. que dans le premier membre les sommes alternatives étoient égales, c'est-à-dire que la somme des termes pairs, le second & le quatriéme est égal à la somme des termes impairs qui sont le premier & le troisiéme terme.

Donc je puis égaler chacune de ces sommes à 50 moitié de 100 cube imparfait proposé, par ce moïen d'une égalité exacte mais impraticable, $8 + 12x + 6x^2 + x^3 = 100$, je tire les deux égalitez suivantes qui sont sensiblement exactes à moins d'une unité près.

$8 + 6xx = 50$. premiére égalité.

$12x + x^3 = 50$. seconde égalité.

Voilà l'origine de ma Méthode des deux sommes alternatives, j'ordonne ces deux égalitez mettant l'incon-

nuë x ſeule dans le premier membre, ce qui donne

$6xx = 50 - 8 = 42.$

& $x^3 + 12x = 50.$

Je n'ai qu'une ſeule inconnuë x, & j'ai deux égalitez dont les hautes puiſſances de l'inconnuë x^2, & x^3 ne diffèrent que d'un degré, donc le Problême eſt plus que déterminé.

Donc je puis en tirer une troiſiéme égalité qui ſera du premier degré, qui eſt tout ce que je cherche.

Or je puis tirer cette troiſiéme égalité du premier degré ſuivant la Méthode des Problêmes plus que déterminez en deux maniéres.

La premiére en égalant tout à zéro, ce qui donne $6xx - 42 = 0$, & $x^3 + 12x - 50 = 0$; car $6xx - 50 + 8 = 0$, donne $6x^2 - 42 = 0$, ainſi diviſant enſuite la plus haute égalité par la plus petite, & négligeant le quotient qui eſt ici inutile, j'ai pour reſte $19x - 50 = 0$, comme dans l'opération ſuivante.

Pour diviſer la plus haute égalité $x^3 + 12x - 50 = 0$ par la plus petite $6x^2 - 42 = 0$, je diviſe d'abord cette moindre par 6, ainſi j'ai pour quotient $x^2 - 7 = 0$, c'eſt le Diviſeur préparé, & pour Dividende $x^3 + 12x - 50 = 0$.

Diviſeur	Dividende	Quotient
$x^2 - 7 = 0$	$x^3 + 12x - 50 = 0$	x Reſte $+ 19x - 50 = 0$.

x . $x^3 - 7x$ 1[er]. produit à ôter du Dividende.

$0 + 19x - 50 = 0$. premier Reſte.

J'ai donc pour reſte $19x - 50 = 0$ que je diviſe par 19, c'eſt $x = \frac{50}{19}$ qui ſe réduit à $x = 2 + \frac{12}{19}$.

Or par hypothéſe la racine $z = 2 + x$ donc $z = 4$

+

$+ \frac{11}{19}$, je forme le cube de cette racine pour connoître sa différence du cube proposé, ce qui me donne la preuve & la démonstration.

$$z = 4 + \frac{12}{19}$$
$$\times\ z = 4 + \frac{12}{19}$$
$$z^2 = 16 + \frac{48}{19} + \frac{144}{361}$$
$$+ \frac{48}{19}$$
$$z^3 = 16 + \frac{96}{19} + \frac{144}{361} \text{ Quarré.}$$
$$\times\ z = 4 + \frac{12}{19}$$
$$z^3 = 64 + \frac{4 \times 96}{19} + \frac{4 \times 144}{361}$$
$$\text{ou } \frac{384}{19} + \text{ou } \frac{579}{361}$$
$$+ \frac{12 \times 16}{19} + \frac{12 \times 96}{19 \times 19} + \frac{12 \times 144}{19 \times 361}$$
$$\text{ou } \frac{192}{19} + \text{ou } \frac{1152}{361} + \text{ou } \frac{1728}{6859}$$
$$\text{Cube } z^3 = 64 + \frac{576}{19} + \frac{1728}{361} + \frac{1728}{6859}$$

Présentement il faut trouver la valeur de ce cube en entier pour le comparer au cube proposé 100, ce qui se fait en divisant chaque fraction par son dénominateur, & réduisant tous les restes à un même dénominateur commun pour les ajouter ensemble, comme il suit.

Le premier terme est tout réduit, c'est l'entier 64, le second terme est la fraction $\frac{576}{19}$, divisant le numérateur 576 par le dénominateur 19, le quotient est 30 $+ \frac{6}{19}$.

Diviseur	*Dividende*	*Quotient.*
19	576	$30 + \frac{6}{19}$
3	57	
	06	

Le troisiéme terme $\frac{1728}{361}$ donne au quotient $4 + \frac{284}{361}$.

Diviseur	*Dividende*	*Quotient.*
361	1728	$4 + \frac{284}{361}$

4 . . . 1444

284

J'ai déja deux restes $\frac{6}{19}$ & $\frac{284}{361}$, je les réduis au même dénominateur en multipliant en croix ce qui donne

$$\frac{6 \times 361 + 19 \times 284}{19 \times 361} = \frac{2166 + 5396}{6859} = \frac{7562}{6859}.$$

Je les ajoûte à la dernière fraction qui a un même dénominateur, (car il faut les réduire au même dénominateur du dernier terme) j'ai donc $\frac{7562 + 1728}{6859} = \frac{9290}{6859}$ or divisant le numérateur par le dénominateur, le quotient est $1 + \frac{2431}{6859}$.

J'ajoute dans une somme tous ces quotients en entiers avec le même reste.

$$\begin{array}{r} 64 \\ +\ 30 \\ +\ 4 \\ +\ 1 + \frac{2431}{6859} \\ \hline \end{array}$$

La somme est . . . . $99 + \frac{2431}{6859}$

qui différe de 100 cube proposé de moins d'un tiers, car divisant les deux termes de la fraction restante par 3, j'ai $\frac{810}{2286}$ qui est environ un tiers.

On peut aussi former le cube de $4 + \frac{12}{19}$ réduisant l'entier en fraction, en multipliant l'entier 4 par 19, dénominateur de la fraction, or $4 \times 19 = 76 + 12 = 88$, ce qui donne $z = \frac{88}{19}$, & formant séparément le cube de ces deux termes, on aura le cube du nu-

mérateur 88 $=$ 681472. & le cube du dénominateur 19 $=$ 6859. & divisant ensuite le numérateur par le dénominateur, on trouvera le même quotient ci-dessus $99 + \frac{2431}{6859}$.

Diviseur ou dénominateur	*Dividende ou numérateur*	*Quotient.*
6859	681472	$99 + \frac{2431}{6859}$

9 . . . 61731. Premier produit.

6416 2 Premier reste.

9 . . . 61731 Second produit.

2431 Second Reste & dernier.

La seconde Maniére commune aux Problêmes plus que déterminez pour tirer des deux égalitez précédentes une troisiéme égalité qui soit du premier degré, consiste à multiplier tout également, afin de rendre égaux entre eux le premier membre des deux égalitez, & de pouvoir par-là abaisser d'un degré ces deux égalitez, en comparant seulement leur second membre ensemble.

Les deux égalitez sont

$x^2 = 50 - 12x$

Et $6x^2 = 42$.

Je multiplie la premiére par 6, cœfficient de x dans la seconde, ce qui donne $6x^3 = 300 - 72x$.

Je multiplie la seconde par x qui est l'excês de x^3 de la premiére sur x^2 de la seconde, ce qui donne $6x^3 = 42x$.

J'ai donc $6x^3 = 300 - 72x$

& $6x = 42x$

Donc en négligeant le premier membre, & comparant le second membre de ces deux égalitez, j'ai une troisiéme égalité

$300 - 72x = 4, 2x$ qui est du premier degré. Il n'y a plus qu'à la résoudre comme il suit.

J'ai d'abord par transposition $300 = 114x$, ou $114x = 300$, qui donne $x = \frac{300}{114}$ en divisant tout par 114, qui donne $x = 2 + \frac{72}{114}$, & divisant les deux termes de cette fraction par leur commun diviseur 6, j'ai $x = 2 + \frac{12}{19}$ comme ci-dessus.

Or par l'hypothése la racine $z = 2 + x$, donc $z = 4 + \frac{12}{19}$, dont le cube $= 99 + \frac{2431}{6859}$ qui différe de moins d'environ un tiers du cube proposé 100, comme on le voit par la démonstration sensible de l'opération précédente.

Théorême premier fondamental.

Soit un binôme quelconque $a \pm b$, dans lequel je suppose que le binôme positif $a + b = c$, représente en général la racine exacte de toute puissance parfaite, & le binôme négatif $a - b = d$, représente en général la racine de toute puissance imparfaite.

Supposition. On sçait d'ailleurs que tous les nombres sont réellement & tout ensemble toute racine quelconque, & toute puissance quelconque à l'infini, ainsi il ne leur manque rien de leur part, ils ont réellement dans la division infinie tout ce qu'il leur faut, mais par rapport à nous nous distinguons ces puissances, & nous nommons puissance parfaite celle dont les racines nous sont connuës, & peuvent être exprimées en nombres ordinaires tels sont les quatrez 4, 9, 16, &c. dont les racines sont 2, 3, 4, & ainsi des autres puissances dont les racines s'expriment en nombres : mais nous appellons puissance imparfaite celle dont la racine quoique réelle

ne peut s'exprimer en nombres, quoiqu'elle soit réellement comprise dans l'intervale d'une division poussée à l'infini, ce qui nous est impossible; ainsi la racine quarrée de 2, de 3, de 5, de 7, de 8, &c. que nous ne pouvons exprimer exactement en nombres, nous fait nommer ces nombres des quarrez imparfaits, il en est de même des autres puissances à l'infini. De-là vient la difficulté qui se trouve dans l'Analyse pour tirer les racines secondes ou troisiémes d'un nombre qui est un quarré ou un cube imparfait.

Ces nombres sont les plus fréquens, car entre 1 & 100, il n'y a que 10 quarrez parfaits en y comprenant l'unité, il y a 90 quarrez imparfaits, il n'y a que quatre cubes parfaits, donc il y a 96 cubes imparfaits, à mesure qu'on va à des puissances plus élevées, on trouve que le nombre des puissances parfaites décroît, & celui des puissances imparfaites augmente, ce qui montre la nécessité & l'importance d'une Méthode d'approximation, pour trouver ces racines approchées autant qu'il est possible, de l'exactitude à laquelle il est impossible de parvenir, par la nature de l'infini qui se mêle avec le fini dans ces puissances, ce qui empêche qu'on ne puisse exprimer leurs racines exactement.

Présentement si on éleve le binôme positif $a + b = c$, & le binôme négatif $a - b = d$ séparément à une puissance quelconque semblable, dont l'exposant en général soit p.

Je dis 1°. que chacun de ces deux binômes a tous les mêmes produits égaux & semblables chacun comparé à son correspondant, avec cette seule différence que tous les produits du premier sont positifs, & ceux du second binôme sont alternativement positifs & négatifs, d'où il suit que la somme totale du binôme positif sera plus grande que celle du binôme négatif, car tous ses termes pairs sont négatifs, & les termes impairs sont positifs,

ce qui est évident par leur formation qui suit, puisqu'on retranche dans ce dernier & non pas dans le premier.

$$
\begin{array}{l}
\quad a + b \\
\times\, a + b \\
\hline
\quad a^2 + ab + bb \\
\qquad\ + ab \\
\hline
\quad a^2 + 2ab + bb. \text{ Quarré} \\
\times\, a + \ldots b \\
\hline
\quad a^3 + 2a^2b + abb \\
\qquad + .\, a^2b + 2abb + b^3 \\
\hline
\quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{array}
$$

En nombres.

$$
\begin{array}{l}
\quad 2 + 4 \\
\times\, 2 + 4 \\
\hline
\quad 4 + 8 + 16 \\
\qquad + 8 \\
\hline
\quad 4 + 16 + 16 = 36. \text{ Quarré} \\
\times\, 2 + 4 \\
\hline
\quad 8 + 32 + 32 \\
\qquad + 16 + 64 + 64 \\
\hline
\quad 8 + 48 + 96 + 64 = 216 \text{ Cube.}
\end{array}
$$

$$a - b$$
$$\times\ a - b$$
$$a^2 - ab + bb$$
$$- ab$$
$$a^2 - 2ab + bb \quad \text{Quarré}$$
$$\times\ a - \ldots b$$
$$a^3 - 2a^2b + abb$$
$$- \ldots a^2b + 2a\,bb - b^3$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{Cube}$$

En nombres.

$$2 - 4$$
$$\times\ 2 - 4$$
$$4 - 8 + 16$$
$$- 8$$
$$4 - 16 + 16 = 20 - 16 \quad \text{Quarré}$$
$$\times\ 2 - 4$$
$$8 - 32 + 32$$
$$- 16 + 64 - 64$$
$$8 - 48 + 96 - 64 \quad \text{Cube } \tfrac{104}{112}.$$

Je dis 1°. que si je range dans une colonne à part tous les termes pairs qui ont tous le signe — & sont négatifs de la puissance de $a - b$, sçavoir le second, le quatriéme, le sixiéme, &c. & que je nomme leur somme, premiére somme alternative.

Si d'un autre côté je range dans une colonne tous

les termes impairs, le 1er. le 3e. le 5e. le 7e. &c. qui sont tous positifs, & que je nomme leur somme, seconde somme alternative.

Alors si de ces deux sommes alternatives, j'ôte la plus grande de la plus petite, l'excés ou la différence sera égale à la valeur de $a - b$, & pour abréger je nomme cette valeur d^p, c'est à-dire la valeur de la puissance de $d^p = \overline{a + b}^p$.

La démonstration est évidente par la formation précédente du cube de $d = \overline{a - b}$, car ce cube a autant de produits que le cube du binôme positif $\overline{a + b}$, & ils sont tous égaux chacun à son correspondant, la seule différence est que dans le cube de $a - b$, les termes pairs ont le signe $-$ & sont négatifs, & les seuls termes impairs sont positifs, au lieu que dans le cube du binôme positif $a + b$, tous les termes sont positifs.

Ainsi si je substituë des nombres en la place des lettres, dans le cube $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Soit $a = 1$ & $b = 2$. J'aurai

$$1 - 6 + 12 - 8 = 13 - 14.$$

Or de -14 ôtant $+13$ reste $-\frac{1}{14}$.

Si $a = 2$ & $b = 3$, j'aurai

$$2\times2\times2 - 3\times4\times3 + 3\times2\times9 - 3\times3\times3$$
$$8 - 36 + 54 - 27$$

Ce qui donne $62 - 63$, qui donne pour reste $-\frac{1}{63}$ tous ces restes sont négatifs, parce que b surpasse a.

Mais si $a = 3$ & $b = 2$. comme a surpasse b, on aura des restes positifs qui donneront une valeur positive du cube $d^3 = \overline{a - b}^3$, car on aura

$$3\times3\times3 - 3\times9\times2 + 3\times3\times4 - 2\times2\times2$$
$$27 - 54 + 36 - 8$$

Les

Les termes impairs sont
$+ 27$
$+ 36$

donc la 1re. somme alternative est $+ 63$

Les termes pairs & négatifs sont
$— 54$
$— 8$

donc la 2de. somme alternative est $— 62$

de la 1re. somme $+ 63$
j'ôte la 2de. somme $— 62$

Le reste est . . . . $\frac{1}{63}$

Ou bien je divise la plus grande somme 63 par la plus petite, le quotient est $1 + \frac{1}{63}$. Je néglige l'entier 1 qui est ici inutile, & j'ai $\frac{1}{63}$ pour la valeur positive de $d^3 = \overline{a — b}^3$.

Donc l'excés ou la différence des deux sommes alternatives est égale à la valeur de la puissanee de d, ou du binôme négatif $\overline{a — b}$ son égal. Ce qu'il falloit démontrer.

Autrement. Soit $a — b = 2 — 4$, donc $a = 2$, & $b = 4$, donc $a — b = \frac{1}{2}$.

J'ai dans le quarré $a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20$ & $— 2ab = — 16$, or divisant $+ 20$ par $— 16$, le quotient est $1 + \frac{4}{16}$ ou $\frac{1}{4}$.

J'ai dans le cube $a^3 + 3ab^2 = 8 + 96 = 104$, & $— 3a^2b — b^3 = — 48 — 64 = 112$.

Or divisant $— 112$ par $+ 104$, le quotient est $1 — \frac{8}{104}$, ensuite divisant 112 par 8, le quotient est 14. & divisant 104 par 8, le quotient est 13, donc les deux sommes alternatives 112 & 104 différent de $\frac{1}{8}$ qui est le cube de $\frac{1}{2}$.

Corollaire premier.

Puisque d est la valeur de la différence des deux par-

ties du binôme négatif $a - b$, je dis que si $d = 1$, toutes ses puissances à l'infini d^1, d^2, d^3, d^4, &c. $= 1$. donc si la différence des deux parties du binôme $a - b = 1$, la différence des deux sommes alternatives sera toujours $= 1$ dans toutes les puissances.

Mais si d est moindre que l'unité, ce sera pour lors une fraction qui décroîtra continuellement dans toutes les puissances de d, & qui deviendra d'autant plus petite que l'unité, à mesure que sa puissance sera plus élevée, donc si $d = \frac{1}{2}$. $d^2 = \frac{1}{4}$, $d^3 = \frac{1}{8}$, $d^4 = \frac{1}{16}$, &c. donc dans ce cas la différence des sommes alternatives sera toujours moindre que l'unité.

Corollaire second.

Dans tout binôme, soit positif comme $a + b$, soit négatif comme $a - b$, si le premier terme a surpasse le second b, la premiére somme alternative composée des termes impairs surpasse la seconde somme alternative composée des seuls termes pairs, ce qui est évident parce que je viens de démontrer que l'excés de cette premiére somme sur la seconde est égal à la valeur positive de la puissance de d^p, ou du binôme négatif $a - b$ son égal.

Donc si $a > b$ on peut conclure dans le quarré, que $a^2 + b^2 > 2ab$.

Et de même dans le cube que $a^3 + 3ab^2 > 3a^2b + b^3$, mais c'est le contraire lorsque $a < b$.

PROBLEME I.

Trouver les formules par défaut pour résoudre les égalitez & les puissances imparfaites du second degré.

Pour résoudre ou trouver les racines des égalitez & des puissances imparfaites du second degré sans aucune extraction ni division, & par conséquent sans aucun tâ-

tonnement par une Méthode indéfiniment plus courte & plus approchée que la Méthode ordinaire, je me sers de la formule suivante.

Pour trouver ces formules d'approximation, soit une égalité ou une puissance imparfaite du second degré, $z^2 = a^2 + b$.

Donc $z = \sqrt{a^2 + b}$.

Régle générale.

1°. Je suppose la valeur approchée de cette racine quarrée connuë & égale à a, il faut connoître le reste contenu dans b, qui doit fournir deux produits & un quarré.

Je suppose $z = x + \frac{1}{2}a$, & j'éleve cette valeur à la seconde puissance.

$$\begin{array}{rl} z = & x + \tfrac{1}{2}a \\ \times\ z = & x + \tfrac{1}{2}a \\ \hline z^2 = & x^2 + \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{4}aa \\ & \quad + \tfrac{1}{2}ax \\ \hline z^2 = & x^2 + ax + \tfrac{1}{4}aa. \end{array}$$

Je sépare les produits de ce quarré en deux sommes alternatives, la premiére somme contient les termes impairs le premier & le troisiéme, la seconde somme alternative contient les deux termes pairs, le second & le quatriéme.

Premiére Colonne des termes impairs.	Seconde Colonne des termes pairs.
1er. terme $+ x^2$	2d. terme $+ \frac{1}{2}ax$
3e. terme $+ \frac{1}{4}aa$	4e. terme $+ \frac{1}{2}ax$
1re. somme $+ x^2 + \frac{1}{4}aa$	2de. somme $+ ax$.

3°. Je substituë ce quarré de la valeur de z, formé par l'opération précédente dans l'égalité proposée $z^2 = a^2 + b$, ce qui donne $z^2 = x^2 + ax + \frac{1}{4}aa = \overline{a^2 + b}$.

4°. J'égale la seconde somme alternative, $+ax$, avec la moitié du second membre de l'égalité proposée, c'est $ax = \frac{a^2+b}{2}$, & divisant tout par a pour dégager l'inconnuë $x = \frac{a^2+b}{2a}$, or par l'hypothése $z = x + \frac{1}{2}a$, donc $z = \frac{1}{2}a + \frac{a^2+b}{2a}$, que je réduis à sa plus simple expression, puisque $\frac{a^2+b}{2a} = \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a}$, j'ai donc $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a}$, qui se réduit à $z = a + \frac{b}{2a}$; voilà *la* 1re. *formule rationelle d'approximation trouvée.*

5°. Si je veux une seconde formule encore plus approchée, je suppose la premiére formule rationelle que je viens de trouver $a + \frac{b}{2a} = y$.

Je prépare y & sa valeur pour la substitüer dans la premiére formule trouvée, comme il suit.

Puisque $a + \frac{b}{2a} = y$.

donc $2 \times y$, ou $2y = 2a + \frac{2b}{2a}$

pour avoir la valeur de y^2, je quarre ici y & sa valeur.

$$y = a + \frac{b}{2a}$$
$$\times y = a + \frac{b}{2a}$$
$$y^2 = a^2 + \frac{ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$$
$$+ \frac{ab}{2a}$$

donc $y^2 = a^2 + \frac{2ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$

Or le second terme du second membre $\frac{2ab}{2a} = b$.

donc $y^2 = a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}$ Quarré de y & de sa valeur, je compare ce quarré avec le proposé.

$z^2 = a^2 + b$, & je trouve que le quarré de la valeur de y excéde le proposé de $+\frac{b^2}{4a^2}$, je nomme cet excés la formule d'excés.

6°. Présentement je substituë y à la place de a, & je substituë la formule d'excés $+\frac{b^2}{4a^2}$ dans la premiére formule d'approximation trouvée $a + \frac{b}{2a}$, ce qui donne $y + \frac{\frac{bb}{4aa}}{2y}$

Dans cette nouvelle expression, à la place de y, & de $2y$, je substituë leurs valeurs trouvées ci-dessus, ce qui donne $a + \frac{b}{2a} + \frac{\frac{b^2}{4aa}}{2a + \frac{2b}{2a}}$

Comme cette expression est fort composée, je la réduis à ses moindres termes, comme il suit.

1°. Je cherche d'abord le dénominateur commun, en commençant par la seconde fraction qui est la plus composée, je multiplie son premier dénominateur par son second $4aa \times 2a = 8a^3$, ce qui me donne cette fraction composée réduite à la fraction simple $+\frac{b^2}{8a^3}$.

Or $8a^3$ est le dénominateur commun trouvé.

2°. Je divise ce dénominateur par $2a$, dénominateur de la premiére fraction, le quotient est $+4aa$, par lequel je multiplie les deux termes de la premiére fraction, or $+4aa \times \frac{b}{2a} = \frac{4aab}{8a^3}$.

J'ai donc déja les deux premiéres fractions réduites à $\frac{4aab}{8a^3} + \frac{b^2}{8a^3}$, ainsi j'ai la premiére expression qui étoit composée réduite à $a + \frac{4aab}{8a^3} + \frac{b^2}{8a^3 + \frac{2b}{2a}}$

Pour réduire la derniére fraction, puisque $\frac{b^2}{\frac{2b}{2a}} = \frac{b}{2b \times 2a}$ je multiplie le numérateur par le dénominateur $+ 2a$ ce qui donne $4ab$ que j'ajoûte au dénominateur $8a^3$, ce qui me donne enfin $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, c'est la seconde formule rationelle d'approximation qui est encore plus approchée que la premiére.

Par la même Méthode on peut trouver de suite autant de formules qu'on voudra qui seront toujours plus approchées les unes que les autres & cela à l'infini.

Ainsi pour trouver une troisiéme formule rationelle encore indéfiniment plus appprochée que les deux formules précédentes.

1°. Je suppose la seconde formule rationelle trouvée

$$a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab} = y.$$

Je prépare les valeurs de y sur cette hypothése pour les substitüer dans la 2de. formule comme nous le verrons,

Ainsi $2y = 2a + \frac{8a^2b + 2b^2}{8a^3 + 4ab}$

Je quarre y & sa valeur pour comparer son quarré avec le quarré proposé $z^2 = \overline{a^2 + b}$.

$$y = a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$\times y = a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$y^2 = a^2 + \frac{4a^3b + ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}$$
$$+ \frac{4a^3b + ab^2}{8a + 4ab}$$

$$y^2 = a^2 + \frac{8a^3b + 2ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}$$

$$\text{ou } y^2 = a^2 + b + \frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a + 64a^4b + 16a^2b^2}.$$

Je forme le quarré de la seconde formule d'approximation ou troisiéme racine approchée pour le comparer avec le quarré proposé $a^2 + b$.

Numerateur.	*Dénominateur.*
$4a^2b + b^2$	$8a^3 + 4ab$
$\times 4a^2b + b^2$	$\times 8a^3 + 4ab$
$16a^4b^2 + 4a^2b^3$	$64a^6 + 32a^4b +$
$+ 4a^2b^3$	$+ 32a^4b + 16a^2b^2.$
$+ b^4$	$64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2.$
$16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4.$	

$$a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$\times a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

$$a^2 + \frac{4a^3b + ab^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$+ \frac{4a^3b + ab^2}{8a^3 + 4ab}$$

Quarré.

$$a^2 + \frac{8a^3b + 2ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}.$$

qui réduit à moindres termes donne

$$a^2 + b + \frac{1b}{2a} + \frac{1b^2 + 1b^2 + b^2}{4a^2 + 8a^2 + 16a^2}$$

dont j'ôte $a^2 + b$ quarré propoſé. Le reſte eſt l'excès du quarré de la formule ſeconde.

Donc l'excès où la formule d'excès eſt

$$\frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}.$$

2°. Préſentement je ſubſtituë y à la place de a, & la formule d'excès qui précéde, à la place de b. Dans la 2de. formule $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, ce qui donne

$$y + 4yy \times \frac{b}{2a} \frac{+ 16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4 + 16a^2b^2}$$

$$8y^3 + 4y \times \frac{b}{2a} \frac{+ 16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4 + 16a^2b^2}.$$

Remarque 1. Cette expreſſion eſt très-compoſée ; avant de la réduire à une expreſſion plus ſimple, il faut ſubſtituer à la place de y, de y^2 & de y^3 leurs valeurs, ce qui augmente

augmente les termes & rend l'expreſſion encore plus composée ; c'eſt pourquoi il vaut mieux continuer l'approximation par les nombres, puiſqu'il s'agit de trouver en nombres une racine approchée. Et pour lors la premiére formule d'approximation ſuffit, car après avoir employé cette premiére formule dans une premiére opération, il ſuffit de ſubſtituer ces nombres aux lettres de la formule pour continuer indéfiniment l'approximation tant de fois qu'on voudra la réïterer, car chaque opération donnera toujours une racine de plus en plus approchée que la précédente. D'ailleurs comme il faudroit pouſſer l'approximation à l'infini, pour trouver la racine exacte, ce qui eſt impoſſible, il eſt inutile dans la pratique d'aller au-delà d'une ſeconde approximation, puiſque dès la premiére, on eſt parvenu à des parties moindres que toute grandeur ſenſible.

PROBLEME II.

Trouver les Formules d'approximation par excès, pour réſoudre les égalitez & les puiſſances imparfaites du ſecond degré.

Toute égalité & puiſſance imparfaite du ſecond degré peut s'exprimer en général par $z^2 = a^2 \pm b$. Ce qui renferme deux cas.

Le premier cas eſt, lorſque je compare z^2 avec un quarré moindre, ce que j'exprime ainſi, $z^2 = a^2 + b = 25 + 1 = 26$. Dans ce cas je cherche une racine approchée par défaut. C'eſt le ſujet de ce Problême.

Le ſecond cas eſt lorſque que je compare $z^2 = 26 = 36 - 10$ avec le quarré 36 qui eſt immédiatement plus grand. Et pour ôter tout équivoque au lieu de l'exprimer par $a^2 - b$, je me ſers d'autres lettres, & j'écris $z^2 = cc - d = 36 - 10 = 26$; dans ce cas je cher-

che une formule approchée par excès.

Comme 26. ne différe de 25 que de 1, la formule par défaut est la plus prompte dans ce premier cas; mais lorſque j'ai $z^2 = cc - d = 36 - 1 = 35$. comme l'excès est 1 & le défaut où la différence de $25 + 10 = 35$ est plus grande; il faut dans ce second cas préferer la formule d'excès qui suit parce qu'elle est plus prompte & plus approchée.

On trouvera les formules d'excès comme on a trouvé cy-dessus les formules d'approximation par défaut, en changeant (si l'on veut conserver les mêmes lettres de la formule par défaut) seulement le signe + en —; ainsi on aura pour premiére formule approchée par excès, $z = a - \frac{b}{2a}$ & pour seconde formule $a - \frac{4aab + b^2}{8a^3 - 4ab}$ ou bien $z = c - \frac{d}{2c}$ & $c - \frac{4ccd + d^2}{8c^2 - 4cd}$ en ſe ſervant des lettres de la formule par excès $z^2 = cc - d$, dans laquelle cc repréſente le quarré parfait plus grand, & d ſon excès.

PROBLEME III.

Trouver les limites d'approximation, ou déterminer la valeur de l'approximation dans chaque formule du ſecond degré.

Il s'agit ici de déterminer l'erreur par excès ou par défaut dans chaque formule d'approximation du 2d. degré. 1°. Je la déterminerai dans la puiſſance. 2°. Dans la racine; & la Méthode ſera générale pour toutes les puiſſances imparfaites, & pour toutes les égalitez en général; car les égalitez affectées de termes moïens ſe réduiſent aux formules des égalitez pures qui ſont les mêmes que celles des puiſſances imparfaites.

Principe. Il faut remarquer que ce n'eſt ni par la plus grande ni par la plus petite erreur, que l'on doit juger de la valeur d'une Méthode ou d'une Formule d'approximation, de même que dans les jeux de hazard on juge de l'avantage ou du déſavantage des joüeurs par la ſomme des avantages & des déſavantages de chaque coup, diviſé par le nombre de tous les coups, & non point par le coup ſeul ou le plus favorable ou le plus contraire: ainſi pour juger ſainement de la valeur d'une formule d'approximation, il faut diviſer la ſomme des erreurs par le nombre des cas poſſibles.

Je me borne à déterminer l'excès ou le défaut dans les formules ſimples & primitives, comme $a+\frac{b}{2a}$, & $a-\frac{b}{2a}$, ou $c-\frac{d}{2c}$: mais comme je dirai quelque choſe par occaſion des formules dérivées, il faut expliquer d'abord en quoi elles conſiſtent, ſi j'augmente ou je diminuë de l'unité le numérateur $b\pm 1$, j'aurai $a+\frac{b+1}{2a}$, ou $a+\frac{b-1}{2a}$, ou $a+\frac{b}{2a-1}$, ou $a+\frac{b}{2a+1}$ qui ſont des formules dérivées de la formule primitive $a+\frac{b}{2a}$.

On peut de même tirer des formules dérivées de toutes les autres formules primives dans les cas où ces dérivées peuvent être plus exactes que les primitives, dont la ſimplicité eſt préferable à une plus grande exactitude que les dérivées peuvent avoir en certains cas.

1°. Pour déterminer l'erreur par excès ou par défaut dans le quarré ou la ſeconde puiſſance.

Premier Exemple. Soit le quarré imparfait $\overline{aa+b}$, & ſa formule d'approximation $a+\frac{b}{2a}$ qui eſt la premiére racine approchée.

J'éleve au quaré $a + \frac{b}{2a}$

$\times a + \frac{b}{2a}$

$a^2 + \frac{ab}{2a} + \frac{bb}{4aa}$

$+ \frac{ab}{2a}$

$a^2 + \frac{2ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$

ou $a^2 + b + \frac{b^2}{4aa}$ Quarré

Ensuite je compare ce quarré de la formule avec le quarré proposé . . . . $a^2 + b$

o o

ôtant le plus petit du plus grand, le reste est $+ \frac{b^2}{4aa}$. Donc le quarré de cette premiére formule excéde le quarré proposé $a^2 + b$, universellement de . . . . $\frac{bb}{4aa}$ que je nomme formule d'excès.

Maintenant pour juger de la valeur de cette formule d'excès $\frac{b^2}{4a^2}$, j'examine toutes les valeurs possibles de b; or, nous avons démontré que $a^2 + 2a + 1$ est la valeur du quarré plus grand que a^2 qui le suit immédiatement, & que tous les quarrez imparfaits contenus entre deux quarrez qui se suivent immédiatement, étoient compris dans l'intervale exprimé en général par $2a$, qui est le double de la racine du moindre des deux quarrez que l'on compare; d'où il suit que b peut en général valoir successivement 1, 2, 3, 4, &c. jusques à $\underline{2a}$, ensorte que dans le quarré la somme des erreurs de tous les cas possibles est $\frac{1}{4aa} + \frac{4}{4aa} + \frac{9}{4aa}$, &c. jusqu'à $\frac{4aa}{4aa}$,

dont la racine eſt $\frac{2a}{2a}$.

Dans ces fractions, le dénominateur eſt conſtant c'eſt $4aa$, le numérateur eſt le quarré de la ſuite naturelle des nombres, il n'y a donc qu'à trouver la ſomme de ces numérateurs quarrez 1. 4. 9. 16. &c. juſques à $4aa$ qui eſt le dernier.

Or, par ce qui a été démontré par Wallis & pluſieurs autres, cette ſomme eſt égale à $\frac{8a^3+6aa+a}{3}$. Je diviſe cette ſomme par le nombre des cas poſſibles $4aa$, ce qui ſe fait en multipliant le dénominateur $3 \times 4aa$, & j'ai pour la ſomme des erreurs dans le quarré de cette premiére formule $\frac{8a^3+6aa+a}{12aa}$ & diviſant tout par a pour avoir une expreſſion plus ſimple, j'ai $\frac{8a^2+6a+1}{12a}$.

Mais puiſque le nombre des cas poſſibles eſt $\frac{2a}{}$, je diviſe encore cette fraction par $\frac{2a}{}$, en multipliant à cet effet ſon dénominateur par $\frac{2a}{}$, ce qui donne $\frac{8a^2+6a+1}{24aa}$, ou $\frac{1}{3}+\frac{6a+1}{24aa}$ pour l'erreur moyenne ou d'eſtimation.

Mais comme la fraction $\frac{6a+1}{24aa}$ diminuë à l'infini à proportion que la valeur de a augmente; il ſuit encore de là que l'eſtimation générale & univerſelle de l'erreur, eſt ſeulement de $\frac{1}{3}$ dans le quarré de la premiére formule d'approximation.

Ce qui ſe concevra plus facilement par les nombres. *Exemple*. Entre les quarrez 9 & 16, qui ſe ſuivent immédiatement, & dont les racines ſont 3 & 4, il y a ſix quarrez imparfaits; ſçavoir, 10, 11, 12, 13, 14, 15, dont les racines approchées ſont $3\frac{1}{6}$, $3\frac{2}{6}$, $3\frac{3}{6}$, $3\frac{4}{6}$, $3\frac{5}{6}$, $3\frac{6}{6}$, dont les quarrez ſont $10\frac{1}{36}$, $11\frac{4}{36}$, $12\frac{9}{36}$, $13\frac{16}{36}$, $14\frac{25}{36}$, $15\frac{36}{36}$,

lesquels surpassent les quarrez proposez imparfaits, 10, 11, 12, 13, 14, 15, de $\frac{1}{36}$, $\frac{4}{36}$, &c. La somme des numérateurs est 91, ce qui donne $\frac{91}{36}$ pour la somme des erreurs, le produit en fraction $\frac{91}{36}$.

Or, comme on peut également avoir besoin de tirer la racine quarrée des tous ces quarrez imparfaits; pour avoir l'erreur moyenne, je divise la somme des erreurs $\frac{91}{36}$ par le nombre des cas possibles, c'est $\frac{91}{36 \times 6} = \frac{91}{216} = \frac{1}{3} + \frac{91}{216}$. Voilà l'erreur moyenne en nombres dans ce cas particulier pour la premiére formule primitive d'approximation $a + \frac{b}{2a}$.

Par la même Méthode, on trouvera que l'erreur moïenne de la formule primitive $a - \frac{b}{2a}$ qui est par excés, ou de la formule dérivée qui lui est égale, $a + \frac{b+1}{2a+2}$ est $\frac{8a^3+6a+1}{24a^3+48a^2+24a}$, & par conséquent cette erreur est moindre que $\frac{1}{3}$, ainsi ces deux formules, la primitive & la dérivée sont un peu plus exactes que la premiére qui précéde $a + \frac{b}{2a}$, mais elles sont un peu plus composées d'un autre côté, l'erreur est donc toujours moindre que l'unité dans le quarré.

Dans la premiére formule primitive $a + \frac{b}{2a}$, la plus grande erreur est, lorsque $b = 2a$, car alors le quarré de cette erreur est $\frac{4aa}{4aa} = 1$.

Et la plus petite erreur est lorsque $b = 1$, car alors le quarré de cette erreur est $\frac{b}{2a} \times b = \frac{1}{4aa}$.

Au contraire dans la formule dérivée $a + \frac{b+1}{2a+1}$, l'erreur la plus grande, est lorsque $b = 1$, ce qui donne pour l'erreur dans le quarré $\frac{4aa}{4aa+8a+4}$.

L'erreur la plus petite est lorsque $b = 2a$, ce qui donne pour l'erreur dans le quarré $\frac{1}{4aa + 8a + 4}$.

Si l'on se sert de la formule dérivée $a + \frac{b}{2a + b}$, l'erreur sera toujours en dessus & moindre que $\frac{1}{4}$.

La plus grande erreur est lorsque $b = a$, ou $b = a + 1$, alors l'erreur dans le quarré est $\frac{aa + a}{4aa + 4a + 1}$. & la petite erreur est lorsque $b = 1$, ou $b = 2a$, dans ce cas l'erreur dans le quarré est $\frac{2a}{4aa + 4a + 1}$ donc l'erreur moïenne dans cette formule dérivée est de $\frac{8a^3 + 12aa + 4a}{48a^3 + 48aa + 12a}$, elle est donc universellement de $\frac{1}{6}$.

Ainsi l'erreur moïenue dans cette derniére formule dérivée est précisément de la moitié plus petite que dans la formule primitive $a + \frac{b}{2a}$ où l'erreur moïenne est d'un tiers : elle a encore ceci de particulier, que l'erreur est égale & toujours par défaut dans les deux cas où le quarré imparfait est également éloigné de deux quarrez parfaits, l'un plus grand & l'autre plus petit, dans l'intervale desquels il est compris.

Par exemple. La racine de 11 est $3\frac{1}{7}$, & la racine de 14 est $3\frac{5}{7}$; or 11 surpasse 9 de 2, & 14 est surpassé par 16 aussi de 2.

De même le quarré de $3\frac{1}{7}$ est $10\frac{39}{49}$, qui est surpassé par 11 de $\frac{10}{49}$, & le quarré de $3\frac{5}{7}$ est $13\frac{39}{49}$ qui est surpassé par 14 aussi de $\frac{10}{49}$, &c.

2°. *Pour déterminer les limites dans la racine.*

Il est plus difficile de déterminer l'erreur soit par défaut soit par excés dans la racine que dans le quarré, à cause de l'irrationalité qui se trouve dans la racine.

Voici la Méthode qui m'a paru la plus ſimple & la plus naturelle. Je conſidére en particulier chacune des racines trouvées par chacune des opérations, & je ſuppoſe que celle qui ſuit eſt exacte par rapport à celle qui la précéde, & que la différence de ces deux racines eſt l'erreur dé la premiére qui précéde immédiatement.

Ainſi dans $a^2 + b$, la premiére racine approchée eſt a, la ſeconde eſt $a + \frac{b}{2a}$.

La troiſiéme eſt $a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$.

La quatriéme eſt $a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3 + 4aa}$

$- \frac{b^4}{128a^7 + 192a^5 b + 8a^3 b^2 + 8ab^3}$

La cinquiéme eſt, &c.

Je dis 1°. que l'erreur de la premiére racine eſt un peu moindre que $\frac{b}{2a}$ qui eſt l'excès de la ſeconde racine ſur la premiére.

2°. L'erreur de la ſeconde eſt d'un peu plus de $\frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$.

3°. L'erreur de la troiſiéme eſt un peu plus de $\frac{b^4}{128a^7 + 192a^5 b + 80a^3 b^2 + 8ab^3}$ & ainſi de ſuite à l'infini.

D'où il ſuit, 1°. que l'erreur de la premiére racine a, eſt précisément $\frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3 + 4ab} - \frac{b^4}{128a^7 + 192a^5 b + 80a^3 b^2 + 8ab^3}$ en continuant cette progreſſion à l'infini.

2°. Que l'erreur de la ſeconde racine $a + \frac{b}{2a}$, eſt précisément $\frac{b^2}{8a^3 + 4ab} - \frac{b^4}{128a^7 + 192a^5 b + 80a^3 b^2 + 8ab^3}$. — &c. en continuant de même la progreſſion à l'infini.

Formation

Formation de la progression des formules des limites d'approximation, qui servent à trouver les formules d'approximation.

Chaque formule d'erreur par défaut ou par excès est une fraction.

Les numérateurs sont des puissances de b non pas prises de suite, mais en sautant toujours au quarré de la précédente b, b^2, b^4, b^8, &c. à l'infini, c'est la multiplication de l'excés b précédent, multiplié continuellement par luimême, ce qui se fait en doublant toujours l'exposantde b.

Les dénominateurs viennent de la multiplication continuelle du double du numérateur de la racine précédente, réduite auparavant en fraction, & ensuite multipliée par le double du dénominateur.

Ces formules d'erreur servent à trouver les formules d'approximation suivantes, & réciproquement chaque formule d'approximation sert à trouver la formule d'erreur suivante.

Ainsi pour avoir la seconde racine $a + \frac{b}{2a}$, je le double, c'est $\frac{2a}{1}$, je multiplie ce double $2a$ par son dénominateur 1, c'est $2a \times 1 = 2a$, c'est le dénominateur de la fraction qui a b pour numérateur $\frac{b}{2a}$, c'est la premiére formule d'erreur ou des limites.

J'ajoute cette fraction à la premiére racine a, j'ai pour seconde racine & seconde formule $a + \frac{b}{2a}$.

Pour avoir la troisiéme racine ou troisiéme formule d'approximation $a + \frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$, ou son égale $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, dont j'ai expliqué la formation dans le Pro-

blême premier; je peux encore la former de la maniére qui suit, qui est plus simple & plus facile.

Je forme à cet effet la seconde formule d'erreur, comme il suit, son numérateur est b^2, c'est le numérateur b de la premiére fraction multiplié par lui-même, $b \times b = b^2$.

Pour avoir le dénominateur, je réduis la seconde racine, $a + \frac{b}{2a}$ en fraction, multipliant l'entier a par le dénominateur $2a$, or $a \times 2a = 2aa$ que je joins à la fraction $\frac{b}{2a}$, c'est $\frac{2aa + b}{2a}$.

Je prends ensuite le double de ce dernier numérateur $2aa + b$, c'est $4aa + 2b$, que je multiplie par le premier dénominateur précédent $2a$, or $4aa + 2b \times 2a$, donne $8a^3 + 4ab$, c'est le dénominateur de la deuxiéme formule d'erreur $\frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$.

Et $4aa + b \times a$ donne $4aab + b^2$ pour le numérateur de la troisiéme formule d'approximation qui a le même dénominateur de la troisiéme formule des limites; ainsi la troisiéme formule d'approximation est $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4b}$.

Pour avoir la quatriéme racine approchée, & la troisiéme formule des limites ou d'erreur, le numérateur de celle-ci b^4 est le numérateur de la troisiéme formule précédente b^2 multiplié par b^2, or $b^2 \times b^2 = b^4$.

Le dénominateur se trouve ainsi, je réduis la troisiéme formule d'approximation $a + \frac{4aab + b^3}{8a^3 + 4ab}$ en une seule fraction, multipliant l'entier a par le dénominateur entier, or $a \times 8a^3 + 4ab = 8a^4 + 4a^2 b$, je joins ce produit à la fraction entiére $+ \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ ce qui donne $\frac{8a^4 + 8aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$.

Je double ou je multiplie par 2 ce dernier dénominateur, j'ai $16a^4 + 16a^2b + 2b^2$
ensuite je le multiplie par le précédent dénominateur $8a^3 + 4ab$.

$$\begin{array}{r} 16a^4 + 16a^2b + 2b^2 \\ \times 8a^3 + 4ab. \\ \hline 128a^7 + 128a^5b + 16a^3b^2. \\ + 64a^5b + 64a^3b^2 + 8ab^3. \\ \hline \end{array}$$

Produit $128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3$.
c'est le dénominateur de la troisiéme formule des limites, ainsi la troisiéme formule des limites d'approximation est

$$\frac{b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3}$$

Ensuite pour avoir la quatriéme racine ou formule d'approximation, je lui donne le dénominateur trouvé, $128a^7$, &c.

Pour former le numérateur, je multiplie par b, le dénominateur précédent doublé $\overline{16a^4 + 16a^2b + 2b^2} \times b$. ce qui donne $16a^4b + 16a^2b + 2b^3 + b^4$.
y ajoûtant b^4 numérateur de la formule d'erreur
$128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3$.
& ajoûtant a, j'ai la quatriéme racine ou formule d'approximation $a + \frac{16a^4b + 16a^2b^2 + 2b^3 + b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3}$.

Formation de la quatriéme Racine.

$128 a^7 + 192 a^5 b + 80 \; a^3 b^2 + \; 8 a^4 b^3$
$\times \; 8 a^3 \; + 4 ab$

$64 \; + \; 16 a^8 b + 640 \; a^6 b^2 + \; 64 a^4 b^3$
$16 \qquad 720$
$8 . a^{10} + 800 \ldots + \ldots\ldots + \ldots$

$+ \; 32 a^8 b + .. \, 8 \; a^6 b^2 + 320 a^4 b^3 + 32 a^2 b^4$
$48 \; . \; . \; . \; 360 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . + . \; . \; .$
40

$1024 a^{10} + 548 a^8 b + 1408 \; a^6 b^2 + 384 a^4 b^3$ dénomin.
$+ 32 \; a^2 b^4$ Commun.

$8 a^3 \; + 4 ab.$
$\times \quad b^4$

$8 a^3 b^4 + 4 ab^5$. 1e. numérateur.

$128 \; a^7 + \; 192 a^5 b + \; 80 \quad a^3 b^2 + 8 \; ab^3$
$\times \; 4 a^2 b \; + b^2$

$32 . a^9 b + \; 8 a^7 b^2 \; + 320 a^5 b^3 + \; 32 a^3 b^4$
$8 \; . \; . \; 36$
$4 \; . \; . \; . \; 4$
$+ 128 a^7 b^2 + 192 \; a^5 b^3 + \; 80 a^3 b^4 + 8 \; ab^5.$

$512 a^9 b + 896 a^7 b^2 + 512 . a^5 b^3 + 112 a^3 b^4$ 2^d. num.
$+ 8 ab^5 \; . \; : \; + \; 8 a^3 b^4 + 4 \; ab^5.$ 1e. num.

$512 a^9 b + 896 a^7 b^2 + 512 a^5 b^3 + 120 a^3 b^4 + 12 ab^5.$

PROBLEME IV.

Appliquer les Formules d'approximation du second degré à des Exemples en nombres.

Premier Exemple. Soit le côté du quarré = 1, le quarré de la diagonale = 2. Donc pour avoir la valeur

de la diagonale il faut tirer la racine quarrée de 2, qu'on ne peut trouver exactement, mais dont on peut approcher à l'infini par la formule $a + \frac{b}{2a}$.

Dans ce cas j'ai $a = 1$, premiére racine approchée de $2 = \overline{a+b}$. Donc $b = 1$.

Substituant la valeur de a & b dans la formule $a + \frac{b}{2a}$, j'ai $1 + \frac{1}{2}$ pour seconde racine approchée, ou $\frac{3}{2}$.

Ensuite je substituë les valeurs de $a + \frac{b}{2a} = 1 + \frac{1}{2}$ dans la seconde formule $a + \frac{4aab + bb}{8a^3 + 4ab}$, ce qui donne

$$1 + \frac{\overline{\overline{4 \times 1 \times 1 + 1}}}{8 \times 1 + \overline{4 \times 1} \times 1} = 1 + \frac{4+1}{8+4} = 1 + \frac{5}{12} \text{ ou } \frac{17}{12}$$

c'est la troisiéme racine approchée, on en trouvera d'autres à l'infini par la même Méthode.

Autrement. Ayant trouvé la seconde racine $a + \frac{b}{2a} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = c$, je quarre $c = \frac{3}{2}$ son quarré est $\frac{9}{4}$ que j'ôte de $a^2 \pm b = 2$ quarré imparfait proposé, ôtant le plus petit nombre du plus grand, je suppose le reste $= \pm d$; c'est-à-dire, je prends pour seconde racine approchée $c - \frac{d}{2c}$ qui donne $2 = \frac{2}{1}$ qui ôté de $\frac{9}{4}$ le reste $= \frac{7}{3} = d$. Or $c - \frac{d}{2c}$ donne $\frac{3}{2} - \frac{\frac{7}{3}}{\frac{6}{4}}$, qui étant réduit à sa plus simple expression, donne $\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$, &c. à l'infini, & ainsi des autres.

Second Exemple. Soit proposé le quarré imparfait 200, dont on demande la racine approchée, pour trouver par exemple la corde du quart de cercle dont le raïon est 10, ou ce qui est la même chose pour trouver la grandeur de la diagonale, dont le quarré 200 est double du quarré 100, dont le côté 10 est donné.

J'ai donc $z^2 = a^2 + b = 200$.
or $a = 14$, $14 \times 14 = 196 = a^2$,
& $200 - 196 = 4$, donc $b = 4$.

1°. Substituant 14 à la place de a, & 4 à la place de b dans la premiére formule $a + \frac{b}{2a}$, j'ai pour seconde racine approchée $14 + \frac{4}{28}$ qui se réduit à $14 + \frac{1}{7}$, divisant les termes de la fraction par son commun diviseur 4.

2°. En me servant de la seconde formule d'approximation $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, j'ai une troisiéme racine encore plus approchée $14 + \frac{4 \times 196 \times 4 + 16}{8 \times 2744 + 4 \times 56}$

$= 14 + \frac{3136 + 16}{21952 + 224} = 14 + \frac{3152}{22176} = 14 + \frac{197}{1386}$

en divisant les deux termes de la fraction par leur commun diviseur.

Il n'est pas nécessaire de pousser plus loin l'approximation, il suffit de quarrer cette racine pour la comparer avec le quarré donné 200, comme il suit. 1°. En nombres. 2°. En lettres de la formule.

1°. Pour quarrer l'approximation trouvée en nombres, je réduis d'abord l'entier 14 en fraction en le multipliant par le dénominateur, & j'ajoute le produit au numérateur 197.

$$\begin{array}{r} 19404 \\ +\ 197 \\ \hline 19601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 1386 \\ \hline 5544 \\ 1386 \\ \hline 19404 \end{array}$$

J'ai donc à élever au quarré la fraction $\frac{19601}{1386}$

$$\begin{array}{r} 19601 \\ \times\ 19601 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1386 \\ \times\ 1386 \\ \hline \end{array}$$

19601	8316
117606..	11088
176409....	4158.
19601.....	1386...
384199201	1920996.
Quarré du numérateur.	*Quarré du dénominateur.*

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
1920996	384199201	$20{:}0 + \frac{1}{19.20.996}$

20... 38419920. Premier produit.
000000:1. Reste.
20:0 ....

D'où il suit que la racine trouvée par la seconde approximation $14 + \frac{197}{1386}$ est suffisante, & qu'il n'est pas nécessaire de pousser plus loin l'opération pour en approcher, puisque son quarré ne surpasse le quarré imparfait proposé que de $\frac{1}{192.09.96.}$ qui est une grandeur plus petite qu'aucune grandeur sensible.

2°. Je forme aussi le quarré de la formule pour le comparer avec le quarré proposé pour avoir l'approximation exprimée en général par des lettres.

$$a + \frac{4aab + bb}{8a^3 + 4ab}$$

$$\times\ a + \frac{4aab + bb}{8a^3 + 4ab}$$

$$\text{Quarré } a^2 + \frac{8a^3b + 2ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^3}$$

$$\text{ou } a^2 + b + \frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}$$

$$8a^3 + 4ab \qquad \text{or} \qquad 4a^2b + b^2$$

$$\times\ 8a^3 + 4ab \qquad\qquad \times\ 4a^2b + b^2$$

$64a^6 + 64a^4 b + 16a^2 b^2. \qquad 16a^4 b^2 + 8a^2 b^3 + b^4.$

Ce qui donne pour le quarré de la troisiéme formule.

$$a^2 + \frac{8a^3 b + 2ab}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4 b^2 + 8a^2 b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4 b + 16a^2 b^2}$$

$$\text{ou } a^2 + b + \frac{1}{2ab} + \frac{1b^2 + 1b^2 + b^2}{4a^2 + 16a^2 + 16a^4}$$

PROBLEME V.

Trouver les formules d'approximation pour les racines des troisiémes puissances imparfaites.

C'est dans le cube imparfait, ou la troisiéme puissance imparfaite, que ma nouvelle Méthode commence à se développer dans toute son étenduë, elle s'applique ensuite de la même sorte à toutes les puissances supérieures; au-lieu que dans le quarré qui est la seconde puissance, l'égalité de la seconde somme alternative donne directement une valeur de x rationelle, de sorte qu'il est inutile dans ce cas de comparer les deux égalitez pour en tirer une troisiéme qui seroit en même tems & moins simple & moins approchée.

Mais dans le cube imparfait, l'égalité de la seconde somme alternative donne une valeur & très-approchée, & très-utile pour certaines constructions géométriques, comme nous le verrons dans la suite, mais qui n'est pas commode pour le calcul Arithmétique, , c'est pourquoi il faut suivant l'article second de la régle générale de ma Méthode, comparer les égalitez des deux sommes alternatives pour en tirer une troisiéme égalité du premier degré, ou simplement d'un degré commode, c'est pour cette raison que dans l'essai de ma Méthode, & dans l'abrégé que j'ai publié en 1661, je n'ai point donné d'exemples pour la seconde puissance, mais seulement pour la troisiéme, parce que c'est dans la troisiéme puissance où cette Méthode s'applique dans toute son étenduë.

Soit

Soit en général, une troisiéme puissance imparfaite quelconque $z^3 = a^3 \pm b$. donc $z = \sqrt[3]{a^3 + b}$.

Régle générale.

Pour trouver les formules d'approximation, soit la puissance imparfaite $z^3 = a^3 + b$. dont a est la racine approchée en nombres entiers, donc z est entre a & $a + 1$ ou entre a & $a - 1$.

1°. Je suppose $z = x + \frac{1}{2} a$.

Je substituë cette valeur de z dans l'égalité proposée, ce qui se fait en l'élevant d'abord à la troisiéme puissance, comme il suit.

$$z = x + \tfrac{1}{2} a$$
$$\times z = x + \tfrac{1}{2} a$$
$$z^2 = x^2 + \tfrac{2}{2} a x + \tfrac{1}{4} aa$$
$$\text{ou } z^2 = x^2 + a x + \tfrac{1}{4} a a$$
$$\times z = x + \tfrac{1}{2} a$$
$$z^3 = x^3 + \tfrac{2}{2} a x^2 + \tfrac{1}{4} a^2 x + \tfrac{1}{8} a^3$$
$$+ \tfrac{1}{2} a x^2 + \tfrac{1}{2} a^2 x$$
$$z^3 = x^3 + \tfrac{3}{2} a x^2 + \tfrac{3}{4} a^2 x + \tfrac{1}{8} a^3.$$

La substitution donne l'égalité transformée qui suit $x^3 + \frac{3}{2} a x^2 + \frac{3}{4} a^2 x + \frac{1}{8} a^3 = a^3 + b$.

2e. Je sépare le premier membre de cette égalité en deux sommes alternatives, que j'égale à la moitié du second membre.

1re. somme alternative composée du 1er. & 3e. termes.

$$x^3 + \tfrac{3}{4} a^2 x = \frac{a^3 + b}{2}.$$

2de. somme alternative composée du 2d. & 4e termes

$$a x^2 + \tfrac{1}{8} a^3 = \frac{a^3 + b}{2}$$

3°. Pour tirer une valeur rationelle de x, je compare ces deux égalitez selon la Méthode des Problêmes plus que déterminez, comme il suit.

D'abord j'ôte les fractions, ce qui donne

$4x^3 + 3a^2x = 2a^3 + 2b.$

ou transposant

$4x^3 = 2a^3 + 2b - 3a^2x$

$\times 3a$

$12ax^3 = 6a^4 + 6ab''' - 9a^3x.$

Et $\frac{24}{2}ax^2 + 1a^3 = \frac{12a^3 + 12b}{2}$

ou $12ax^2 = 6a^3 + 6b - 1a^3$

$\times x \quad \times a \quad \times 9x$

$12ax^3 = 6a^4 + 6ab''' - 9a^3x.$

Je fais dans ces deux égalitez le premier terme égal, & dans les autres termes j'observe l'homogénïté, comme b est du troisiéme degré, je lui suppose un exposant en chifres romains b''', ainsi tous les termes seront de quatre dimensions.

A cet effet je multiplie dans la premiére égalité tous les termes par $3a$ qui est l'excés de $12ax^2$ sur $4x^2$; dans la seconde égalité je multiplie le premier terme par x qui est l'excés de x^3 sur x^2, je multiplie le second & le troisiéme terme $\times a$, & le dernier terme par $9x$, par ce moyen j'ai deux égalitez entiérement égales & semblables ou plûtôt la même égalité répétée.

Voilà la premiére maniére de comparer les égalitez tirée des deux sommes alternatives, qui me donne la premiére égalité réduite $12ax^3 = 6a^4 + 6ab - 9a^3x$ qui donne une valeur de x trop petite; puisque selon mon Théorême je devrois égaler la premiére somme $x^3 + \frac{3}{4}a^2x$, à une somme plus grande que $\frac{a^3 + b}{2}$, mais je sçai aussi que l'erreur est moindre que l'unité, car par le premier corollaire si j'égale la premiére somme alternative $x^3 + \frac{3}{4}$

$a^2 x$, avec $\frac{a^3+b}{2}+\frac{1}{2}$, j'aurai une valeur de x un peu trop grande, mais si je l'égale avec $\frac{a^3+b}{2}$, j'aurai une valeur de x un peu trop petite, mais toujours d'une fraction moindre que l'unité.

4°. Ainsi je compare la premiére somme alternative avec la moitié du second membre augmenté de $\frac{1}{2}$, c'est

$x^3+\frac{3}{4}a^2 x = \frac{a^3+b}{2}+\frac{1}{2}$

Je le multiplie $\times$ $12a$ pour ôter les fractions, j'ai $12ax^3+9a^3x = 6a^4+6ab''' + 6a$, & transposant j'ai $12ax^3 = 6a^4+6ab'''+6a-9a^3x$, c'est la seconde égalité réduite, où x est trop grand.

5°. Dans les égalitez précédentes art. 3. négligeant $-3a^3x$ comme une fraction infiniment petite,

j'ai $6a^3+6b-6-1a^3$. Second membre de la seconde égalité.

$= 5a^3+6b-6$ dont j'ôte le second membre de
$2a^3+2b-2$ la premiére égalité.

Le reste $3a^3+4b-4$
$\times x$

donne $3a^3x+4bx-4x$.

c'est-à-dire de $5a^3+6b$, second membre de la 2e. égalité.
ôtant $2a^3+2b$, second membre de la 1e. égalité.

reste $3a^3+4b$
qui multiplié $\times x$

donne $3a^3x+4bx$ pour la troisiéme égalité réduite, où x est trop grand.

6°. Pour avoir la quatriéme égalité réduite, $3a^3x+4bx-4x$, il suffit d'ôter un demi de la troisiéme égalité, ce qui se fait en ajoûtant $-4x$, ce qui donne la quatriéme égalité réduite.

$3a^3x+4bx-4x$, où x est trop petit.

7°. Voici les quatre égalitez réduites.

1re. $12ax^3 = 6a^4 + 6ab - 9a^3x$, où x eſt trop petit.

2de. $12ax^3 = 6a^4 + 6ab + 6a - 9a^3x$, où x eſt trop grand.

3e. $12ax^3 = 3a^3x + 4bx$, où x eſt trop grand.

e. $12ax^3 = 3a^3x + 4bx - 4x$, où x eſt trop petit.

8°. Enfin pour avoir les formules d'approximation, je compare la premiére & la ſeconde égalité en négligeant le premier membre qui eſt par tout égal.

J'ai $6a^4 + 6ab - 9a^3x = 3a^3x + 4bx$, donc $6a^4 + 6ab = 12a^3x + 4bx$, & dégageant l'inconnuë x, j'ai $x = \frac{6a^4 + 6ab}{12a^3 + 4b} = \frac{3a^4 + 3ab}{6a^3 + 2b}$

donc $x = \frac{1}{2}a + \frac{2ab}{6a^3 + 2b}$, car $\frac{6a^4}{12a^3} = \frac{1}{2}a$, & $2b \times \frac{1}{2}a = 1ab$, or $3ab - 1ab = 2ab$ numérateur de la fraction, qui réduite à moindres termes donne $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{ab}{3a^3 + b}$

Voilà la premiére formule trouvée.

De même comparant la ſeconde & la quatriéme égalité réduites, j'ai

$6a^4 + 6ab + 6a - 9a^3x = 3a^3x + 4bx - 4x$

ce qui donne par tranſpoſition

$6a^4 + 6ab + 6a = 12a^3x + 4bx - 4x$,

& dégageant x, j'ai

$x = \frac{6a^4 + 6ab + 6a}{12a^3 + 4b - 4} = \frac{3a^4 + 3ab + 3a}{6a^3 + 2b - 2}$, ou $x = \frac{1}{2}a$ $+ \frac{2ab + 2a\ 2}{6a^3 + 2b - 2}$,

car $2b \times \frac{1}{2}a = 1ab$, $3ab - 1ab = 2ab$, de même $2 \times \frac{1}{2}a = 1a$, or $1a$, ôté de $3a$, reſte $+ 2a$ qui ſont les deux termes du numérateur.

Donc la ſeconde formule d'approximation pour les racines des troiſiémes puiſſances imparfaites eſt $x = \frac{1}{2}a$ $\pm \frac{2ab + 2a}{6a^3 + 2b - 2}$.

Remarque. La premiére formule eſt la plus ſimple & ſuffit ſeule dans la pratique, elle donne toujours une valeur de x trop petite, mais elle en approche indéfiniment, ce qui vient de ce que le dénominateur eſt trop grand, & le numérateur trop petit.

Mais ſi on compare la premiére formule avec la ſeconde, on trouve que la différence des deux valeurs de x, eſt $\frac{6a^4 + 3ab}{9a^6 + 6a^3b + bb - 3a^3 - b}$,

donc l'erreur dans la racine eſt d'environ $\frac{2}{3}aa$ au plus, & cette détermination eſt plus exacte que celle qui ſe tire *à poſteriori*, en élevant au cube la racine trouvée; cette Méthode eſt générale, il eſt facile de l'appliquer de même à toutes les autres formules d'une égalité quelconque pure ou affectée.

PROBLEME VI.

Uſage de la premiére formule d'approximation pour les puiſſances imparfaites du troiſiéme degré.

$x = \frac{1}{2}a + \frac{ab}{3a^3 + b}$

Les régles précédentes s'éclairciront par les exemples en nombres qui ſuivent.

Soit $z^3 = 100 = 64 + 36 = a^3 + b$. Donc $a = 4$, & $b = 36$.

Premiére racine approchée, reſte 36.

Donc $z = \sqrt{100} = \sqrt[3]{64 + 36} = \sqrt[3]{a^3 + b}$.

Donc $z = x + \frac{1}{2}a$, or $a = 4$. Donc $z = x + 2$.

Dans la formule $x = \frac{1}{2}a + \frac{ab}{3a^3 + 4}$ ſubſtituant les valeurs de a & de b, j'ai $x = 2 + \frac{4 \times 36}{3 \times 64 + 36}$.

Donc $x = 2 + \frac{144}{192 + 36} = 2 + \frac{144}{228} = 2 + \frac{12}{19}$.

Donc $z = 4 + \frac{12}{19} = \frac{88}{19}$; c'eſt la ſeconde racine ap-

prochée; je cube ces deux nombres, & j'ai $99 + \frac{2431}{6859}$ qui différe de 100 de moins d'une unité; cette différence est $\frac{4428}{6859}$ environ de deux tiers.

Pour avoir une troisiéme racine encore plus approchée, je suppose la seconde racine trouvée $4 + \frac{12}{19} = a$, & la différence trouvée $\frac{4428}{6859} = b$; ensuite substituant ces valeurs dans la même formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$ la substitution donne

$$4\tfrac{12}{19} + \frac{4\frac{12}{19} \times \frac{4428}{6859}}{3 \times \overline{4\frac{12}{19}}^3 + \frac{4428}{6859}}, \text{ ou } \frac{88}{19} + \frac{\frac{88}{19} \times \frac{4428}{6859}}{3 \times \overline{\frac{88}{19}}^3 + \frac{4428}{6859}}.$$

Pour continuer après avoir trouvé la troisiéme racine approchée, je la suppose $= a$, & sa différence égale à b, & substituant leurs valeurs dans la même formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, j'approcherai toujours à l'infini de la racine cherchée.

PROBLEME VII.

Usage de la seconde formule pour les puissances imparfaites du troisiéme degré.

$z^3 = a^3 - b$.

Une puissance imparfaite du troisiéme degré peut être comparée ou avec une troisiéme puissance parfaite plus petite comme $100 = 64 + 36$, & dans ce cas je me sers de la formule $z = a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, ou avec une troisiéme puissance plus grande comme $100 = 125 - 25$; & dans ce cas je me sers de la formule $z = a - \frac{ab}{3a^3 - b}$ semblable, mais dont les signes sont contraires.

Nous avons donné un exemple du premier cas, en voici un dans le second cas.

Soit $z^3 = a^3 - b$, ou $z^3 = 100 = 125 - 25$.

Donc $z = a - \frac{ab}{3a^3 - b}$, soit $a = 5$. Donc $b = 25$, substituant ces valeurs dans la formule, j'ai

$$5 - \frac{5 \times 25}{3 \times 125 - 25} \left(= \frac{125}{350} \right) = 5 - \frac{5}{14} = \frac{65}{14} = 4 \frac{9}{14}$$

dont le cube est $100 + \frac{225}{2744}$ qui approche de 100 à moins d'une unité près.

Pour avoir une autre racine encore plus approchée, je suppose la racine trouvée $4 \frac{9}{14} = a$, & la différence $\frac{225}{2744} = b$, je substituë ces valeurs dans la formule $z = a - \frac{ab}{3a^3 - b}$, la substitution me donnera une racine plus approchée, & continuant de même on en approchera toujours de plus en plus à l'infini.

Examen de l'avantage des deux formules d'approximation du troisiéme degré, ou de la formule générale d'approximation du troisiéme degré.

$$z = a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}.$$

Pour comparer l'avantage des deux cas de la formule, dont le 1er. a le signe $+$, & le second le signe $-$, je considére le rapport le plus simple que j'ai trouvé pour la racine cubique de 100, la formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$ m'a donné $\frac{88}{19}$ & la formule $a - \frac{ab}{3a^3 + b}$ m'a donné $\frac{65}{14}$ je réduis ces deux rapports en nombres de la dixme, ajoûtant des zéros au dividende & par la division je trouve, comme il suit

$$\frac{88}{19} = 4 : \frac{63.\ 15.\ 8 -}{1.\ 00.\ 00.\ 0}$$

$$\& \ \frac{65}{14} = 4 : \frac{64.\ 28.\ 5 +}{1.\ 00.\ 00.\ 0.}$$

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
19	88 : 0000	4 : 63. 15. 8 —

4 . . 76
12 : 0
6 . . 114
6 : 0
3 . . . 57
3 : 0
1 19
11 : 0
5 95
15 : 0
8 — 152
— 2

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
14.	65 : 0000	4 : 64. 28. 5 +

4 . . 56
9 : 0
6 . . 84
6 : 0
4 . . . 56
4 : 0
2 28
12 : 0
8 112
8 : 0
5 + ... 70.
+ 10.

PROBLEME VIII.

Trouver les limites dans chaque formule d'approximation du troisiéme degré.

Premiére Méthode. Puisqu'en général deux cubes qui se

ſe ſuivent immédiatement ſont a^3, & $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, & que tout cube imparfait s'exprime en général par $z^3 = a^3 \pm b$. Il ſuit de là que b eſt l'excès ou la différence du cube a^3 & du cube imparfait $z^3 = a^3 \pm b$. Donc les valeurs de b dans $a^3 + b$ croiſſent. *Exemple.* Depuis le cube 27 au cube 64, les valeurs de b croiſſent depuis 1, juſques à $3aa + 3a$ incluſivement, car $3aa + 3a + 1$ donne préciſément le cube ſuivant au-deſſus ; au contraire dans $a^3 - b$, les valeurs de b décroiſſent juſqu'à $3aa - 3a$ incluſivement, du cube 64 dont la racine eſt 4, au cube 27 dont la racine eſt 3, j'ai $a = 4$, $aa = 16$. Donc $3aa = 3 \times 16 = 48$, or $48 - 3a = 48 - 12 = 36$, or $64 - 36 = 28 = 27 + 1$.

En général, la véritable valeur de z dans $z^3 = a^3 + b$ eſt entre $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$, & $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}}$; ainſi élevant à la troiſiéme puiſſance chacune des racines trouvées, on trouve l'erreur en les comparant avec la troiſiéme puiſſance propoſée, ce qui donne les limites par excès ou par défaut.

Seconde Méthode, pour avoir les formules d'approximation des troiſiémes puiſſances imparfaites.

Soit le cube imparfait $z^3 = a^3 \pm b$. dont la premiére racine approchée eſt a, pour avoir la ſeconde racine approchée, je cube la racine trouvée a, j'ôte ſon cube a^3 du cube imparfait propoſé $a^3 \pm b$, & je ſuppoſe le reſte $= c$.

Enſuite je prends la formule $c \pm \frac{cd}{c^3 + d}$ & ſubſtituant des nombres à la place des lettres, j'ai la ſeconde racine cubique approchée.

Continuant de même l'opération, j'approcherai toujours de plus en plus de la racine deſirée.

Analyſe. uu

Ensuite élevant à la troisiéme puissance la racine trouvée par approximation, & comparant cette troisiéme puissance avec la proposée, on connoîtra l'erreur par excès ou par défaut.

SECTION DEUXIE'ME.

Méthode nouvelle & abrégée pour l'extraction des Racines des puissances imparfaites de tous les degrez à l'infini.

DEfinitions. 1°. Une puissance parfaite est celle qui contient le produit d'un nombre par lui-même autant de fois moins une, que l'exposant de son degré contient d'unitez; ainsi 4 est la seconde puissance de 2 multipliée une fois; c'est-à-dire deux fois moins une par lui-même, parce que 2 est l'exposant de la seconde puissance.

De même comme l'exposant de la troisiéme puissance est 3, 8 est la troisiéme puissance de 2, c'est le produit de 2 multiplié deux fois par lui-même ou 3 — 1 fois, &c.

2°. Je nomme une puissance numérique *complette*; par exemple du second degré, celle qui est exprimée par un nombre de chifres égal à l'exposant 2 du second degré, ou à quelqu'une des puissances de cet exposant 2, tels

	1re.	2de.	3e.	4e.	5e.	6e. puissance.	
que sont	2,	4,	8,	16,	32,	64,	&c.

Ainsi 49. quarré rationel & 51 irrationel, sont des puissances complettes exprimées par deux chifres; 1369 quarré rationnel; & 13. 04. quarré irrationel sont des puissances complettes exprimées par quatre chifres, de même 61. 66. 96. 09. quarré irrationel, est une seconde puissance complette exprimée par huit chifres.

Pareillement dans la troisiéme puissance dont l'expo-

ſant eſt 3; je nomme troiſiéme puiſſance complette celle qui eſt exprimée ou par trois chifres ou par un nombre de chifres qui eſt une puiſſance de 3, comme

1re. 2de. 3e. 4e. puiſſance.
3. 9. 27. 81.

Ainſi 343 eſt une puiſſance parfaite ou rationelle mais *complette*, exprimée par trois chifres, & 453 eſt un troiſiéme puiſſance imparfaite ou irrationelle, mais *complette* exprimée par trois chifres.

De même 151. 893. 679. eſt une troiſiéme puiſſance complette, parce qu'elle eſt exprimée par neuf chifres, & que 9 eſt une puiſſance de 3. & ainſi des autres.

3°. Je nomme puiſſance *incomplette* celle qui eſt exprimée par un nombre de chifres qui n'eſt pas égal à quelque puiſſance de l'expoſant de ſon degré. Ainſi 834 eſt un quarré incomplet, parce qu'il eſt exprimé par trois chifres, or 3 n'eſt pas une puiſſance de ſon expoſant 2. De même 34332 eſt une ſeconde puiſſance incomplette, car elle eſt exprimée par cinq chifres, & 5 n'eſt pas une puiſſance de l'expoſant 2.

Premiére formation des Tranches de chifres.

4°. Je coupe les puiſſances complettes par des tranches de chifres *proportionelles* de gauche à droite, au lieu que dans la Méthode ordinaire on coupe les tranches des chifres en commençant de droite à gauche; or ces tranches proportionelles contiennent un nombre de chifres qui ſont dans la proportion géométrique de l'expoſant du degré de la puiſſance

Dans le ſecond degré où $p = 2$.

La premiére tranche qui eſt la plus à gauche aura deux chifres, car $p = 2$.

La ſeconde tranche aura encore deux chifres, ſuivant la formule $pp - p = 4 - 2 = 2$.

La troisiéme tranche aura quatre chifres, suivant la formule $p^3 - p^2 = 8 - 4 = 4$.

La quatriéme tranche aura huit chifres, suivant la formule $p^4 - p^3 = 16 - 8 = 8$.

La cinquiéme tranche aura seize chifres, suivant la formule $p^5 - p^4 = 32 - 16 = 16$.

La sixiéme tranche aura trente-deux chifres, suivant la formule $p^6 - p^5 = 64 - 32 = 32$.

La septiéme tranche aura soixante-quatre chifres, suivant la formule $p^7 - p^6 = 128 - 64 = 64$, & ainsi de suite à l'infini.

Ainsi si j'avois un nombre composé de soixante-quatre chifres, au lieu de le couper en 32 tranches de deux chifres chacune de droite à gauche comme dans la Méthode ordinaire, au contraire je le couperois en commençant de gauche à droite en six tranches seulement, suivant la progression suivante qui exprime le nombre des chifres

1re. tranche	2de.	3e.	4e.	5e.	6e.	tranche.
2.	2.	3.	4.	5.	6.	= 64 chifres.

Exemple. Soit proposé de trouver la racine quarrée du nombre qui suit, je le coupe par cinq tranches.

nombre	67:	83:	7173:	9000 8151:	3075. 9498. 9304.
tranches	1re.	2de.	3e.	4e.	5e. tranche
chifres	2 .	2 . .	4 .	8	16 chifres.

Enfin la derniére tranche dans les puissances complettes aura le nombre de chifres déterminé par cette formule $p^q - p^{q-1}$ dans laquelle formule je suppose que p^q exprime la somme du nombre des chifres proposé, c'est-à-dire que le nombre q est une puissance quelconque de l'exposant p de la puissance proposée.

En général dans les puissances complettes, j'observe dans la division des tranches la proportion géomé-

trique, ainsi dans le cube, la premiére tranche a trois chifres, la seconde six chifres, la troisiéme tranche a dix-huit chifres; ainsi la premiére contient trois chifres, les deux premiéres neuf chifres, les trois premiéres vingt-sept chifres; ce qui fait cette progression géométrique, 3. 9. 27. ce qu'il faut observer.

Dans le troisiéme degré ou la troisiéme puissance dont l'exposant est $3 = p$, je prends les puissances de 3 que je substituë dans la formule en la place des puissances de p.

Ainsi la premiére tranche à gauche aura trois chifres puisque $p = 3$.

La seconde tranche aura six chifres, suivant la formule $p^2 - p = 9 - 3 = 6$.

La troisiéme tranche aura dix-huit chifres, suivant la formule $p^3 - p^2 = 27 - 9 = 18$.

La quatriéme tranche aura cinquante-quatre chifres, suivant la formule $p^4 - p^3 = 81 - 27 = 54$, &c.

Exemple. Dans le cube suivant j'ai les tranches comme il suit.

cube 711. 806. 345. 800. 374. 943. 812. 914. 503.
tranches 1re. . . 2de. . . . . . . 3e. tranche.
nombre des
chifres. 3 . . . . . . 6 . . . . 18. chifres.

Pareillement dans la quatriéme puissance, dont l'exposant est $4 = p$.

1re. tranche $p = 4$ chifres.
2de. tranche $p^2 - p = 16 - 4 = 12$ chifres.
3e. tranche $p^3 - p^2 = 64 - 16 = 48$ chifres, &c.

De même dans la cinquiéme puissance dont l'exposant est $5 = p$, on substituë cette valeur & ses puissances dans la formule, ce qui donne pour le nombre des chifres de chaque tranche; sçavoir,

La premiére tranche $p = 5$ chifres.

La seconde tranche $p^2 - p = 25 - 5 = 20$ chifres.

La troisiéme tranche $p^3 - p^2 = 125 - 25 = 100$ chifres.

Total 125 chifres partagez seulement en trois tranches, au lieu de 25 tranches de 5 chifres chacune dans la Méthode ordinaire.

Remarque. La derniére tranche qui est vers la droite contient beaucoup plus de chifres que celles qui sont vers la gauche, & il est indéfiniment plus difficile d'en trouver la racine que des tranches précédentes à gauche par la Méthode ordinaire, mais dans celle-ci, il est plus facile d'en trouver la racine, & on peut même négliger cette derniére tranche toute entiére, & c'est un vrai paradoxe, car elle est moindre que l'unité.

Division des tranches de chifres pour les puissances imparfaites incomplettes.

5°. Dans les puissances incomplettes, qui sont celles qui sont exprimées par un nombre de chifres qui n'est point une puissance de l'exposant du même degré, lorsque le nombre des chifres surpasse une puissance de l'exposant du même degré, comme une seconde puissance 384, qui est exprimé par trois chifres, or 3 surpasse l'exposant 2 de la seconde puissance; alors la premiére tranche contient ou autant de chifres que cet exposant 2 contient d'unitez, ou bien la premiére tranche contient autant de chifres qu'il en reste aprés avoir divisé le nombre des chifres de la puissance proposée par l'exposant même de cette puissance.

Les tranches suivantes contiennent autant de chifres que dans les puissances complettes ci-dessus, excepté la derniére tranche qui en contient moins.

Par exemple, le quarré 52. 38 53. 46. 86. 14. 59. est une seconde puissance incomplette, puisqu'elle est exprimée par 14 chifres, & que 14 n'est pas une puis-

ſance de l'expoſant $2 = p$, qui eſt celui de la ſeconde puiſſance.

Sa premiére tranche proportionelle eſt 52, de deux chifres & les autres comme dans l'opération ſuivante.

Quarré incomplet	52.	38.	5346.	861459.
tranches . . .	1re. .	2de.	3e. . .	4e. tranche.
chifres.	2 . .	2.	4 . .	6 chifres.

Au lieu que dans les puiſſances complettes la quatriéme tranche contient huit chifres.

De même dans le quarré ſuivant exprimé par 13 chifres.

Quarré incomplet	2.	38.	5346.	861459.
tranches . . .	1re.	2de.	3e.	4e. tranche.
chifres . . .	1. .	2. .	4. . .	6 chifres.

Parce que 13 nombre des chifres étant diviſé par 2, expoſant de la ſeconde puiſſance, il reſte 1, & les autres ſont comme dans l'exemple précédent.

Pareillement dans le cube incomplet 59. 985256. la premiére tranche 56 contient deux chifres, & la ſeconde contient ſix chifres.

En général dans toute puiſſance incomplette, c'eſt-à-dire dans laquelle le nombre des chifres n'eſt pas une puiſſance exacte du même degré que la racine cherchée, il faut dans la diviſion des tranches obſerver la proportion géométrique la plus approchante.

Par exemple, ſoit une troiſiéme puiſſance propoſée exprimée par 24 chifres, comme 24 n'eſt pas une puiſſance de 3 qui eſt l'expoſant de la troiſiéme puiſſance, mais ſe trouve compris entre deux puiſſances conſécutives de 3 qui ſont 9 & 27, & que 24 approche plus de 27 que de 9, je diviſe le cube propoſé en trois tranches comme s'il avoit 27 chifres, alors la premiére aura trois chifres, & la ſeconde tranche ſix chifres, ainſi elles ſe-

ront complettes, mais la troisiéme tranche sera incomplette, & n'aura que les 15 chifres suivans, au lieu qu'elle devroit avoir 18 chifres pour être complette.

Si le cube proposé n'avoit que 12 ou 15 chifres, je le diviserois seulement en deux tranches, comme s'il n'avoit que 9 chifres, parce que 12 & 15 sont plus proches de 9 seconde puissance de 3, exposant de la troisiéme puissance, que de 27 qui est la troisiéme puissance, & dans ce cas je donne 6 chifres à la premiére tranche, & la seconde tranche contient les autres derniers chifres, six ou neuf restans; mais alors il faut suivre la Méthode ordinaire pour tirer la racine de la premiére tranche.

Enfin si le cube proposé contient 18 chifres, je peux le diviser ou en deux tranches selon cette progression géométrique double 6. 12. ou en trois tranches selon celle-ci, 3. 6. 9. parce que 18 est également éloigné de 9, seconde puissance de 3, & de 27 qui est sa troisiéme puissance.

La premiere division 6. 12 est plus commode & plus abrégée.

Mais si le nombre des chifres de la puissance proposée n'est pas précisément un multiple de 3, il faut alors ou le rendre multiple en le multipliant par 9. 27. &c. ou prendre pour la premiére tranche, trois chifres de plus, ce qui est plus commode que la multiplication, ce qui est général pour toutes les autres puissances supérieures.

Seconde Maniére de diviser par tranches une puissance imparfaite & incomplette.

Il y a encore une autre maniére de couper par tranches les puissances incomplettes, elle consiste à prendre la premiére tranche un peu plus grande, & à augmenter les autres dans la même proportion, ensorte que la derniére tranche

tranche soit la plus grande qu'il soit possible, & qu'il y ait aussi le moins de tranches qu'il se peut.

Autrement. Dans le quarré, par exemple, au lieu de prendre la derniére moitié pour en trouver la valeur par simple division, on peut ne prendre que le dernier tiers, supposé que la premiére tranche soit plus petite que 25. Ainsi dans $\sqrt[2]{3.\ 00.\ 00.\ \&c.}$ où la premiére tranche du quarré est seulement 3, qui est bien moindre que 25, après avoir trouvé les seize premiers chifres, on trouvera les huit derniers suivant la formule $a + \frac{b -}{2a}$, & $a + \frac{b - 1 +}{2a}$.

6°. Je nomme *premiére tranche proportionelle complette*, celle qui est telle, que la racine étant augmentée d'une unité, & élevée ensuite à la même puissance, il se trouve au moins une unité franche de plus dans le dernier chifre de cette premiére tranche, par exemple, dans le cube 958. 585256.

La premiére tranche 958 est complette, parce que la racine de ce cube étant 986, si je l'augmente de l'unité j'aurai 987, dont le cube 961 : 504803, a pour sa premiére tranche 961 qui surpasse l'autre premiére tranche 958 de plus d'une unité franche, aïant égard aux chifres suivans.

Mais dans le cube 64 : 964808, la premiére tranche 64 n'est pas complette, quoique dans le cube immédiatement suivant 65 : 450827, la premiére tranche 65 surpasse d'une unité l'autre premiére tranche 64, parce que les chifres qui suivent 64 sont plus grands que ceux qui suivent 65.

On verra dans la suite l'usage de ces définitions.

Théoréme second & fondamental.

Si on éléve deux nombres consécutifs a & $\overline{a+1}$ à une puissance quelconque dont l'exposant soit p, & que

$\sqrt[p-1]{\frac{m^p}{p^p}}$ soit égal ou plus petit que la premiére tranche proportionelle de la puissance p; je dis que la premiére tranche proportionelle de a^p surpassera de plus d'une unité franche la premiére tranche proportionelle de $a+1^p$.

Soit $m = 10$, & $p = 2$, on aura $\sqrt{\frac{m^2}{4}} = 5$. Je dis que dans tout nombre dont la premiére figure est 5, ou au-dessus, & par conséquent dans tout quarré dont la premiére tranche est 25, ou au-dessus jusqu'à 99 inclusivement, la premiére moitié est surpassée au moins d'une unité franche par la premiére moitié du quarré prochainement plus grand.

Par exemple. Le quarré de 50 est 25. 00. celui de 51 est 26. 01, dont la premiére moitié des chifres 26 surpasse d'une unité franche la premiére moitié 25 des chifres dans 2500.

De même dans le quarré de 5833, qui est 3402. 3839. & le quarré de 5832. qui est 3401. 2224. La premiére moitié 3402 du premier quarré, surpasse d'une unité franche la premiére moitié 3401. du second quarré.

Mais les quarrez du premier exemple de 50 & 51 sont les premiers & les plus petits nombres où cette différence se trouve, car le quarré de 49 est 2401. & celui de 50 est 25. 00; il y a moins d'une unité franche à cause du dernier chifre 1. qui est le quatriéme dans 2401.

Dans la quatriéme puissance, la formule est $\sqrt[3]{\frac{10}{4}}$

$= \sqrt[3]{\frac{10.00}{4}} = \sqrt[3]{250} = 6.300 + \& 6301 -$.

La quatriéme puissance de 6. 300. est 1574 +, & celle de 6301 est 1575 —, tranche cherchée.

Dans la 3e. puiſſance, ſoit encore $m = 10$, & $p = 3$ l'on aura

$$\frac{m^p}{\sqrt[p-1]{p^p}} = \frac{10.00}{\sqrt[2]{27}} = \sqrt[2]{370.37} = 192+ \text{ ou } 193- = \sqrt{33}\ \underline{33.33},\&c. = 5.\underline{773503}-$$

ou $\sqrt[p-1]{\dfrac{m^{pp-1p}}{p^{p}}}$ Mais ſuppoſant $m = 7$, & $p = {}^{2}$ $= 3$, &c. l'on trouvera $\frac{100}{4} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4} = 15\frac{1}{4}$, ou 16.

Dans le cube c'eſt $\dfrac{1000}{\sqrt[2]{27}} = \dfrac{343}{\sqrt[2]{36}} = \sqrt{\dfrac{2000.000}{27}}$ quarré $= \sqrt{370.37+} = 192 + \ \& \ 193 -$, tranche cherchée.

Je dis que dans tout cube, dont la premiére tranche eſt 5 ou au-deſſus juſqu'à 999 incluſivement, le premier tiers eſt ſurpaſſé au moins d'une unité franche par le premier tiers du cube prochainement plus grand.

Par exemple. Le cube de 577 eſt 192. 100. 033. & le cube de 578 eſt 193. 100. 552.

Le premier tiers à gauche du ſecond cube 193 ſurpaſſe le premier tiers 192 du premier cube d'une unité franche, & ces deux cubes ſont les premiers & plus petits nombres où cette différence ſe trouve, puiſque $\dfrac{10}{\sqrt[2]{3}} = 5.\underline{77}+$ ou 5.78 —, car le cube de 576 = 191. 102. 976. dans lequel ce rapport ne ſe trouve point.

LEMME.

Elever tout d'un coup un binôme quelconque a $\pm$ b *à une puissance d'un degré quelconque dont l'exposant soit* p.

Pour démontrer le Théoréme précédent, j'ai besoin de ce Lemme.

Pour élever tout d'un coup un binôme quelconque $a \pm b$ à une puissance dont l'exposant est p. Sans passer par les puissances inférieures & sans le secours de la table des puissances, je me sers de cette forme générale,

$$a^p \pm p a^{p-1} b^1 + \frac{pp-p}{2} a^{p-2} b^2 \pm \frac{p^3 - 3pp + 2p}{6} a^{p-3} b^3.$$

&c. & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait trouvé la premiére moitié des termes dans les puissances impaires, ou la plus grande moitié dans les puissances paires, c'est-à-dire, jusqu'à ce que $a^{p-n} b^n$. soit égal à $a^{\frac{1}{2}p} b^{\frac{1}{2}p}$ dans les puissances paires, & $a^{\frac{p+1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}}$ dans les puissances impaires, car alors on reprend dans un ordre contraire les mêmes multiplicateurs pour les termes de la puissance de a qui sont également éloignez des deux extrêmes a^p, & b^p.

Exemple. Pour avoir la septiéme puissance de $a+b$, alors $p = 7$. Il y a huit termes dans cette puissance puisqu'il y en a toujours un de plus que son exposant 7. Il faut donc trouver seulement quatre termes dans lesquels, je substituë 7 à la place de p, & les puissances de 7 à la place des puissances de p, ce qui donne

1e.	2^d.	3e.	4e.
$1a^7$	$+ 7a^6 b^1$	$+ 21a^5 b^2$	$+ 35a^4 b^3$.

pour former les quatre derniers termes, j'écris les mêmes nombres dans un ordre contraire, en même tems je diminuë de l'unité les puissances de a & j'augmente de l'unité les puissances de b, ce qui donne

5e.	6e.	7e.	8e. & dernier
$+ 35a^3 b^4$	$+ 21a^2 b^5$	$+ 7a^1 b^6$	$+ 1b^7$. terme.

Voilà tous les termes de la septiéme puissance de $\overline{a+b}$ que l'on peut ranger de suite.

Les puissances de a & de b se trouvent facilement, dans le premier terme l'exposant de a est seul & sans b, il est égal à l'exposant 7 de la puissance désirée; toutes les autres puissances de a décroissent de l'unité d'un terme à l'autre jusqu'au dernier terme ou a ne se trouve plus.

Au contraire b ne se trouve point au premier terme, dans le second terme son exposant est 1, qui croît de l'unité d'un terme au suivant jusqu'au dernier terme où b se trouve seul & son exposant est égal à celui de la puissance.

La difficulté consiste à trouver les nombres qui multiplient les termes moïens, qui sont

$\frac{p}{1}$, $\frac{pp-1p}{2}$, $\frac{p^3-3pp+2p}{6}$, $\frac{p^4-6p^3+11p^2-6p}{24}$

Or ces numérateurs sont formez par la multiplication continuelle de $1\times p = p$, de $p\times \overline{p-1} = pp-1p$, de $\overline{pp-1}\times\overline{p-2} = p^3-3pp+2p$, de $\overline{p^3-3p^2+2p}\times\overline{p-3} = p^4-6p^3+11p^2-6p$.

Ainsi les multiplicateurs $p-1$, $p-2$, $p-3$, $p-4$, &c. sont la suite des nombres naturels.

Le multiplié du terme suivant est toujours le terme précédent tout entier.

Les dénominateurs se forment par la multiplication des nombres pris dans la suite naturelle $1\times 1 = 1$. $1\times 2 = 2$. $1\times 2\times 3 = 6$. $1\times 2\times 3\times 4 = 24$. $1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$, &c. ou simplement 1. $1\times 2 = 2$. $2\times 3 = 6$. $6\times 4 = 24$ $24\times 5 = 120$, &c.

Démonstration du second Théoréme fondamental.

Si $b=1$, alors les termes moïens de la formule générale des puissances contenuës dans le Lemme précédent n'aura plus de b, puisque l'unité ne multiplie point, & cette formule sera réduite à cette expression plus simple $pa^{p-1} + \frac{pp-p}{2}$

a^{p-2} &c. Or, afin que la somme de ses termes moïens, c'est-à-dire, la différence des puissances de a & de $\overline{a+1}$, fasse dans le cas le plus simple qui soit possible, une unité de différence dans la pénultiéme tranche proportionelle de la puissance a^p. Il faut supposer a exprimé par une seule figure significative, suivie d'un nombre de zéros quelconque : car si dans ce cas la puissance de $\overline{a+1}$ excéde d'une unité dans la tranche pénultiéme la puissance semblable de a; il est évident que dans tous les nombres au-dessus, la difference étant plus grande, il y aura toujours plus d'une unité de différence. Il faut donc égaler la somme des termes moïens de $\overline{a+1}$ avec 10, ou généralement avec m, & on aura l'égalite universelle à résoudre

$pa^{p-1} + \frac{pp-p}{2} a^{p-2}$ &c. $= m$. Ensuite négligeant tous les termes excepté le premier, parce que ce sont des infiniment petits qui n'ont aucun rapport sensible avec ce premier terme. Il suffit donc d'égaler $pa^{p-1} = m$.

ce qui donne $a = \sqrt[p-1]{\frac{m}{p}}$ comme nous l'avons trouvé ci-dessus. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque. 1°. Cette détermination de la valeur de a, est la seule qui puisse satisfaire universellement. Mais si on veut la déterminer en nombres rationaux, on trouvera que $a = 5$ dans le quarré, que $a = 6$ dans la troisiéme puissance, que $a = 7$ dans la quatriéme puissance, &c. Ce qui revient au même, & ce qui est plus commode pour chaque cas particulier.

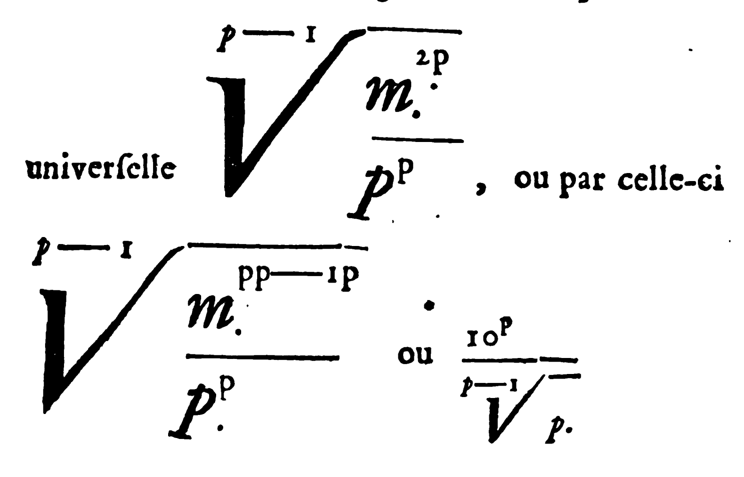
Remarque. 2°. Comme la puissance est toujours donnée, & qu'il s'agit d'en trouver la racine, il sera plus utile & plus exact de trouver directement les limites de cette premiére tranche proportionelle, car on la trouvera 1°. par cette formule générale $\frac{100}{4} = 25$ dans la seconde puissance.

2°. Par celle-ci $\sqrt[2]{\frac{1000.000}{27}} = \sqrt[2]{3.7037+}$ $= 192 +$ ou $193 -$ dans la troisiéme puissance.

3°. Par celle-ci $\sqrt[3]{\frac{10000.0000.}{256}} = \sqrt[3]{3.906.250000}$ $= 1574 +$, ou $1575 -$ dans la quatriéme puissance.

4°. Par celle-ci $\sqrt[4]{\frac{100000}{3125}} = 13374 +, 13375. -$ dans la cinquiéme puissance.

Enfin, on la trouvera généralement par cette formule universelle



$$\sqrt[p-1]{\frac{m^{2p}}{p^{p}}}$$, ou par celle-ci $$\sqrt[p-1]{\frac{m^{pp-1p}}{p^{p}}}$$ ou $$\frac{10^{p}}{\sqrt[p-1]{p}}$$

PROBLE'ME GE'NE'RAL.

Tirer la racine d'une puissance quelconque par une Méthode plus courte que la Méthode ordinaire.

1°. Je divise les chifres de la puissance proposée en tranches proportionelles, comme il est expliqué ci-dessus.

2°. Je tire la racine approchée de la premiére tranche seulement, par la Méthode des formules rationelles expliquées dans la premiére section de ce livre.

3°. J'ajoute au numérateur de la fraction trouvée autant de zéros que la tranche suivante doit contenir de chifres dans la racine, c'est-à-dire, autant que $p - 1$ contient d'unitez, je divise ce numérateur par le dénominateur; la division simple donnera tout d'un coup tous les chifres de la seconde tranche en entiers.

4°. Je tire la racine approchée des deux premiéres tranches, j'ajoute au numérateur de la fraction trouvée par cette opération, autant de zéros que la troisiéme tranche proportionelle doit contenir de chifres dans la racine, c'est-à-dire autant que $pp - p$ contient d'unitez, ensuite je divise ce numérateur par le dénominateur & la division, donne tout d'un coup tous les chifres de la troisiéme tranche, & ainsi de suite jusqu'au dernier.

Les plus grands nombres qui tombent dans la pratique, n'ont que trois ou quatre tranches dans le quarré & dans la troisiéme puissance, & tout au plus deux tranches dans les puissances plus élevées.

Je suppose que la premiére tranche est complette, & que l'approximation soit telle que l'erreur, soit de moins d'une unité près dans la puissance; or il est toujours facile de donner cette forme à la puissance proposée, soit par une simple multiplication, soit en prenant un chifre de plus pour racine de la premiére tranche, lorsqu'on ne veut point faire de multiplication; soit enfin en ajoutant ou en retranchant quelqu'unité dans le dernier chifre, selon que l'approximation est en dessous ou en dessus.

Démonstration de cette Méthode.

Puisque la racine trouvée par les formules d'approximation contenuës dans la premiére section, différe par construction de moins d'une unité dans la puissance, d'avec la premiére tranche proportionelle, & que selon l'hypothése la puissance semblable d'un nombre prochainement

chainement plus grand ou plus petit, différe de plus d'une unité dans cette même tranche proportionelle, il suit de-là évidemment que la valeur trouvée par la Méthode sera moïenne entre la racine exacte & celle qui est plus grande ou plus petite d'une unité, donc cette valeur différera de moins d'une unité, ce qu'il falloit démontrer.

Premier Exemple pour la racine quarrée.

Soit un nombre de seize chifres, dont on demande la racine quarrée, 1°. Je divise ce nombre en quatre tranches proportionelles, comme il suit.

1re.	2de.	3e.	4e. tranche.
31. . .	62. . .	2777. . .	00000000.

2°. Je me sers de la formule d'approximation $a + \frac{b}{2a}$ qui donne la racine trop grande, ou bien de celle-ci $a - \frac{b}{2a}$ qui donne la racine trop petite, ce qui sert à me régler pour les derniers chifres du quotient.

3°. Je tire la racine approchée de la premiére tranche $31 = aa + b$, c'est $5 = a$, or $5 \times 5 = 25 = aa$, & $31 - 25$; reste $6 = b$, j'ajoute zéro à 6, c'est $60 = b$.

Je double $5 = a$, c'est $10 = 2a$ par lequel je divise 60, c'est $\frac{b}{2a}$ ou $\frac{60}{10}$, le quotient est 6 qui est la seconde partie de la racine renfermée dans la seconde tranche, ensuite je quarre 6, c'est $6 \times 6 = 36 = aa$ que j'ôte de la seconde tranche 62, reste $26 = b$, jusqu'ici ma Méthode s'accorde avec l'ancienne: Voici ce qu'elle a de particulier.

5°. A ce reste 26 j'ajoute deux zéros, c'est 2600 que je divise par $112 = 2a = 56 \times 2$, le quotient est 23

qui est la troisiéme partie de la racine, & il reste 24 que j'ajoute aux deux premiers chifres de la troisiéme tranche 27, ce qui donne pour cette troisiéme tranche 51 77, dont j'ôte le quarré de 23 qui est 529, & il reste 4648 $=b$, auquel j'ajoute quatre zéros, ce qui donne 4648. 00. 00. $=b$.

6°. Je divise 4648 00 00. $=b$ par 11246 $=2a$, $=2\times5623$, & je prends le quotient 4132 pour la 4me. partie de la racine renfermée dans la 4me. tranche, & la racine cherchée est 5. 6. 23. 4132. (1re. 2e. 3e. 4e.)

J'ai extrait par cette Méthode en une après dîner la racine quarrée d'un nombre de 64 chifres, & j'ai trouvé les trente-deux derniers par neuf additions simples, & 32 soustractions simples sans aucune extraction ni division, c'est un paradoxe, mais il est aisé d'en démontrer la vérité, j'en effaçai d'abord d'un coup de plume les 32 derniéres figures comme inutiles, ce qui abrége beaucoup, & je divisai les trente-deux chifres restans en six tranches proportionelles.

Usage de cet Exemple. Il sert à trouver le Logarithme du nombre 9, le Logarithme de l'unité étant o. oooo. oooo. & celui de 10, étant 10. oooo. oooo. il faut trouver vingt-six nombres moïens géométriques, dont les deux premiers extrêmes sont 1. oooo. ooo. & 10. oooo. ooo. & le premier moïen est 3. 1622. 777 qui est trop petit; c'est pourquoi on continue l'opération dans la Méthode ordinaire, & on multiplie ce premier terme 3. 1622. 777. par 10. oooo. ooo. & du produit 3. 1622. 777. oooo. oooo. il faut tirer la racine quarrée, & c'est ce que nous venons de faire.

Second Exemple pour le cube.

Soit le cube proposé 819. 985256.

1°. Je le divise en deux tranches, la premiére a trois

chifres, & la ſeconde ſix chifres.

2°. Je cherche la racine de la premiére tranche par la formule d'approximation $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, or la racine cubique de 819 eſt $9 = a$, dont le cube eſt $729 = a^3$, qui ôté de 819, il reſte $90 = b$.

3°. Je multiplie 90 par 9, a par b, ce qui donne $ab = 810$, auquel j'ajoute deux zéros, c'eſt 810. 00, $= ab$ que je diviſe par $3a^3 + b = 2277$. le quotient 35 eſt la ſeconde partie de la racine contenuë dans la ſeconde tranche, donc la racine approchée de ce cube imparfait eſt 9. 35.

Il eſt facile de le vérifier par la multiplication en élevant au cube cette racine 935, car ſon cube eſt 817. 400. 375, qui étant ôté du cube propoſé, il reſte 2584, 881.

Remarque. On doit toujours faire la preuve d'une tranche avant de paſſer à celle qui ſuit, mais on peut négliger la preuve dans la derniére tranche, parce qu'elle eſt inutile dans les puiſſances imparfaites ou irrationelles qui ſont les plus fréquentes, & dans leſquelles il ſuffit d'avoir la racine à moins de l'unité près, & c'eſt ce que l'on trouve toujours par les premiéres tranches en ſe ſervant de la premiére formule d'approximation.

Troiſiéme Exemple. Soit le cube propoſé 696. 536483. 31864. 003507. 3641037. qui a 27 chifres, & dont la racine doit avoir neuf chifres.

1°. Je le diviſe en trois tranches proportionelles, la premiére contient les trois premiers chifres de gauche à droite, la ſeconde contient ſix chifres, & la troiſiéme contient dix-huit chifres, leſquels je néglige entiérement comme inutiles dans ma Méthode.

2°. Je tire la racine cubique approchée des deux premiéres tranches comme dans l'exemple précédent ſuivant la formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, ce qui donne pour les deux

premiéres parties de la racine les trois chifres 8. 86.

$+\frac{912.\ 603.\ 922.}{20.\ 87.\ 549.\ 395.}$

3°. Pour trouver les six derniers chifres de cette racine approchée, j'ajoute six zéros au numérateur de la fraction restante 912. 603. 922. 000. 000. & je le divise par son dénominateur 2087. 549. 395, je trouve le quotient 437. 166 pour la troisiéme partie de la racine que j'écris après les trois premiers chifres trouvez 8. 86, ce qui donne pour la racine cubique du nombre proposé 8. 86. 437. 166. en nombres entiers.

J'ai pris ce nombre au hazard, il est un des moins favorables qu'on puisse choisir sur un pareil nombre de chifres, on peut comparer dans cet exemple ma Méthode avec la méthode ordinaire, & l'expérience fera juger quelle est celle qui mérite la préférence; je pourrois encore apporter pour exemple l'extraction de la racine cubique d'un nombre exprimé par 81 chifres, où je néglige entiérement la quatriéme tranche qui contient les 54 derniers chifres, où l'avantage de ma Méthode paroîtra encore plus grand; mais l'exemple précédent suffit pour juger de ses avantages.

SECTION TROISIÉME.

Résolution des équations irrationelles par les formules rationelles

LEs équations rationelles de sont qu'une partie infiniment petite dans la série infinie des équations possibles dans chaque cas particulier, car entre deux homogénes quelconques de deux équations consécutives, il y a toujours en nombres entiers autant d'homogénes possibles qu'il y a d'unitez dans la différence de ces deux homo-

génes. Par exemple, entre les deux homogénes consécutifs 204 & 309, dont le premier est l'homogéne de $z^2 = 100z + 204$, qui est une équation du second degré, dont la racine positive est $+ 102$, & la racine négative $- 2$, & le second qui est l'homogéne de l'équation prochaine $z^2 = 100z + 309$, dont les racines sont $+ 103$, & $- 3$, il y a 105 homogénes en nombres entiers compris entre les deux, parce que c'est la différence (sans parler des fractions) de 204 à 309; or ces 105 homogénes ont leurs racines plus grandes que $+ 102$ & $- 2$, mais moindres que $+ 103$, & $- 3$, lesquelles racines ne différent que de l'unité, par conséquent les deux racines de ces 105 homogénes sont irrationelles, c'est-à-dire, qu'elles ne peuvent s'exprimer exactement par aucun nombre, soit entier soit rompu ou mixte, il s'agit d'en approcher par excès & par défaut à l'infini, il est évident qu'on peut trouver une série infinie de nombres qui donnent cette racine approchée de plus en plus par défaut, & une autre série de nombres qui donnent cette racine approchée de plus en plus par excès, de telle sorte que le dernier terme dans l'une & l'autre de ces séries, qui est l'infinitiéme terme auquel il est impossible d'arriver, donneroit exactement cette racine, s'il étoit possible de le trouver, parce qu'alors le défaut ou l'excès seroit nul.

Ainsi comme il est impossible à l'esprit humain de trouver l'infinitiéme terme de ces séries, ce qu'on peut faire de mieux est d'en approcher continuellement par une loi constante & égale fondée en démonstration, & de pousser cette approximation aussi loin qu'on voudra afin que l'erreur soit insensible; c'est tout ce que l'on peut désirer sur cette matiére, mais aussi on ne doit pas se contenter de moins.

Résolution des équations irrationelles pures & simples dans le second degré.

Les équations irrationelles pures & simples, sont celles qui n'ont que deux termes, & dont l'homogéne est un quarré irrationel, ou le produit de deux racines irrationelles, comme ces équations sont assez semblables aux secondes puissances irrationelles ou imparfaites du même degré, leur résolution se fait de la même maniére & par les mêmes formules expliquées ci-dessus; ce qui est général pour toutes les équations irrationelles pures & simples de tous les degrez supérieurs à l'infini.

1er. *Exemple pour la formule d'approximation par défaut.*

Soit une équation irrationelle pure & simple du second degré $z^2 = 200$.

1°. Par la premiére formule d'approximation par défaut, j'ai $z^2 = a^2 + b = 196 + 4 = 200$.

2°. Je trouve que $196 = aa$ est le quarré moindre contenu dans 200, sa premiére racine est $a = 14$, & ôtant 196 de 200, le reste est $4 = b$.

3°. Je substituë $14 = a$, & $4 = b$, à la place de ces lettres dans la premiére formule d'approximation $a + \frac{b}{2a}$, ce qui donne $14 + \frac{4}{28}$, qui se réduit à $14 + \frac{1}{7}$ en divisant les deux termes de la fraction par leur commun diviseur 4. Voilà la racine approchée.

4°. Pour avoir une troisiéme racine plus approchée, je me sers de la seconde formule d'approximation $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ dans la quelle je substituë en nombres les valeurs des lettres, j'ai une troisiéme racine plus approchée $14 + \frac{4 \times 196 \times 4 + 16}{8 \times 2744 + 4 \times 56} = 14 + \frac{3136 + 16}{21952 + 224}$

$= 14 + \frac{3152}{22176} = 14 + \frac{197}{1386} = z$, en divisant les deux termes de la fraction par leur commun diviseur 16. comme cette approximation est immense, & que l'erreur est moindre qu'aucune grandeur sensible, il est inutile de la pousser plus loin, il suffit de quarrer cette valeur de z, & de substituer cette valeur dans l'équation proposée, pour la comparer avec le second membre 200.

5°. Pour quarrer cette valeur de $z, = 14 + \frac{197}{1386}$,

$$\begin{array}{l} 14 + \frac{197}{1386} \\ \times\ 14 + \frac{197}{1386} \\ \hline 196 + \frac{38809}{1914996} \\ \quad + \frac{5516}{1386}\left(4 - \frac{28}{44}\right) \\ \hline 200 - \frac{28}{44} + \frac{38809}{1914996} \end{array}$$

ou bien, il faut ajouter en une somme l'entier avec la fraction, ainsi je réduis d'abord l'entier 14 en fraction qui ait le même dénominateur, en multiplant 14 par 1386, ce qui donne au produit 19 404, auquel j'ajoute le numérateur 197, la somme donne pour le numérateur 19601.

Ainsi j'ai la fraction $\frac{19601}{1386}$ à élever à la seconde puissance.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 1386 \\ \hline 5544 \\ 1386 \\ \hline 19404 \\ +\ 197 \\ \hline 19601 \end{array}$$

5°. Je quarre la valeur trouvée de z, & je la substitué dans l'équation proposée, $z^2 = 200$.

$$14 + \frac{197}{1386}$$
$$\times 14 + \frac{197}{1386}$$
$$196 + \frac{2758}{1386} + \frac{38809}{1914996}$$
$$+ \frac{2758}{1386}$$
$$196 + \frac{5516}{1386} + \frac{38809}{1914996}$$

ou $196 + 4 = 200$, je néglige la derniére fraction qui est insensible, ainsi j'ai $z^2 = 200$. à très-peu de chose près.

Autrement. Pour élever à la seconde puissance la racine approchée $14 + \frac{197}{1386}$ que nous venons de trouver par l'opération précédente sur la premiére formule d'approximation par défaut, je réduis l'entier en fraction, en le multipliant par ce dénominateur; or 14×1386 donne 19404, auquel j'ajoute le numérateur 196, ce qui donne la fraction $\frac{19601}{1386}$ dont le quarré $= \frac{38\,41\,99\,20\,1}{19\,20\,996}$, ensuite je divise le quarré du numérateur par le quarré du dénominateur.

Diviseur	*Dividende*	*Quotient*
19. 20. 99 6	38. 41. 99. 20. 1.	$200 + \frac{1}{19.20.996}$

20 . . . . 38. 41. 99. 20.
0 . . . . reste 0 : 1

Le Quotient est $200 + \frac{1}{1920996}$

Ainsi

Ainsi substituant ce quotient qui est la valeur du quarré zz dans l'équation proposée $zz = 200$.

La fraction insensible . . . . $+ \frac{1}{1920996}$

est la différence des deux membres de l'équation, donc la racine trouvée $14\frac{597}{1386}$ est très-approchée.

Second Exemple. Sur la formule d'approximation par excès $aa - b$.

Soit encore $z^2 = 200. = aa - b$.

1°. Pour me servir de la formule d'approximation par excés $aa - b$, je prends le quarré prochain $225 = aa$ plus grand que l'homogéne 200, sa racine est $15 = a$, or $225 = 200$ reste $- 25 = b$, donc la premiére racine approchée est $15 = a$.

2°. Pour avoir une seconde racine plus approchée, je substitue les valeurs trouvées $15 = a$, & $25 = b$ dans la premiére formule d'approximation par excès $a - \frac{b}{2a}$, ce qui donne $15 - \frac{25}{30}$, c'est la seconde racine approchée; je l'éleve à la seconde puissance pour la comparer à l'équation proposée, en la substituant à la place de z^2.

Multiplication.

$$\begin{array}{l} 15 - \frac{25}{30} \\ \times\ 15 - \frac{25}{30} \\ \hline 225 - \frac{375}{30} + \frac{625}{900} \\ \quad\ - \frac{375}{30} \\ \hline 225 - \frac{750}{30} + \frac{625}{900} \end{array}$$

ou $225 - 25 + \frac{2}{3} = 200 + \frac{2}{3}$.

Substitution.

$zz = 200 = 200 + \frac{5}{2}$, or la différence des deux membres de cette équation est d'environ $\frac{2}{3}$.

3°. Pour avoir une troisiéme racine encore plus approchée, je me sers de la seconde formule d'approximation $a - \frac{4aab - bb}{8a^3 - 4ab}$, dans laquelle je substitue à la place des lettres leurs valeurs, j'ai $15 - \frac{4 \times 225 \times 25 - 625}{8 \times 3375 - 4 \times 15 \times 25}$, qui donne $15 - \frac{900 \times 25 - 625}{27135 - 60 \times 25} = 15 - \frac{22500 - 625}{27135 - 1500}$ qui se réduit à $15 - \frac{21875}{25635} = 15 - \frac{875}{1025} = z$, c'est la troisiéme racine approchée.

Présentement j'éléve au quarré cette valeur, & je substituë son quarré dans l'équation $z^2 = 200$ pour connoître la différence.

{ 1025 { 26250 { 25 $\frac{625}{1025}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ *Division.*

```
2 . . 2050
       575:0
5 . . . 512 5
        62 5
```

{ 76562 { 1050665

```
1 . . . . 7756
0 . . . . 2950:6:5
```

$15 - \frac{875}{1025}$ *Multiplication.*

$\times\ 15 - \frac{875}{1025}$

$$225 - \frac{13125}{1025} +$$
$$- \frac{13125}{1025}$$

$$225 - \frac{26250}{1025} + \frac{765625}{1050665}$$

ou $225 - 25\frac{1}{2} = 200 - \frac{1}{2}$, l'erreur par excés eſt de $\frac{1}{2}$, & le quarré du numérateur & du dénominateur eſt d'environ moins d'une unité, ainſi l'erreur n'eſt pas dans le quarré de $\frac{1}{2}$, par conſéquent il eſt inſenſible dans la racine.

On peut trouver une quatriéme racine encore plus approchée en continuant ſur une troiſiéme formule d'approximation, & ainſi de ſuite à l'infini.

Réſolution des Equations irrationelles du ſecond degré, compoſées, ou affectées de termes moiens.

Je réduis toutes les équations compoſées, ou affectées de termes moïens aux trois formules ſuivantes,

1°. . . $z^2 + mz - h'' = 0$
2°. . . $z^2 - mz - h'' = 0$
3°. . . $z^2 - mz + h'' = 0$

dans leſquelles l'inconnuë eſt z.

m eſt le nombre qui multiplie l'inconnuë linéaire, qui ſe nomme improprement le cœfficient.

h'' eſt l'homogéne, ou le dernier terme de l'équation, ſon expoſant en chifre romain marque ſes deux dimenſions & non pas une ſeconde puiſſance.

J'employe deux Méthodes pour réſoudre ces équations.

La premiére conſiſte à transformer d'abord l'équation propoſée dans une équation pure & ſimple $y^2 = h''$, en faiſant évanoüir le ſecond terme, pour la réſoudre comme les autres équations pures & ſimples par les formules

générales pour trouver la valeur de y, que l'on ſubſtituë enſuite dans la valeur de z, ce qui donne ſa valeur deſirée.

La ſeconde Méthode conſiſte dans des formules particuliéres pour opérer directement ſur l'équation propoſée.

PREMIE'RE ME'THODE.

Réſoudre par transformation & ſubſtitution les Equations irrationnelles du ſecond degré qui ſont compoſées, ou affectées de termes moïens.

Premier Exemple. Dans la premiére formule du ſecond degré $z^2 + mz - h'' = 0$. Soit l'équation propoſée $z^2 + 100z - 300 = 0$.

Préparation. D'abord pour faire évanoüir le ſecond terme, je ſuppoſe $z = y - \frac{100}{1}$ & $zz = y^2 - \frac{200y}{2} + \frac{100.00}{4}$, & ſubſtituant ces valeurs à la place de z & de zz dans l'équation propoſée, je trouve une équation pure & ſimple qui n'a plus de ſecond terme comme il ſuit.

Subſtitution.

$$z^2 = y^2 - \frac{200y}{2} + \frac{100.00}{4}$$
$$+ 100z = \ldots + 100y - \frac{100}{2}$$
$$- 300 = \ldots\ldots - 300$$
$$= 0 \ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\text{Transformée } y^2 \quad 0y - \frac{100.00}{4} = 0$$
$$- 300$$

ce qui donne $y^2 = 25.00 + 300$, ou $y^2 = 28.00$. C'eſt l'équation tranformée où il n'y a point de ſecond terme. L'homogéne 28.00 eſt un quarré irrationel com-

pris entre les deux quarrez prochains, ſçavoir, le moindre 2704 dont la racine eſt 52, & le plus grand 2809 dont la racine eſt 53.

Donc la racine irrationelle de 2800 eſt plus grande que 52, mais plus petite que 53. Si je prends la moindre racine 52 qui eſt trop petite, je me ſervirai de la formule d'approximation par défaut $\overline{aa + b}$; mais ſi je prends la racine 53 qui eſt trop grande, je me ſervirai de la formule d'approximation par excès $\overline{aa - b}$.

Premiére opération par la formule d'approximation par défaut $\overline{aa + b}$.

1°. J'ai ſuivant cette formule $y^2 = 28.00 = aa + b = 27.04 + 96$. Donc $b = 96$ & $a = 52$. C'eſt la racine par défaut approchée à moins d'une unité près.

2°. Pour trouver une ſeconde racine plus approchée, je me ſers de la première formule d'approximation par défaut $a + \frac{b}{2a}$, & ſubſtituant à la place des lettres leurs valeurs trouvées, j'ai $52 + \frac{96}{104}$ qui ſe réduit à $52. + \frac{12}{13}$ (en diviſant les termes de la fraction par leur diviſeur commun 8) Voilà la ſeconde racine plus approchée.

Je l'éleve à la ſeconde puiſſance pour la comparer par ſubſtitution dans l'équation propoſée.

$$z = 52 + \frac{12}{13}$$
$$\times z = \times 52 + \frac{12}{13}$$
$$2704 + \frac{624}{13} + \frac{144}{169}$$
$$+ \frac{624}{13}$$
$$zz = 2704 + \frac{1248}{13} + \frac{144}{169} = 2704 + 96 + \frac{144}{169} = 2800 + \frac{144}{169}$$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 1258 \\ \hline 9\ldots & 117 \\ & 78 \\ & 78 \\ & 00 \end{array}$$

Donc la différence entre les deux membres de l'égalité

est $+ \frac{144}{169}$ dans le quarré, qui est leur différence par excès. Donc l'erreur dans la racine est de moins de $\frac{1}{144}$.

3°. Pour avoir une troisiéme racine plus approchée, je substituë les valeurs des lettres dans la seconde formule d'approximation par défaut $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ ce qui donne $52 + \frac{4 \times 2704 \times 96 + 96 \times 96}{8 \times 140608 + 4 \times 52 \times 96}$ qui donne $52 + \frac{10.38.336 + 9216}{11.24.64 + 4992} = 52 + \frac{10.47.552.}{11.29.856.}$ ou $52 + \frac{4092}{4413}$, qui donne enfin $52 + \frac{256}{276}$. C'est la troisiéme racine approchée ou troisiéme valeur de y que j'éleve au quarré pour la substituer dans l'équation transformée comme il suit.

$\{ 276 \{ 26.624 \{ 96 \frac{128}{276}$ *Division.*

```
9.....2484
       178:4
6.....165 6
       ─────
       1 2 8
```

Multiplication

$$y = 52 + \frac{256}{276}$$

$$\times y = \times 52 + \frac{256}{276}$$

$$yy = 2704 + \frac{13312}{276} + \frac{65536}{76176}$$

$$+ \frac{13312}{276}$$

$$yy = 2704 + \frac{26624}{276} + \frac{65536}{76176}$$

Donc $y^2 = 2704 + 96 = 28.00.$ Mais il y a le qnarré de la fraction qui est l'excédent, $\frac{65536}{76176}$ qui est la

différence des deux membres de l'équation, que l'on peut diminuer à l'infini en continuant les approximations.

4°. Puisque la troisiéme valeur de y est $52 + \frac{256}{276}$, je substituë cete valeur dans l'égalité $z = y - \frac{100}{2}$ pour trouver la valeur de z, & la substitution me donne $z = 52 + \frac{256}{276} - \frac{100}{2}$ ce qui donne $z = -50 + 52 + \frac{256}{276} = 2 + \frac{256}{276}$ & substituant cette valeur & son quarré dans l'équation proposée $z^2 + 100z - 300 = 0$.

Substitution.

$$z = 2 + \frac{256}{276}$$
$$\times\ z = 2 + \frac{256}{276}$$

$$z^2 = 4 + \frac{1024}{276} + \frac{65536}{76176}$$
$$\text{ou } z = 4 + 3 + 1 = 8.$$
$$+ 100z = 2 + \frac{256}{276} \times 100 = 200 + 92. = 292.$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Donc } zz & = & +\ 8 \\ +\ 100z & = & +\ 292 \\ -\ 300 & = & -\ 300. \\ \hline = 0 & = & 0. \end{array}$$

Les deux membres de l'équation sont égaux, donc la racine est trouvée ; c'est la petite racine dans cette opération.

Seconde Opération. Suivant la formule d'approximation par excès $\overline{aa - b}$, 1°. je prends dans l'équation transformée $y^2 = \overline{28.\ 00}$, la racine $53 = a$ du quarré prochain plus grand, 28. 09 $= aa$; donc le reste $9 = b$, suivant la formule $\overline{aa - b}$. J'ai ainsi pour premiére racine approchée par excès $53 = a$.

2°. Pour avoir une seconde racine, je substituë les valeurs trouvées des lettres dans la premiére formule d'ap-

proximation $a - \frac{b}{2a}$, ce qui donne $53 - \frac{9}{106}$. C'eſt la ſeconde racine approchée, dont le quarré eſt 28. 09 — 9 + $\frac{81}{112.36}$ = 28. 00 — $\frac{1}{138}$ Donc l'erreur par excès eſt de $\frac{1}{138}$ dans le quarré, & par conſéquent bien moindre dans la racine.

3°. Pour avoir une troiſiéme racine encore plus approchée, je ſubſtituë encore la valeur des lettres dans la troiſiéme formule d'approximation par excès $a - \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, ce qui donne $y = 53 - \frac{4 \times 2809 \times 9 + \overline{9 \times 9}}{8 \times 148877 + \overline{4 \times 53 \times 9}}$ qui ſe réduit à $53 - \frac{101124 + 81}{1191016 + 1908} = 53 - \frac{10.1205}{1192924}$ qui ſe réduit enfin à $y = 53 - \frac{42}{4137}$ ou $53 - \frac{6}{691}$; c'eſt la troiſiéme racine approchée, que j'éleve au quarré pour le ſubſtituer dans l'équation transformée, c'eſt 28. 09 — $\frac{4452}{4137}$ + $\frac{1764}{17114769}$ qui donne 28. 09, ou 1 0 environ à cauſe de la deuxiéme fraction qui eſt poſitive; c'eſt donc 28. 09 — 9 +, ou 28. 09 — 10 —. Donc l'erreur dans le quarré de la racine eſt à moins de l'unité près, & on peut encore en approcher à l'infini.

4°. Subſtituant enſuite cette valeur de y dans l'égalité $z = y - \frac{100}{2}$, on trouvera $z = -50 + 53 - \frac{42}{4137}$ ou $z = 3 - \frac{42}{4137}$, ou $z = 3 - \frac{6}{691}$; & par la ſubſtitution la valeur de z, qui étant ſubſtituée avec ſon quarré dans l'équation propoſée $z^2 + 100z - 300 = 0$, on trouvera quelle eſt la différence entre les deux membres de l'équation.

$$zz = -100z + 300$$

$$9 - \frac{36}{691} + \frac{6}{8} = -300 - \frac{600}{691} + 300$$

ou enfin $9 + 300 - 9 = 300$. Les fractions étant

$z^2 + 100z$ évaluées donnent la différence qui n'eſt pas ſenſible.

Second

Second Exemple. Dans la ſeconde formule du ſecond dégré $z^2 - mz - b'' = 0$.

Soit l'équation dans la ſeconde formule du ſecond degré $z^2 - 100z - 300 = 0$.

Préparation. D'abord je fais évanoüir le ſecond terme en ſuppoſant $z = y + \frac{100}{2}$, & ſon quarré $zz = y^2 + 100y + \frac{100.00}{4}$, & ſubſtituant ces valeurs à la place de z & de zz, dans l'équation propoſée, je trouve l'équation transformée pure & ſimple ſans ſecond terme, comme il ſuit.

$$
\begin{array}{lllllll}
 & zz & = y^2 & + & 100y & + & \frac{100.00}{4} \\
- & 100z & = \ldots & - & 100y & - & \frac{100}{2} \\
- & 300 & = \ldots\ldots & & & - & 300 \\
= & 0 & \ldots\ldots\ldots & & & = & 0
\end{array}
$$

$$
\text{Transformée} \quad y^2 \quad 0y \quad - \frac{100.00.}{4} - 300 = 0
$$

qui donne $y^2 - 25.00 - 300 = 0$

ou $y^2 = 25.00 + 300 = 28.00$.

Voilà l'équation transformée qui n'a point de ſecond terme & dans laquelle il faut trouver la racine quarrée de 28.00 qui eſt compris entre les deux quarrez parfaits & rationels; ſçavoir, le moindre 2704 dont la racine eſt 52, & le plus grand prochain 2809 dont la racine eſt 53.

Premiére opération. Par la formule d'approximation par défaut $\underline{aa + b}$, 1°. j'ai ſuivant cette formule $y^2 = 28.00 = aa + b, = 2704 + 96$. Donc $b = 96$ $a = 52$; c'eſt la premiére racine approchée à moins d'une unité près.

2°. Pour trouver une ſeconde racine encore plus approchée, je me ſers de la premiére formule d'approximation

$a + \frac{b}{2a}$ dans laquelle je ſubſtituë les valeurs trouvées de a & b, ce qui donne $52 + \frac{96}{174}$ qui ſe réduit en diviſant les termes de la fraction par leur commun diviſeur 8, à $52 + \frac{12}{13}$. C'eſt la ſeconde racine approchée. Je l'éleve à la ſeconde puiſſance pour la ſubſtituer dans l'équation propoſée, & j'ai

$$\begin{array}{l} 52 + \frac{12}{13} \\ \times\, 52 + \frac{12}{13} \\ \hline 2704 + \frac{1248}{13} + \frac{144}{169} \text{ ou } 2704 + 96 + \frac{144}{169} = zz. \end{array}$$

Or $zz = 28.00$. Donc l'erreur par excès eſt de $\frac{144}{169}$ dans le quarré. Donc l'erreur dans la racine eſt de moins de $\frac{1}{144}$ par excès.

3°. Pour trouver une troiſiéme racine plus approchée, je me ſers de la ſeconde formule d'approximation $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ dans laquelle ſubſtituant à la place des lettres leurs valeurs, j'ai $52 + \frac{4 \times 2704 \times 96 + 96 \times 96}{8 \times 140608 + 4 \times 52 \times 96}$ qui donne $52 + \frac{10.38.336 + 9216}{11\,24\,64 + 4992} = 52 + \frac{1047552}{1129856}$ ou $52 + \frac{40.92}{4413} = 52 + \frac{256}{276}$ c'eſt la troiſiéme racine encore plus approchée, que j'éleve à la ſeconde puiſſance pour la comparer avec l'équation propoſée.

{ 276 { 26624 { 96 *Diviſion.*

9... 2484

178:4

6.... 165:6

reſte 12 8

$$52 + \frac{256}{276}$$ *Multiplication.*

$$\times\ 52 + \frac{256}{276}$$

$$2704 + \frac{13312}{276} + \frac{65536}{76176}$$

$$+ \frac{13312}{76176}$$

$$2704 + \frac{26624}{276} + \frac{65536}{76176}$$

ou $2704 + 96 - \frac{1}{10640} = zz = 2800 - \frac{1}{10640}$.

4°. Je remarque dans $52 + \frac{1047552}{1129859}$ que les deux termes de la fraction se peuvent réduire à $\frac{12}{13}$, car l'antécédent a pour diviseur exact 12, & le conséquent ou dénominateur se divise aussi exactement par 13, ainsi j'ai $y = 52 + \frac{12}{13}$.

D'abord je substituë cette valeur dans l'équation simple $z = y + \frac{100}{2}$, ce qui donne $z = 102 + \frac{12}{13}$, dont le quarré $zz = 104.04 + \frac{2448}{13} + \frac{144}{169}$, qui se réduit à $104.04 + 188 + \frac{144}{169}$, en divisant la seconde fraction par son dénominateur 13, ce qui me donne $105.92. + \frac{144}{169}$.

5°. Je substituë ces valeurs en nombres de z & de zz en leurs places dans l'équation proposée $zz = 100\,z + 300$, ce qui donne

$$zz = 100\,z + 300$$

$$105.92 + \frac{144}{169} = 102.92 + 300 = 105.92.$$

{ 13 { 2448 { 188 +

1	13
	11 : 4
8	10 4
	1 4 : 8
8	1 0 4

La différence des deux membres de cette équation est donc $+\frac{144}{169}$, c'est l'erreur dans le quarré, donc l'erreur dans la racine approchée est moindre que $\frac{1}{144}$ par excès.

Opération

$100z = 102 + \frac{12}{13}$

$\times 100$

$102.\ 00. + \frac{1200}{13} (= 92 +)$

$+ 92$

donc

$100z = 102.\ 92$

Division		Quotient
13	1200	92 +
9 . . .	117	
	3 : 0	
2	2 6	
	4	

$z = 102 + \frac{12}{13}$

$\times z = 102 + \frac{12}{13}$

$z^2 = 104.\ 04 + \frac{1224}{13} + \frac{144}{169}$

$+ \frac{1224}{13}$

$z^2 = 104.\ 04 + \frac{2448}{13} (188 +) + \frac{144}{169}$

donc $z^2 = 105.\ 92 + \frac{144}{169}$

On peut encore continuer l'approximation à l'infini, en se servant d'autres formules d'approximation tirées des principes que nous avons établi dans la premiére Section de ce livre.

Seconde opération. Suivant la formule d'approximation par excès $aa-b$, 1°. j'ai suivant cette formule dans l'équation proposée réduite $y^2 = 28.00$, $= aa - b = 2809$, où $b = -9$. donc $a = 53$. C'est la premiére racine approchée par excès à moins d'une unité près.

2°. Pour avoir une seconde racine plus approchée, je me sers de la premiére formule d'approximation par excès $a - \frac{b}{2a}$ & substituant à la place des lettres leurs valeurs, j'ai $53 - \frac{9}{106}$, c'est la seconde racine approchée.

Je l'éleve au quarré pour la comparer avec l'équation pure & simple réduite.

$$53 - \frac{9}{106}$$
$$\times\ 53 - \frac{9}{106}$$
$$28.09 - \frac{477}{106} + \frac{81}{11236}$$
$$- \frac{477}{106}$$
$$28.09 - \frac{954}{106} + \frac{81}{11236}$$

ou $2809 - 9 = 2800 + \frac{1}{138}$, voilà l'erreur par excès dans le quarré.

$$\left\{ 106 \left\{ 954 \left\{ 9 \right.\right.\right.$$

9 954

$$\left\{ 81 \left\{ 11236 \left\{ 138 \right.\right.\right.$$

1 . . . 81
31 : 3
3 . . . 24 3
70 : 6
8 . . . 94 8
4

3°. Préſentement pour avoir une troiſiéme racine encore plus approchée, que les deux précédentes, je me ſers de la ſeconde formule d'approximation par excès, $a - \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, dans laquelle je ſubſtituë les valeurs & des lettres a & b & de leur puiſſances trouvées dans les opérations précédentes, & la ſubſtitution de leurs valeurs donne $53 - \frac{4 \times 2809 \times 9 + 9 \times 9}{8 \times 148877 + 4 \times 53 \times 9}$,

qui donne $53 - \frac{101124 + 81}{1191016 + 1908} = 53 - \frac{101205}{1192924}$

$= 53 - \frac{506}{59646} = 53 - \frac{253}{24823} = 53 - \frac{42}{4137}$, c'eſt la troiſiéme racine approchée, que j'éléve au quarré pour la comparer par ſubſtitution dans l'équation $y^2 = 2800$.

$$53 - \frac{42}{4137}$$
$$\times\ 53 - \frac{42}{4137}$$

$$28.09 - \frac{2226}{4137} + \frac{1764}{17114769}$$
$$- \frac{2226}{4137}$$

$$28.09 - \frac{4452}{4137} + \frac{1764}{17114769}$$

ou $2809 - 10 +$ ou $2809 - 9 + = y$, c'eſt la troiſiéme racine approchée.

4°. Enſuite pour avoir la valeur de z & de z^2 dans l'équation je ſubſtituë d'abord cette valeur de y que je viens de trouver dans l'égalité ſimple $z = y - \frac{100}{2}$, ce qui donne $z = 50 + 53 - \frac{42}{4137}$, ou $z = 103 - \frac{6}{691}$,

Pareillement pour ſubſtituer cette valeur en la place de z^2 dans l'équation propoſée, j'éleve au quarré cette valeur trouvée, comme il ſuit.

$z = 103 - \frac{6}{691}$

$\times z = 103 - \frac{6}{691}$

$z^2 = 10609 - \frac{1236}{691} + \frac{36}{477481}$, ou $z = 10609 - 106 + \frac{6}{8}$ environ.

or $z^2 = 10609 - 108 + \frac{6}{8}$, donc $z^2 = 105.01. + \frac{6}{8}$.

$100z = 100 \times 103 - \frac{6}{691} = 102.00 - \frac{600}{691}\left(100\right) = 102.00$; or $102.00 + 300 = 10500$.

Substitution.

$zz = 100z + 300$

ou $105.01 + \frac{6}{8} = 102.00 + 300 = 105.00$.

La différence dans le quarré eſt $1 + \frac{6}{8}$ environ, mais on peut la diminuer en continuant l'approximation à l'infini.

Dans la troiſiéme formule des équations du ſecond degré.

$-z^2 + 100z - 300 = 0$, ou $z^2 = 100z - 300$, comme elle eſt preſque ſemblable à la premiére formule, cela me diſpenſe d'entrer dans le détail de l'opération qui eſt la même.

J'ai par les formules d'approximation par défaut

$- zz = 100z - 300$

$- 8 = 292 - 300$

Et par les formules d'approximation par excès je trouve

$- z^2 = 100z - 300$

$- 9 = 291 - 300$. avec une différence inſenſible qui réſulte de l'évaluation des fractions, que je néglige pour abréger.

Parallele de l'approximation ſur un même exemple dans les trois formules des équations du ſecond degré.

Dans le réſultat je néglige les fractions qui ſont inſenſibles.

1°. Dans la premiére formule $z^2 + 100z = 300.$
la premiére opération donne $8 + 292 = 300.$
la seconde opération donne $9 + 291 = 300.$

2°. Dans la seconde formule $z^2 = 100z + 300.$
la premiére opération donne $10592 = 10292 + 300$
la seconde opération donne $105.01 + \frac{6}{8} = 102.00 + 300.$

3°. Dans la troisiéme formule $-z^2 = 100z - 300.$
la premiére opération donne $-8 = 292 - 300$
la seconde opération donne $-9 = 291 - 300.$

Ces équations irrationelles sont contenuës dans l'interval des deux équations rationelles; sçavoir, l'équation $z^2 + 100z = 204$, dont les racines sont $z + 102 = 0$, & $z - 2 = 0$, & l'équation $z^2 + 100z = 309$ dont les racines sont $z + 103 = 0$, $z - 3 = 0$.

$$\begin{array}{rl} & z + 102 = 0 \\ \times & z - 2 = 0 \\ \hline & z^2 + 102z - 204 = 0 \\ & \quad - 2z \\ \hline & z^2 + 100z - 204 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & z + 103 = 0 \\ \times & z - 3 = 0 \\ \hline & z^2 + 103z - 309 = 0 \\ & \quad - 3z \\ \hline & z^2 + 100z - 309 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & z - 102 = 0 \\ \times & z + 2 = 0 \\ \hline & z^2 - 102z - 204 = 0 \\ & \quad + 2z \\ \hline & z^2 - 100z - 204 = 0 \end{array}$$

$z -$

$$\begin{array}{l} z - 103 = 0 \\ \times\, z + 3 = 0 \\ \hline zz - 103\, z - 309 = 0 \\ \quad + 3\, z \\ \hline z^2 - 100\, z - 309 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z + 102 = 0 \\ \times\, z + 2 = 0 \\ \hline z^2 + 102\, z \\ \quad + 2\, z + 204 = 0 \\ \hline z^2 + 104\, z + 204 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z + 103 = 0 \\ \times\, z + 3 \\ \hline z^2 + 103\, z + 309 = 0 \\ \quad + 3\, z \\ \hline z^2 + 106\, z + 309 = 0. \end{array}$$

Résolution des équations irrationelles du troisiéme degré pures & simples, par les formules d'approximation.

Dans les équations pures & simples du troisiéme degré, comme $z^3 = 100.000 = a^3 \pm b$, dont l'homogéne n'est pas un cube parfait, mais imparfait compris entre les deux cubes parfaits prochains; sçavoir, le moindre $97336 = a^3$ dont la racine est $46 = a$, qui étant ôtée de l'homogéne proposée $= a^3 + b$, il reste $+ b = 2664$; & entre le cube plus grand $103.823 = a^3$, dont la racine est $47 = a$, dont ayant ôté l'homogéne, la différence est $3.823 = - b$.

Donc la racine z du cube imparfait proposé est plus grande que 46, & plus petite que 47.

Soit $z^3 = 100$. donc $z > 4$, dont le cube $= 64$,

qui eſt trop petit de 36, mais ſoit $z = 5$, ſon cube $= 125$ qui excéde 100 de 25.

Premiére opération par la formule d'approximation par défaut pour la racine $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$.

1°. Suivant cette formule, ſoit $z^3 = 100 = a^3 + b = 64 + 36$.

La premiére racine cubique approchée par défaut eſt $4 = a$ & $b = 36$.

2°. Subſtituant ces valeurs dans la premiére formule d'approximation $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, j'ai $4 + \frac{4 \times 36}{3 \times 64 + 36}$ qui donne $4 + \frac{144}{192 + 36}$, ou $4 + \frac{144}{228}$, & réduiſant les deux termes de la fraction à leur plus ſimple expreſſion, j'ai $4 + \frac{12}{19}$, c'eſt la ſeconde racine plus approchée.

2°. J'éléve cette racine à la troiſiéme puiſſance pour la ſubſtituer dans l'équation propoſée, & la comparer comme il ſuit, d'abord je réduis l'entier avec la fraction $4 + \frac{12}{19}$ dans une ſeule fraction $\frac{88}{19}$, multipliant l'entier par le dénominateur 19, & ajoutant le numérateur 12 au produit.

Or le cube de $\frac{88}{19} = \frac{681472}{6859} = 99 + \frac{2431}{6859}$, lequel ne différe du cube propoſé 100, que de $\frac{2431}{6859}$, ce qui donne une racine très-approchée.

3°. Mais ſi l'on veut une troiſiéme racine encore plus approchée, il faut ſubſtituer les valeurs trouvées ci-deſſus en la place des lettres dans la ſeconde formule ſuivante, $\frac{2a^3b^3 + b^3}{3a^3 + b} = d$ qui donne $\frac{2 \times 64 \times 36^3 + 36^4}{3 \times 64 + 36} = d$, ce qui donne $\frac{128 \times 1296 + 46656}{192 + 1296} = \frac{165888 + 46656}{192 + 1296} = \frac{512544}{1488} = d = \frac{3}{2}$, enſuite ſuppoſer la ſeconde racine trouvée $4 + \frac{ab}{3a^3 + b} = c$, & ſubſtituer ces valeurs dans la

seconde formule d'approximation du troisiéme degré par défaut $c + \frac{cd}{3c^3 + d}$, qui peut aussi être exprimée d'une maniére abrégée par les seuls lettres a & b, en réduisant le numérateur & le dénominateur à leur plus simple expression.

On peut de même continuer l'approximation à l'infini, mais cette seconde est immense, ainsi elle suffit dans la pratique.

Seconde opération, suivant la formule d'approximation par excès $a - \frac{ab}{3a^3 + b}$.

1°. Soit $z^3 = 100 = a^3 - b = 125 - 25$, donc $a = 5$, c'est la premiére racine approchée par excès, & $-b = -25$

2°. Pour avoir une seconde racine plus approchée, je substitue les valeurs trouvées de a & b dans la premiére formule d'approximation par excès $a - \frac{ab}{3a^3 + b}$, c'est $5 - \frac{5 \times 25}{3 \times 125 + 25} = 5 - \frac{125}{375 + 25} = 5 - \frac{125}{400} = 5 - \frac{5}{14}$ qui se réduit enfin à $4 + \frac{9}{14}$, c'est la seconde racine plus approchée.

3°. Je cube cette racine $4 + \frac{9}{14}$, son cube est 100, $+ \frac{225}{2744}$, qui approche davantage par excès que l'approximation par défaut $4 + \frac{12}{19}$ trouvée dans la premiére opération.

Paralléle des deux approximations.

L'approximation par défaut $4 + \frac{12}{19}$ donne $\frac{88}{19}$, qui étant réduite en partie décimales par l'opération suivante donne au quotient $z = 4 : \frac{63158 -}{10000}$

L'approximation par excès $4 + \frac{9}{14}$ donne $\frac{65}{14}$ qui étant

réduite en parties décimales comme il suit, donne

$z = 4 : \frac{64285+}{10000}$

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
19	88 : 0000	4 : 63. 15. 8 —

```
4 . . 76
      12 : 0
6 . . 11 4
        6 : 0
3 . . . 5 7
          3 : 0
1 . . . . 1 9
          1 1 : 0
5 . . . . . 9 5
            1 5 : 0
8 — . . . . 1 5 2
```

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
14.	65 : 0000	4 : 64. 28. 5 +

```
4 . . 56
      9 : 0
6 . . 8 4
        6 : 0
4 . . . 5 6
          4 : 0
2 . . . . 2 8
          1 2 : 0
8 . . . . 1 1 2
              8 : 0
5 + . . . . . 7 0
```

Or cette derniére donne un quotient $z = 4 + \frac{64}{10}$, &c. qui est beaucoup plus approché par excès que le précédent $z = 4 + \frac{63}{10}$, &c. n'est approché par défaut.

Résolution des équations irrationelles du troisiéme degré affectées de termes moïens.

Régle générale. Par la différence des deux sommes alternatives.

Exemple. 1°. Soit $x^3 = 3.\ 00.\ 00x - 1.\ 000.\ 000$, j'ai par transposition $3.\ 00.\ 00\,x = 1.\ 000.\ 000. - x^3$. donc $5.\ 00.\ 00x > 1.000.\ 000$.

D'ailleurs $x > 33$, car $\overline{33}^3 = 35.937$. qui est moindre que 1. 000. 000. la différence est 96. 40. 63.

De même $x > 34$, car $\overline{34}^3 = 39.304$, mais $x < 35$, car $\overline{35}^3 = 42.\ 875$ qui surpasse $3.00.00x$.

C'est pourquoi suivant la régle générale expliquée dans la premiére Section de ce livre, je suppose $x = \frac{34}{2} + y$, c'est-à-dire, $= 17 + y$, je substitue cette valeur à la place de x, & son cube à la place de x^3 dans l'équation proposée, ce qui donne la transformée $y^3 + 51yy + 867y + 4913 = 3.00.00y - 49.\ 00.\ 00$.

Je fais deux équations des deux sommes alternatives, la premiére composée des termes impairs, la seconde composée des termes pairs, & j'ai

1°. $y^3 + 867y = 15000y - 245.\ 000$.

2°. $51yy + 4913 = 15000y - 245.000$.

dans lesquelles le second membre est la moitié du second membre de l'équation transformée $3.\ 00.00\ 00\,y - 49.\ 00.\ 00$.

3°. Pour trouver la valeur de y, je peux me servir de l'une ou l'autre de ces deux égalitez. Je me sers ici de la premiére, $y^3 + 867y = 15000\,y - 245\ 000$, j'ai par transposition $y^3 = 15000y - 867y - 245.\ 000$, qui donne par soustraction $y^3 - 14133y = 245.000$.

D'où je tire la valeur de $y = 17\,\frac{53.\ 35.\ 14.\ 3.}{73.\ 12.\ 27.}$ donc $x = 34\,\frac{5.\ 33.\ 51.\ 43.}{73.\ 12.\ 27.}$ suivant la Méthode des Problêmes plus que dé-

bbb iij

terminez, enſuite je ſubſtitue cette valeur & ſon cube dans l'équation propoſée, la ſubſtitution donne l'homogéne propoſé à moins d'une unité près.

Subſtitution.

$$300.\,00x = 1.\,041.\,888. + \frac{330.2352}{731.2271}$$

$$-x^3 = -41.\,888. + \frac{223.\,0295}{731.2252}$$

$$= \ldots\ldots 1.\,000.\,000$$

Aulieu qu'en ſuppoſant

$x = 34$, je trouve	Et $x = 35$
$3.00.00x = 1.020.000.$	$3.00.00x = 1.050.000.$
$-x^3 = -39.304$	$-x^3 = -42.875$
La différence eſt $-19\,304$ par défaut.	La difference eſt $+07.125$. par excès.

Remarque premiére. Il eſt facile de réſoudre toutes les équations du troiſiéme degré & des autres plus élevées, lorſqu'elles ſont affectées de termes moïens en les tranſformant d'abord dans des équations pures & ſimples, $z^3 = a^3 \pm b$ pour faire évanoüir le ſecond terme, & ſubſtituant enſuite la valeur de la nouvelle inconnuë & de ſes puiſſances dans l'équation propoſée, pourvû qu'elles ne renferment point d'imaginaires. Mais lorſqu'il y a des imaginaires, on ſe ſervira de la Remarque troiſiéme.

Remarque ſeconde. Dans l'Exemple précedent on peut tirer de l'égalité de la ſeconde ſomme alternative $51yy + 4913 = 3.0000y - 49.00.00$. Une valeur irrationnelle de y du ſecond degré, qui pourra être exprimée par le cercle & la ligne droite, dont on peut tirer des conſtructions très-approchées & commodes pour la pratique, pour la triſection de l'angle, la duplication du cube, par une Méthode très-générale.

Remarque troiſiéme. Dans les Equations fort élevées &

affectées de termes moïens ; il est toujours plus commode de se servir de la formule générale, que des formules particulieres. Cependant nous mettrons ici quelques formules particuliéres qui se tirent facilement de la formule générale ci-dessus.

Pour l'équation $z^3 = pz - q$, la formule irrationelle pour la racine est $z = \frac{1}{2} a + \frac{p}{6a}$ $- \sqrt{\frac{pp}{36a} - \frac{4q + a^3 - 2pa}{12a}}$, ou bien $z = \frac{1}{2} a$ $+ \frac{p - \sqrt{pp - 3ad.}}{6a}$

Mais la formule rationelle de la racine est,

$z = \frac{1}{2} a + \frac{5a^3 p + 2pq - ap^2 - 9a^2 q}{12a^4 + 2pp - 6a^2 p - 6aq}$.

Cette formule est générale & s'étend même au cas irréductible, & renferme les équations qui ont des racines réelles & celles qui ont des racines imaginaires.

Pour l'équation $z^3 = pp z + q$, dans le cas irréductible, la premiére racine est $z = \frac{2}{3} p + \sqrt{\frac{1}{9} pp + \frac{q^3}{3p}}$. qui approche par excès à $\frac{1}{1000}$ ou environ dans les cas les moins favorables.

La seconde racine est $z = \frac{2}{3} p + \sqrt{\frac{1}{9} pp + \frac{q^3 - y^3}{3p}}$ qui approche à $\frac{1}{1.00.00}$, ou environ par défaut, & on peut continuer de même pour en approcher à l'infini.

Exemple. Soit $z^3 = 7569 z + 240903$, ou p racine approchée $= 87$, on trouve $z = 58 + \sqrt{1764} = 100$, qui est un peu trop grande ; mais c'est le nombre entier qui en approche le plus, ce qui suffit pour la pratique.

Mais si on veut en approcher indéfiniment plus, on trouve par la seconde formule d'approximation $z = 58$ $+ \sqrt{1755 \frac{158}{261}}$, de telle sorte que si on se sert de ces der-

niéres formules pour avoir les racines approchées en nombres entiers, & des formules d'approximation précédentes pour approcher en fraction, il n'y a point d'équation qu'on ne puisse résoudre avec toute la précision possible.

Formules générales pour le troisiéme degré.

Soit l'égalité ou l'équation $z^3 = a^3 \pm b$, la formule générale rationelle de la premiére racine est $a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}$.

Formules générales pour le quatriéme degré.

Soit l'équation $z^4 = a^4 + b$, & soit $8a^4 + 3b = c$, soit aussi $c + 3b = d$, on trouvera pour la formule rationelle de la premiére racine $z = a + \frac{abc}{4a^4 d + 2bb}$.

Formules générales pour le cinquiéme degré.

Soit l'équation $z^5 = a^5 + b$, & soit $5a^5 = c$, on trouvera pour la formule rationelle de la premiére racine $z = a + \frac{abcc + 4abbc + 2ab^3}{c^3 + 6bcc + 8bb + b^3}$, & pour la racine irrationelle $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}} - \frac{1}{2}aa}$.

Remarque quatriéme. Par l'égalité de la seconde somme alternative, on pourra réduire toutes les égalitez pures & simples du septiéme degré au troisiéme, & celles du onziéme au cinquiéme, &c.

Remarque cinquiéme. Les formules du troisiéme degré sont plus composées que celles du second, & celles du quatriéme degré plus composées que celles du troisiéme, & ainsi de suite, car il est impossible que cela soit autrement; mais aussi elles approchent toujours davantage à mesure

mesure qu'elles sont plus élevées, par le premier corollaire du Théoréme fondamental.

Remarque sixiéme. Il est évident que dès qu'une racine est exprimée universellement par une formule d'un degré inférieur à l'exposant du degré de son équation, & dont les exposans sont des nombres premiers entr'eux; on peut toujours exprimer cette même racine d'une maniére approchée par une égalité du premier degré, comme dans l'exemple précédent, l'équation du 3me. degré se réduit à une formule du second degré, ou composée du second degré; c'est pourquoi elle pourra toujours être réduite, à une formule universelle du premier degré moins approchée; mais les puissances de *p* & *q*, montent si haut qu'elle n'est pas praticable. Ainsi cette vérité qui réduiroit les égalitez aux premier degré & à la simple division, n'est belle que dans la théorie, & ne peut s'étendre universellement à la pratique, comme on pourra s'en convaincre par l'expérience.

COROLLAIRE GE'NE'RAL.

Pour continuer à l'infini l'approximation des Racines irrationelles des Equations & des puissances imparfaites de tous les degrez.

En général. Dans toute équation d'un degré quelconque qui a des racines irrationelles; après avoir trouvé deux valeurs approchées en nombres entiers pour chacune des racines, l'une par défaut & l'autre par excès; on pourra transformer cette racine irrationelle en quatre séries infinies primitives & fondamentales fondées sur deux formules exemplaires tirées, l'une de la racine approchée par excès & l'autre par défaut; chacune de ces séries contient la valeur approchée de la racine irrationelle cherchée; mais la meilleure de ces quatre séries donne toujours une approximation plus prompte & plus

grande. Comme ces féries demandent un grand détail, j'en fais le sujet de la Section suivante. On y trouvera le moyen de transformer en séries rationelles infinies les racines.

SECTION QUATRIE'ME.

Seconde Méthode nouvelle.

Pour résoudre les Equations irrationelles & les puissances imparfaites de tous les degrez à l'infini, par des séries rationnelles infinies, les plus promtes & les plus convergentes qui soit possible.

Ou nouveau calcul différentiel & intégral réduit à l'expression sensible des nombres naturels.

L'Usage de cette Méthode s'étend dans toute l'Analyse générale, & dans tout ce qui regarde les lignes courbes, puisqu'elle renferme tous les problêmes où l'inconnuë a des valeurs irrationelles qui ne peuvent s'exprimer exactement en nombres, & sur toutes les équations & les puissances dont les racines sont irrationelles; ce qui comprend les équations affectées de termes moyens, comme celles qui sont pures & simples, car on peut toujours réduire ou transformer les équations affectées à des équations pures & simples en faisant évanoüir le second terme par les Méthodes connuës, en supposant l'inconnuë $x = y \pm \frac{a}{p}$, où je suppose $a =$ au cœfficient du second terme, & l'exposant p égal à celui de l'équation donnée; ce qui est général pour les équations de tous les degrez où il n'y a que trois termes; le signe $\pm$ est toujours contraire à celui qui précéde le cœfficient de l'équation proposée, que je suppose égalée à zéro, car la substitution fait évanoüir le second terme.

Aprés cette préparation on trouvera les racines irrationelles de ces équations pures & simples, comme celles des puissances imparfaites & par la même Méthode.

Cette Méthode consiste à exprimer toute racine irrationelle proposée ou par deux séries, l'une par excès l'autre par défaut ou par une seule série infinie de termes qui expriment sa valeur alternativement par excès & par défaut, c'est-à-dire par une suite de fractions qui approchent continuellement de la valeur désirée à l'infini avec la plus petite différence qui soit possible, soit par excès soit par défaut; ensorte que dans l'infinitiéme terme la différence soit nulle, & que la somme intégrale de cette série donne exactement, quoique d'une maniére inexprimable, la valeur entiére & exacte de la racine irrationelle proposée.

C'est-à-dire que dans le quarré irrationel, comme il est impossible d'exprimer exactement sa valeur en nombres entiers ni en fraction, on ne peut lui substituer qu'une série de fractions rationelles telles que le quarré du numérateur, ait au quarré du dénominateur un rapport continuellement approchant & le plus approchant qui soit possible & le plus promptement. C'est-à-dire que si le quarré irrationel est 2, ou 3, ou 13, &c. il faut trouver une suite qui soit rationelle & par la Méthode la plus prompte, la plus courte & la plus simple qui soit possible. Il faut aussi pour la perfection la Méthode, que les termes de la série soient alternativement par excès & par défaut, & qu'on puisse trouver les limites de chaque terme en l'élevant à la puissance proposée; ou bien il faut que l'on puisse former deux séries, l'une dont tous les termes soient par excès & dans l'autre par défaut; si l'une de ces deux séries manquoit, ce ne seroit que la moitié de l'ouvrage de fait, l'on ne doit rien souhaiter de plus; mais aussi on ne peut pas se contenter de moins pour trouver la valeur des nombres irrationnaux qui sont inexprimables en nombres par leur nature.

On peut comparer cette Méthode des séries rationelles comme celle du triangle des rapports au calcul différentiel parce qu'il y a une division continuée à l'infini, car chaque terme des séries donne toujours infailliblement la racine ou le rapport cherché avec une différence toujours décroissante d'un terme au suivant, soit par excès soit par défaut.

De même je compare au calcul intégral ; la maniére dont je compare ici les quatre séries primitives pour faire choix de la meilleure, & entre les termes de la meilleure ceux qui donnent le plus exactement le rapport cherché; à la rigueur l'intégration de la série est un vrai calcul intégral, nous en donnerons l'intégration qui est ici toujours possible, parce que la série est décroissante à l'infini.

D'ailleurs le quotient d'un seul terme est le calcul intégral du même rapport.

Or dans le choix des quatre séries primitives, quoiqu'il faille toujours préferer la plus convergente, il y a cependant des cas dans lesquels il faut s'écarter de cette régle, lorsque les termes des autres séries étant réduits à leur plus simple expression, donnent un rapport plus simple & très-approché.

SECONDE METHODE GENERALE,

Pour trouver les Racines irrationelles par des Formules rationelles.

AVIS. CEtte Méthode est générale pour les racines de toutes les puissances imparfaites & pour les racines irrationelles des équations de tous les degrez à l'infini. Comme elle demande un grand détail nous nous contenterons de l'expliquer pour le second degré seulement. Mais on peut l'appliquer de même au troisiéme

degré, au quatriéme degré & à tous les degrez ſupérieurs, car la régle eſt générale.

Dans les deux formules exemplaires pour tous les degrez, a eſt en général la racine de l'irrationel propoſé, & b repréſente l'unité conſtante, x eſt la valeur de la racine propoſée par excès ou par défaut, & y eſt toujours le nombre irrationel propoſé.

En ſuppoſant p l'expoſant d'une puiſſance d'un degré quelconque, les formules exemplaires générales ſont $\frac{a}{b}$ pour le premier terme, & $\frac{ax + a^p \pm bxy}{1x + ay}$ pour le ſecond terme. Ainſi pour le ſecond degré j'ai $\frac{a}{b}$ & $\frac{ax + aa \pm qxy}{1x + ay}$.

Des Séries rationelles en général.

Définition. Les ſéries rationelles ſont des ſuites de fractions reglées par une loi conſtante fondée ſur les racines rationelles de deux nombres rationaux, dont l'un eſt moindre, & l'autre immédiatement plus grand que le nombre irrationel donné; dans ces ſéries rationelles, il eſt encore de leur eſſence que la ſérie des dénominateurs croiſſe toujours en raiſon plus grande que celle des numérateurs, afin que chaque fraction diminuë de valeur d'un terme à l'autre à l'infini, de telle ſorte que ſa valeur devienne plus petite qu'aucune grandeur finie donnée, quand même le premier numérateur ſeroit ſuppoſé plus grand à diſcrétion dans le premier terme, que le dénominateur donné.

D'où il ſuit que quelque valeur qu'on ſuppoſe pour le numérateur & le dénominateur du premier terme, la ſérie formée ſur l'hypothéſe la plus éloignée priſe à volonté,

ne laissera pas d'approcher dans la suite de la valeur du nombre irrationel donné, & en poussant la série à l'infini elle donneroit exactement la valeur désirée en vertu des formules que nous donnerons dans ce traité.

L'usage des séries rationelles est très-étendu, puisqu'on rencontre bien plus souvent des nombres irrationaux que d'autres, lesquels se rencontrent très-rarement, au lieu que les premiers se présentent naturellement par tout. Ainsi ces séries servent,

1°. pour trouver les racines des puissances imparfaites.

2°. Les racines des équations de tous les degrez à l'infini.

3°. Le rapport de tous les nombres irrationaux.

4°. Enfin, ces séries servent généralement dans la résolution de tous les Problêmes de géométrie & de toutes les sciences Phisico-Mathématiques; c'est une Méthode universelle pour résoudre en nombres entiers avec facilité & sans aucun tatonnement tous les Problêmes qu'on peut former sur les grandeurs.

Deux Méthodes pour former les Séries en général.

J'employe deux Méthodes pour former les séries rationelles.

La premiére Méthode est celle des formules générales, qui est la seconde de ce Traité.

La seconde est celle du triangle des rapports, qui est la troisiéme de ce Traité.

Ces deux Méthodes concourent ensemble à former la série la plus parfaite & la plus exacte qui est la seule que j'ai en vûë, & ces deux Méthodes se prêtent un secours mutuel pour y parvenir.

La seconde Méthode qui est celle du triangle des rapports donne directement la série la plus exacte, mais elle a besoin de la premiére Méthode pour lui fournir des matériaux. Il y a même des cas où la série la plus parfaite & la plus exacte ne donne pas toujours le rapport le plus

simple ; & dans ce cas il faut préferer la série trouvée par les formules quoique moins exacte, mais plus simple à la série trouvée par le triangle des rapports, lorsqu'elle donne un rapport plus composé.

Du nombre des Formules & des Séries pour exprimer chaque nombre irrationel.

Chacun des nombres irrationaux peut s'exprimer en général, (dans le second degré, par exemple,) par $xx \pm y = 41$. Il en est de même des irrationaux de tous les autres degrez. xx est un quarré parfait immédiatement ou plus petit ou plus grand que le nombre proposé, supposé $= 41$. Donc $xx \pm y = 41 = 36 + 5$, ou $= 49 - 8$. Donc $x = 6$, ou $x = 7$.

La premiére valeur de $x = 6$, donne $xx = 36$. Donc $xx + y = 36 + 5 = 41$.

La seconde valeur de $x = 7$, donne $xx = 49$. Donc $xx - y = 49 - 8 = 41$.

Chacune de ces deux valeurs substituée dans la formule générale, me donne une formule particuliére pour cet irrationel 41 ; & substituant dans chaque formule particuliére l'une de ces deux valeurs, puis l'autre; la substitution donne quatre formules qui servent à former quatre séries primitives & fondamentales, dont on peut tirer une infinité d'autres séries.

D'ailleurs si on prend arbitrairement d'autres valeurs pour x, l'une moindre & l'autre plus grande à discrétion. On pourra former d'autres séries à l'infini, mais elle ne seront pas les plus promptes ni les plus simples.

Moïen de trouver promptement des termes fort éloignez dans les Séries.

Comme chaque terme de la série exprime la racine cherchée par approximation, ou par excès ou par défaut, qui

décroiſſent dans les termes de la ſérie à meſure qu'ils ſont plus éloignez du premier terme. Il eſt donc important d'avoir un grand nombre de termes, ou d'en avoir de fort éloignez; c'eſt ce qui m'a engagé d'employer trois genres de progreſſion dans la formation des termes de chaque ſérie.

Le premier genre de progreſſion que j'employe dans la formation des termes de la ſérie, eſt la progreſſion naturelle des nombres. 1. 2. 3. 4. 5, &c.

Je me ſers de cette progreſſion pour trouver de ſuite l'un après l'autre tous les termes de la ſérie en réïterant toujours l'opération ſur une même formule.

Le ſecond genre qui eſt un abrégé du premier genre, renferme toutes les autres progreſſions arithmétiques, dont le nombre eſt infini; elle ſert à ſauter un ou pluſieurs termes tout d'un coup ſans paſſer par les termes moyens comme du premier au 4e. ou du 2e. au 6e. ou du 2e. au 15e. &c. Et continuant ainſi à ſauter des termes ſelon la progreſſion qu'on aura choiſi, on arrivera en peu de tems par deux ou trois opérations à un terme très-éloigné ſans paſſer par les termes moyens qu'on ne pourroit trouver que par un très-grand nombre d'opérations réïterées de ſuite ſelon la progreſſion naturelle des nombres.

Le troiſiéme genre qui eſt encore un chemin plus abrégé que le ſecond, conſiſte à ſauter d'un terme quelconque trouvé à un terme éloigné en progreſſion géométrique quelconque, double, triple, quadruple, &c.

Axiôme 1. Tout nombre entier comme 4, qui eſt une ſeconde puiſſance parfaite dont la racine eſt 2, eſt encore réellement & ſans fiction toute puiſſance quelconque à l'infini, dont les racines ſont irrationelles, mais ne ſe trouvent que par la diviſion infinie.

Axiôme 2. Tout nombre entier ou mixte, quelque petit qu'il ſoit, pourvû qu'il ſoit plus grand que l'unité, peut

peut être élevé à une puissance d'un degré déterminé, telle que cette puissance surpassera tout nombre donné, quelque grand qu'il soit, par exemple la fraction $\frac{3}{2}$ peut être élevée à une puissance d'un tel degré que cette puissance sera plus grande que 10. 00. 00. que 10000 0000, &c.

Axiôme 3. Dans toute série de fractions, si la série des dénominateurs croît en raison géométrique continue plus grande que les numérateurs, la fraction diminue de valeur à l'infini, & deviendra plus petite qu'aucune grandeur finie donnée, quand même le premier numérateur seroit supposé plus grand à discrétion que le dénominateur, c'est une conséquence nécessaire de l'axiôme précédent.

Axiôme 4. En général toute puissance est parfaite ou imparfaite, & pour expliquer plus clairement ce qui convient à toutes les puissances, je prends pour exemple le quarré qui est la seconde puissance.

Tout quarré proposé en nombre entiers est ou un quarré parfait, dont la racine peut être exprimée exactement en nombres entiers, ou un nombre compris entre deux quarrez parfaits, d'où on le nomme quarré imparfait, dont la racine ne peut être exprimée exactement, ni par un nombre, ni par une fraction, ni par un nombre mixte quelconque, ainsi 4 est un quarré parfait dont la racine est 2, 9 est aussi un quarré parfait dont la racine est 3 : mais entre ces deux quarrez 4 & 9, il y a 5, 6, 7, 8, qui sont quatre quarrez imparfaits, dont la racine est plus grande que 2 & plus petite que 3.

Cette racine est irrationelle, on détermine sa valeur en général par le signe radical, ainsi $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, &c.

On ne peut exprimer cette valeur que par une division poussée à l'infini, ce qui est impossible : mais on y supplée par une série infinie de fractions, dont l'infi-

nitiéme terme eſt lui-même la racine déſirée, & d'ailleurs chacun des termes de la ſérie approche de cette valeur alternativement par excès & par défaut.

Tout ce qu'une intelligence bornée, telle qu'eſt l'eſprit humain peut faire de mieux pour approcher de la valeur exacte de cette racine (qui ne peut être exprimée exactement que par l'infinitiéme terme de cette ſérie infinie) conſiſte à former réguliérement, ou une ſeule ſérie, ou deux ſéries de fractions qui expriment cette racine alternativement par excès ou par défaut dans les plus petits nombres, & le plus exactement qu'il eſt poſſible par approximation ; ſçavoir, l'une des ſéries qui donne la racine par excès, & l'autre qui donne la même racine par défaut, dont la différence ſoit toujours moindre que l'unité, & même la plus petite qui ſoit poſſible avec des limites préciſes & ſimples.

Or les limites d'approximation les plus ſimples qu'on puiſſe donner, ſoit pour l'excès, ſoit pour le défaut, eſt lorſque leur différence dans ces deux cas eſt une partie aliquote de l'unité entre les deux termes de la ſérie qui ne différent entre eux que de l'unité au dénominateur, par exemple, lorſque les limites d'approximation ſont entre $\frac{1}{16}$ & $\frac{1}{17}$, ou entre $\frac{1}{408}$ & $\frac{1}{409}$, &c.

Ainſi la perfection de la Méthode d'approximation des racines irrationelles demande deux conditions.

1°. Qu'il y ait deux ſéries, l'une qui approche par excès, l'autre qui approche par défaut de la racine déſirée.

Une ſérie ſeule & unique par excès ou par défaut ne ſuffit pas, car puiſqu'on ne peut trouver exactement la racine irrationelle, on peut également déſirer ou avoir beſoin d'approcher par excès ou par défaut; on ne doit pas ſe contenter de moins, mais auſſi on ne peut rien demander de plus.

2°. Que chacune des ſéries ſoit formée réguliérement.

Usage de cette Méthode d'approximation.

Cette Méthode nouvelle sert généralement,

1°. Pour trouver les racines irrationelles de toutes les puissances à l'infini, c'est-à-dire les racines de tous les nombres irrationaux possibles.

2°. Pour trouver les racines irrationelles de toute équation numérique quelconque.

La préparation consiste à trouver pour chaque racine deux valeurs approchées en nombres entiers, l'une par excès, & l'autre par défaut, qui donnera deux formules exemplaires tirées de l'équation proposée, ensuite substituant dans chacune de ces deux formules exemplaires les deux valeurs approchées en entiers de la racine, alors on aura quatre séries rationelles dans lesquelles la racine sera transformée, & au moïen de cette transformation, la différence de la racine cherchée deviendra moindre qu'aucune grandeur finie, & cela sans aucun tâtonnement ce qui mérite attention.

Il y a un choix à faire entre ces quatres séries primitives, & une infinité d'autres séries qui en peuvent être dérivées, comme nous le verrons dans la suite ; pour préférer la plus parfaite de toutes, qui est celle qui se trouve directement par le triangle des rapports, & qui concourt avec celle des formules dans un seul cas, c'est lorsque $b = 1$.

Remarque. Dans ce Traité je ne parle que des nombres entiers qui sont irrationaux ; mais la Méthode s'étend également à tout autre nombre rompu ou mixte quelconque, il faut seulement le préparer en le réduisant en une fraction unique, & tirant séparément la racine approchée du numérateur & celle du dénominateur.

Ou bien par une Méthode plus simple & plus élégante, dans cette fraction je multiplie le numérateur par le dé-

nominateur ; ensuite je tire la racine approchée du produit, & je divise cette racine par le dénominateur, & le quotient me donne la racine désirée par approximation.

En quoi consiste cette Méthode.

Soit un nombre irrationel quelconque, dont on demande la racine quarrée, par exemple, il s'agit de trouver une série infinie de nombres quarrez en entiers pris deux à deux comme une fraction, tels que le quarré du plus grand qui est le numérateur de la fraction, qui compose chaque terme de la série, ait au quarré du dénominateur de la même fraction qui est le plus petit, un rapport continuellement approchant & le plus approchant qu'il soit possible.

En général, je suppose tout quarré irrationel exprimé en nombres entiers $= aa \pm y = c$.

Je suppose a la valeur approchée de la racine en entiers à moins d'une unité près, soit par excès, soit par défaut, d'où il suit que y est toujours entre 1 qui est la plus petite valeur possible, & $2a$ qui est sa plus grande valeur, car si $y = 2a + 1$, le quarré donné $aa \pm y = aa \pm 2a + 1$, dont la racine exacte en entiers est $a \pm 1$, & par conséquent le quarré donné ne seroit pas irrationel, mais un quarré parfait, ce qui est contre l'hypothése.

La formule générale exemplaire qui doit servir de Modéle pour trouver la racine quarrée de tous les nombres irrationaux est $\frac{x}{b}$ 1er. terme. Et $\frac{ax + cb}{1x + ab}$ pour le second terme, dans lesquels $x = a$, racine en entiers ou par excès ou par défaut, $b = 1$, & $c =$ le nombre irrationel donné, ces deux valeurs donnent la série la plus prompte, & toute autre valeur substituée dans la formule ne donne point la série la plus prompte.

Exemple. Soit $aa \pm y = 41$.

1°. Si je prends le quarré moindre 36, j'ai $41 = 36 + 5$, qui donne $a = 6$, mais si je prends le quarré plus grand 49, j'ai $41 = 49 - 8$, ou $a = 7$, la première formule exemplaire tirée de la racine 6 du quarré 36 moindre que 41. est $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$.

1°. Supposant $a = 6$ & $b = 1$, substituant ces valeurs dans la formule, j'ai par substitution $\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$ &

$\frac{6a + 41b}{1a + 6b} = \frac{6 \times 6 + 41 \times 1}{1 \times 6 + 6 \times 1} = \frac{36 + 41}{6 + 6} = \frac{77}{12}$, c'est la première série $\frac{6}{1}$, $\frac{77}{12}$.

2°. Supposant $a = 7$ & $b = 1$, la substitution donne $\frac{a}{b} = \frac{7}{1}$ & $\frac{6a + 41b}{1a + 6b} = \frac{6 \times 7 + 41 \times 1}{1 \times 7 + 6 \times 1} = \frac{42 + 41}{7 + 6} = \frac{83}{13}$, c'est la seconde série $\frac{7}{1}$, $\frac{83}{13}$

La seconde formule exemplaire tirée de la racine 7 du quarré 49 qui surpasse 41, est $\frac{a}{b}$ & $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$ dans laquelle je substitue les deux valeurs de a qui donneront deux autres séries primitives.

3°. Supposant $a = 6$ & $b = 1$, & substituant ces valeurs dans la seconde formule, j'ai $\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$, &

$\frac{7a + 41b}{1a + 7b} = \frac{7 \times 6 + 41 \times 1}{1 \times 6 + 7 \times 1} = \frac{42 + 41}{6 + 7} = \frac{83}{13}$, ce qui donne la troisiéme série $\frac{6}{1}$, $\frac{83}{13}$.

4°. Supposant $a = 7$, & $b = 1$, substituant ces valeurs dans la formule exemplaire $\frac{a}{b}$, & $\frac{7a + 41b}{.a + 7b}$, j'ai $\frac{7}{1}$, $\frac{7 \times 7 + 41 \times 1}{1 \times 7 + 7 \times 1} = \frac{49 + 41}{7 + 7} = \frac{90}{14}$, c'est la quatriéme série.

Paradoxe. Quelques nombres qu'on prenne pour x & y, pourvû que le premier surpasse le second, la formule donnera toujours nécessairement la racine désirée, mais ce n'est pas le plus court chemin, & c'est un

vrai Paradoxe; c'eſt-à-dire qu'en continuant la formule ſur des nombres pris arbitrairement, on aura toujours une ſérie approchée de la racine déſirée, & l'infinitiéme terme ſera égal à cette racine déſirée.

Il y a une parfaite analogie dans la ſérie des formules rationelles des nombres irrationaux, comme on le verra dans la table qui ſuit, que l'on peut continuer à l'infini; cette table comprend également les nombres rationaux & les nombres irrationaux, ce qui démontre l'univerſalité, l'excellence & la juſteſſe de la Méthode.

La conſtruction des formules eſt facile pour tous les irrationaux.

Le premier terme eſt toujours $\frac{a}{b}$, le ſecond terme contient au numérateur & au dénominateur $a + b$, avec des cœfficiens qu'on détermine comme il ſuit; dans le numérateur le cœfficient de a eſt la racine approchée par défaut dans la premiére formule, c'eſt la racine du quarré parfait moindre que l'irrationel donné; le cœfficient de b eſt le nombre irrationel donné; dans le dénominateur, le cœfficient de a eſt toujours l'unité conſtante, & le cœfficient de b eſt le même que le cœfficient de a dans le numérateur, qui eſt la racine approchée par défaut dans la premiére formule.

Dans la ſeconde formule le cœfficient de a dans le numérateur, & de b dans le dénominateur ſont la racine approchée par excès, c'eſt-à dire, la racine en entier du quarré parfait plus grand que le nombre irrationel donné, le reſte eſt de même comme dans la premiére formule, d'où il ſuit que les quarrez parfaits n'ont qu'une ſeule formule qui ſert à former celles des irrationaux plus grands ou plus petits.

Table générale de la formation des formules rationelles pour trouver la racine quarrée des nombres rationaux & irrationaux.

Quarrez.

1°. $\sqrt{1}$ rationel $= a^2 = 1$.

Sa formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+b}{1a+1b}$. il n'y a qu'une formule unique, ce qui est général pour tous les quarrez parfaits, & pour toutes les puissances parfaites supérieures.

2°. $\sqrt{2}$ irrationel $= a^2 + b = 1 + 1$, ou $= 4 - 2$, il y a par conséquent deux formules, la seconde s'éloigne trop, la 1[re]. & la meilleure est $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+2b}{1a+1b}$ qui donne la série $\frac{1+}{1}$, $\frac{3-}{2}$, $\frac{7+}{5}$, $\frac{17-}{12}$, $\frac{41+}{29}$, $\frac{99-}{70}$, $\frac{239+}{169}$, &c. l'excès & le défaut dans les quarrez des termes sont alternativement -1 & $+1$.

3°. $\sqrt{3} = a^2 \pm b = 1 + 2$ ou $= 4 - 1$.

Ses formules sont.

La premiére $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+3b}{1a+1b}$ qui donne $\frac{1+}{1}$, $\frac{2-}{2}$, $\frac{5+}{3}$, $\frac{7-}{5}$, $\frac{19+}{11}$, $\frac{26-}{15}$, dont l'excès & le défaut dans les quarrez sont alternativement -2, $+1$.

La seconde & la meilleure est $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+3b}{1a+2b}$, qui donne $\frac{2-}{1}$, $\frac{7-}{4}$, $\frac{26-}{15}$, $\frac{97-}{56}$, $\frac{362-}{209}$, $\frac{1351-}{780}$, dont l'excès & le défaut dans les quarrez sont alternativement &c.

4°. $\sqrt{4}$, rationel. $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+4b}{1a+2b}$, qui donne $\frac{2}{1}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{32}{16}$, & le quotient de chaque terme est toujours $2 =$ à la racine de 4.

*

5°. $\sqrt{5}$ irrationel $= aa \pm b = 4 + 1$, ou $= 9 - 4$.

La premiére formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+5b}{2a+2b}$ qui donne $\frac{2+}{1}$, $\frac{9-}{4}$, $\frac{38+}{17}$, $\frac{161-}{72}$.

La seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+5b}{1a+3b}$ qui donne &c.

6°. $\sqrt{6}$ irrationel $= aa \pm b = 4 + 2$, ou $= 9 - 3$.

La premiére formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+6b}{1a+2b}$ qui donne $\frac{2+}{1}$, $\frac{5-}{2}$, $\frac{22+}{9}$, $\frac{49-}{20}$, $\frac{218+}{89}$ alternativement -2 & $+1$.

La seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+6b}{1a+3b}$ qui donne &c.

7°. $\sqrt{7}$ irrationel $= aa \pm b = 4 + 3$, ou $= 9 - 2$.

La premiére formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+7b}{1a+7b}$ qui donne $\frac{2+}{1}$, $\frac{11-}{4}$, $\frac{50+}{19}$, $\frac{233-}{88}$, alternativement -3, $+9$, -27, $+81$.

La seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+7b}{1a+3b}$ c'est la meilleure, qui donne $\frac{3-}{1}$, $\frac{8+}{3}$, $\frac{45-}{17}$, $\frac{127+}{48}$, alternativement $+2$, -1.

8°. $\sqrt{8}$. irrationel $= aa \pm b = 4 + 4$, ou $= 9 - 1$.

La premiére formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+8b}{1a+2b}$ qui donne $\frac{2+}{1}$, $\frac{3-}{1}$, $\frac{14+}{5}$, $\frac{17-}{6}$, $\frac{82+}{29}$, $\frac{99-}{35}$ alternativement -4 & $+1$.

La seconde formule la meilleure $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+8b}{1a+3b}$ qui donne $\frac{3-}{1}$, $\frac{17-}{6}$, $\frac{99-}{35}$ excès 1.

9°. $\sqrt{9}$. rationel $= aa \pm b = 4 + 5$, ou $= 9 = 3 \times 3$.

La

La formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a + 9b}{1a + 3b}$ qui donne $\frac{3}{1}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{108}{36}$, $\frac{648}{216}$, &c.

11°. $\sqrt{10}$. irrationel $= aa \pm b = 9 + 1$, ou $= 16 - 6$.

La premiére formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a + 10b}{1a + 3b}$, c'eſt la meilleure qui donne $\frac{3-}{1}$, $\frac{19+}{6}$, $\frac{117-}{37}$ alternativement -1 & $+1$.

La ſeconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a + 10b}{1a + 4b}$ qui donne, &c.

11°. $\sqrt{11}$. irrationel $= aa \pm b = 9 + 2$, ou $= 16 - 5$.

La premiére formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a + 11b}{1a + 3b}$, c'eſt la meilleure qui donne $\frac{3}{1}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{63}{19}$, $\frac{199}{60}$, $\frac{1257}{379}$ alternativement -1, & $+2$ comme dans $\sqrt{3}$.

La ſeconde formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a + 11b}{1a + 4b}$ qui donne, &c.

12°. $\sqrt{12}$. irrationel $= aa \pm b = 9 + 3$, ou $= 16 - 4$.

La premiére formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a + 12b}{1a + 3b}$ qui donne, &c.

La ſeconde formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a + 12b}{1a + 4b}$ qui donne, &c.

13°. $\sqrt{13}$ irrationel $= aa \pm b = 9 + 4$, ou $= 16 - 3$. Ce nombre irrationel 13, eſt le premier & le plus petit nombre où l'on peut appliquer la Méthode dans toute ſon étenduë & former les quatre ſéries primitives & fondamentales, parce que c'eſt le premier & le plus petit des nombres premiers qui ſurpaſſe & qui eſt ſurpaſſé de même par les deux quarrez parfaits immédiates 9 & 16 entre leſquels il ſe trouve compris; car 13 ſurpaſſe 9 de 4, & eſt ſurpaſſé de 3. par 16.

Donc $\sqrt{13} = 4-$, ou $3+$, & ſubſtituant ces deux valeurs à la place de a & 1 à la place de b dans les deux formules primitives, on formera les quatre ſéries primitives ſuivantes.

La premiére formule pour $\sqrt{13}$ est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+13b}{1a+3b}$ qui donne la premiére série $\frac{3+}{1}$, $\frac{11-}{3}$, $\frac{18+}{5}$, $\frac{119-}{33}$, $\frac{649+}{180}$, &c. supposant $\frac{a}{b}=\frac{3}{1}$.

Et la même 1e. formule supposant $\frac{a}{b}=\frac{4}{1}$ donne la seconde série, $\frac{4-}{1}$, $\frac{25+}{7}$, $\frac{83+}{23}$, $\frac{137+}{38}$, $\frac{905-}{251}$, $\frac{2989+}{829}$, &c.

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+13b}{1a+4b}$ qui donne (supposant $\frac{a}{b}=\frac{3}{1}$) la troisiéme série toute par excès $\frac{3+}{1}$, $\frac{25+}{7}$, $\frac{191+}{53}$, $\frac{1453+}{403}$, &c.

Et supposant $\frac{a}{b}=\frac{4}{1}$, on aura la quatriéme série toute par défaut $\frac{4-}{1}$, $\frac{29-}{8}$, $\frac{220-}{61}$, $\frac{1673-}{464}$, &c.

14°. $\sqrt{14}$ irrationel $= aa \pm b = 9+5$, ou $= 16-2$.

La premiére formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+14b}{1a+3b}$

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+14b}{1a+4b}$

15°. $\sqrt{15}$ irrationel $= aa + b = 9+6$, ou $= 16-1$.

La premiere formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+15b}{1a+3b}$

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+15b}{1a+4b}$

16°. $\sqrt{16}$ rationel $= aa = 4\times4 = 16$.

17°. $\sqrt{17}$ irrationel $= aa \pm b = 16+1$, ou $= 25-9$.

La premiére formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+17b}{1a+4b}$

La ſeconde formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{5a+17b}{1a+5b}$

&c. &c.

17°. $\sqrt{25}$. rationel $= aa = 5 \times 5 = 25$.

18°. $\sqrt{29}$ irrationel $= aa \pm b, = 25 + 4$, ou $= 36 - 7$.

La premiére formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{5a+29b}{1a+5b}$ différence $-4 + 16 - 64$. qui donne $\frac{5}{1}+$, $\frac{54}{10}-$, $\frac{560}{105}+$, &c.

La ſeconde formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+29b}{1a+6b}$

19°. $\sqrt{31}$ irrationel $= aa \pm b = 25 + b$, ou $= 36 - 5$.

La premiére formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{5a+31b}{1a+5b}$ qui donne $\frac{5}{1}$, $\frac{56}{10}$, $\frac{590}{106}$.

La ſeconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+31b}{1a+6b}$ c'eſt la meilleure qui donne $\frac{6}{1}$, $\frac{67}{12}$.

2°. $\sqrt{36}$ rationel $= aa \pm b =$ ſuppoſant $b = 2a + 1 = 5 + 5 + 1$. ce qui donne $= 25 + \overline{2 \times 5} + 1 = 36$, ou $aa - b = 49 - \overline{2 \times 6} + 1 = 49 - 13 = 36$.

20°. $\sqrt{41}$. irrationel $= aa \pm b = 36 + 5$, ou $49 - 8$.

La premiére formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+41b}{1a+6b}$

La cinquiéme formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{7a+41b}{1a+7b}$ ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$, la premiére formule donne la premiére ſérie $\frac{6}{1}+$, $\frac{77}{12}-$, $\frac{954}{149}+$, $\frac{11833}{1848}-$, $\frac{146766}{22921}+$. ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{7}{1}$ la premiére formule donne la ſeconde ſérie $\frac{7}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1031}{161}$, $\frac{12787}{1997}$, $\frac{158599}{24769}$.

En ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$, la 2de. formule donne la troiſiéme ſérie $\frac{6}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1114}{174}$, $\frac{14932}{2332}$.

En ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{7}{1}$, la ſeconde formule donne la quatriéme ſérie $\frac{7}{1}$, $\frac{90}{14}$, $\frac{1204}{188}$, $\frac{16136}{2520}$, &c.

On peut continuer cette Table générale à l'infini; car tous les nombres pris dans la ſuite naturelle, ſont, ou des ſecondes puiſſances parfaites comme 1.4.9.16.25.36. &c. ou des ſecondes puiſſances imparfaites.

Dans toutes les ſecondes puiſſances parfaites, il n'y a qu'une ſeule formule laquelle donne une racine exacte à chaque terme de la ſérie, parce que toute puiſſance parfaite a ſa racine exacte. Cette formule n'eſt pas néceſſaire, pour avoir la racine exacte de la puiſſance parfaite puiſqu'elle ſe trouve plus facilement par l'extraction ordinaire; mais elle ſert à conſerver l'analogie & à former les cœfficiens dans les formules des nombres irrationaux.

Par exemple, dans $\sqrt{36}$, puiſque 36 eſt un quarré parfait dont la racine eſt 6, la formule eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+36b}{1a+6b}$.

Or la racine de 36 eſt 6 qui eſt une racine exacte & non pas approchée, d'où il ſuit néceſſairement qu'en ſubſtituant cette valeur dans la formule, on aura $\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$. premier terme qui donne la racine exacte. De même la ſubſtitution donne dans le 2e. terme $\frac{6a+36b}{1a+6b} = \frac{36+36}{6+6}$ Or chaque partie de ce ſecond terme donne encore la même racine exacte & en continuant la ſérie à l'infini, on trouvera toujours le même rapport : mais ce rapport ne ſe conſerve pas de même dans les nombres irrationaux, parce qu'il eſt impoſſible de trouver exactement leur racine.

Formation des Formules.

Les irrationaux ont toujours deux formules, l'une par

excès, formée ſur le modéle de celle du nombre rationel plus grand, & l'autre formule par défaut formée ſur celle du quarré rationel plus petit ; par exemple 41 eſt un irrationel compris entre deux quarrez parfaits, ſçavoir entre 36 dont la racine eſt $6 = a$, & entre 49 dont la racine eſt $7 = a$.

La formule univerſelle eſt $\frac{1x}{1b}$ pour le premier terme, & pour le ſecond terme $\frac{ax + cb}{1x + ab}$, je ſubſtituë la premiére valeur $a = 6$, & $b = 1$, & $c = 41$, quarré propoſé imparfait, j'ai $\frac{6x + 41y}{1x + 6y}$, enfin ſubſtituant a en la place de x, & b au lieu de y, j'ai $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$, qui donne $\frac{6}{1} = \frac{a}{b}$ Premier terme.

Et $\frac{6 \times 6 + 41b}{1 \times 6 + 6b} = \frac{6a + 41b}{1a + 6b} = \frac{36 + 41}{6 + 6}$. Second terme.

Ainſi les deux premiers termes de la ſérie ſont $\frac{6}{1}$, $\frac{77}{12}$, ſi je ſuppoſe le ſecond terme $\frac{77}{12}$ égal à la premiére formule du premier terme $\frac{a}{b}$ & ſubſtituant ſa valeur dans la formule du ſecond terme $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$, j'ai pour le troiſiéme terme de la ſérie $\frac{\overline{6 \times 77} + \overline{12 \times 41}}{\overline{1 \times 77} + 6 \times 12} = \frac{462 + 492}{77 + 72} = \frac{954}{149}$.

Suppoſant enſuite ce troiſiéme terme $\frac{954}{149} = \frac{a}{b}$ pour avoir le quatriéme terme en ſubſtituant toujours ſa valeur $= \frac{a}{b}$ dans la formule du ſecond terme $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$, j'aurai le quatriéme terme $\frac{11833}{1848}$.

Et continuant toujours de même, on trouvera autant de termes de la premiére ſérie qu'on voudra.

Exemple. Pour trouver la racine de 41, qui eſt un quar-

ré imparfait compris entre le quarré parfait 36 dont la racine est 6, & le quarré parfait 49 dont la racine est 7. Donc la racine quarrée de 41 est plus grande que 6 & plus petite que 7.

Ce qui s'exprime ainsi $41 = aa \pm y : = 36 + 5$, ou $= 49 - 8$.

Donc $\sqrt{aa+y} = a + \sqrt{y} = 6 + \sqrt{5}$. 1e. valeur de $a = 6$.

Donc $\sqrt{aa-y} = a - \sqrt{y} = 7 - \sqrt{8}$. 2de. valeur de $a = 7$.

La premiére valeur de $a = 6$, donne la premiére formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+41b}{1a+6b}$.

La seconde valeur de $a = 7$, donne la seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{7a+41b}{1a+7b}$.

$\frac{a}{b}$ est la formule universelle du premier terme, constante & invariable dans son expression, parce qu'elle n'a point de cœfficient si ce n'est l'unité qui est toujours sous-entenduë.

La formule du second terme a toujours $\frac{a+b}{}$ tant au numérateur qu'au dénominateur avec des cœfficiens particuliers dans chaque irrationel.

Le cœfficient de a au numérateur & de b au dénominateur, est toujours le même ; c'est dans la premiére formule la racine approchée par défaut, c'est-à-dire, la racine exacte du quarré moindre que le nombre irrationel donné, c'est 6 racine de 36.

Dans la seconde formule c'est la racine approchée par excès, c'est-à-dire, la racine exacte du quarré immédiatement plus grand 49, que le nombre irrationel donné, ici cette racine est 7 racine de 49.

Le cœfficient de b au numérateur, est le nombre irrationel donné.

Le cœfficient de a au dénominateur est toujours l'unité.

Dans chacune de ces deux formules je ſubſtituë les deux valeurs de $a = 6 = 7$, ce qui me donne quatre ſéries.

Subſtituant $a = 6$ dans la premiére formule, j'ai la premiére ſérie $\frac{6}{1}$, $\frac{77}{12}$, $\frac{954}{49}$, $\frac{11833}{1848}$, $\frac{146766}{22921}$, &c.

Subſtituant $a = 7$ dans la premiére formule, j'ai la ſeconde ſérie $\frac{7}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1031}{161}$, $\frac{12787}{1997}$, $\frac{159599}{24769}$, &c.

Pareillement ſubſtituant $a = 7$ dans la 2ᵈ. formule, j'ai la troiſiéme ſérie $\frac{7}{1}$, $\frac{90}{14}$, $\frac{1294}{188}$, $\frac{16136}{2522}$, $\frac{216272}{33776}$, &c.

Enfin ſubſtituant $a = 6$ dans la ſeconde formule, j'ai la quatriéme ſérie $\frac{6}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1114}{174}$, $\frac{14932}{2332}$, $\frac{200136}{31259}$, &c.

Remarque premiére & Paradoxe. Sur la propriété des formules, on peut former ſur chacune de ces deux formules $\frac{6a+41b}{14+6b}$ & $\frac{7a+41b}{1a+7b}$, une infinité de ſéries primitives qui approcheront toutes & chacune en particulier de la valeur de la racine de 41, en ſuppoſant a & b égaux à tel nombre qu'on voudra avec cette ſeule condition ou reſtriction que a ſoit plus grand que b, par exemple, on peut ſuppoſer $a = 100$, & ſuppoſer $b = 7$, ou 13, ou 91, &c. ou 99. L'excellence de la formule eſt telle qu'on approchera toujours indéfiniment de la valeur cherchée ſoit par excès, comme de $\frac{100}{7} = \sqrt{41}$, ſoit par défaut comme de $\frac{100}{97} = \sqrt{41}$, quelqu'extravagante que paroiſſe d'abord la ſuppoſition.

Remarque ſeconde. Il y a évidemment un choix à faire de la meilleure des ſéries poſſibles à l'infini; la plus ſimple & la meilleure de toutes eſt la ſérie formée par le triangle des rapports, comme nous le verrons dans la ſuite; mais auparavant il faut expliquer tout ce qui concerne ces ſéries, leur formation & leurs genres ou eſpéces différentes.

1°. Dans chaque nombre irrationel donné, il y a deux formules générales; ſur chaque formule on trouve deux ſéries primitives ou fondamentales, & ſur chaque ſérie primitive ou fondamentale on peut former pluſieurs ſéries dérivées à l'infini.

La série primitive & fondamentale eſt celle qui contient de ſuite tous les termes qu'on a trouvé par la formule propre.

Les ſeries dérivées ſont celles qui ſont tirées d'une ſérie fondamentale, & dans leſquelles les termes ne ſuivent pas l'ordre naturel comme dans la ſérie primitive, mais ils ſuivent un nouvel ordre d'expoſans, ou en progreſſion arithmétique, ou en progreſſion géométrique, ou en progreſſion quelconque compoſée de ces deux progreſſions.

Ainſi il y a des ſéries dérivées de deux genres différens, le premier genre contient les termes de la ſérie primitive & fondamentale, ſelon une progreſſion arithmétique quelconque; c'eſt à-dire, dont les expoſans ſont pris non pas de ſuite, mais en ſautant ou un, ou deux termes, ou trois ou quatre, &c. ſelon une progreſſion arithmétique quelconque, 1. 3. 5. &c. ou 1. 5. 9. &c; & comme on peut prendre les termes de la ſérie primitive ſuivant toutes les progreſſions arithmétiques poſſibles qui ſont infinies, & d'une infinité d'eſpéces; cela donne autant d'eſpéces différentes de ſéries dérivées ſelon la progreſſion arithmétique.

Le ſecond genre contient la progreſſion géométrique des expoſans des termes de la ſérie fondamentale, & comme il y a une infinité de progreſſions géométriques à l'infini, cela donne une infinité d'eſpéces de ſéries dérivées en progreſſion géométrique.

L'uſage de tous ces genres de ſéries en progreſſion arithmétique & géométrique, conſiſte à abréger & donner promtement la perfection à la ſérie la plus parfaite lorſqu'on l'a trouvée, par exemple, s'il faut trouver le centiéme terme de la ſérie primitive, comme il ſeroit trop long de réïtérer cent fois la ſubſtitution & les opérations ſur la formule, j'ai recours aux formules des ſéries dérivées en progreſſion géométrique qui donnent facilement & promtement

rement le nonante-sixiéme terme, car si l'on prend le troisiéme terme de la série primitive pour le premier de la série dérivée, & que l'on employe la formule de la progression géométrique double, on aura le 3e. le 6e. le 12e. le 24e. le 48e. le 96e terme.

Ensuite ajoutant à la formule de 96 la formule de la progression arithmétique pour sauter trois termes, j'ai $96 + 4 = 100$e. terme cherché.

Ainsi toutes les séries dérivées servent pour abréger l'opération de la série primitive & fondamentale, & pour avoir une approximation plus promte, de telle sorte qu'on trouve en peu de tems par leur moïen une série dérivée de trois ou quatre termes extrêmement convergente, & réduisant ces termes à la plus simple expression, lorsque le numérateur & le dénominateur d'un même terme ont un diviseur commun, on trouve par ce moïen la série la plus simple, & en même tems la plus convergente; or c'est par la Méthode du triangle des rapports que cette série se trouve infailliblement, de sorte que tout ce que nous dirons ici sur les formules rationelles, n'est qu'une préparation qui sert à trouver les matériaux nécessaires pour former le triangle des rapports qui donne la plus simple, la plus convergente & la plus parfaite de toutes les séries.

Mais les séries dérivées soit en progression arithmétique continuë, soit en progression géométrique continuë, ou dans une progression quelconque composée de toutes les deux, fournissent un moïen court & facile de continuer à pas de géans cette série qui est la plus parfaite de toutes, & qui exprime le plus exactement & le plus promtement qu'il est possible en nombres entiers la racine quarrée désirée : les mêmes termes de séries s'étendent également pour trouver les racines des équations & des puissances de tous les degrez à l'infini, en observant ce qui leur est propre comme nous le verrons.

Un point eſſentiel qu'il ne faut pas perdre de vûë, ſont les limites d'erreur dans chaque terme des ſéries, je les donne dans le quarré & dans la racine, ſoit dans les ſéries qui donnent l'approximation par excès, ſoit dans les ſéries qui donnent l'approximation par défaut, de ſorte qu'on trouve à chaque terme l'excés ou le défaut qui manque à l'exactitude géométrique qu'il eſt impoſſible de trouver par la nature des irrationaux.

Enfin je compare toutes les ſéries pour choiſir la plus parfaite, qui eſt toujours celle que le triangle des rapports donne directement; mais pour former cette ſérie, il faut pouſſer les autres ſéries aſſez loin pour avoir au moins quatre ou cinq quotients générateurs, comme nous le verrons, qui ſerviront de matériaux pour former le triangle des rapports.

Pour expliquer cette Méthode, on pourra en faire l'application à la racine quarrée de trois irrationaux qui ſont importans dans la géométrie.

Le premier exemple eſt $\sqrt{2}$, qui exprime le rapport de la diagonale du quarré à ſon côté $= 1$.

Le ſecond exemple eſt $\sqrt{3}$, qui exprime le rapport du côte du triangle équilatéral inſcrit dans le cercle au raïon du même cercle, & c'eſt de ce rapport de $\sqrt{3}$, à 1, que dépend la quadrature du cercle.

Le troiſiéme exemple eſt $\sqrt{41}$, qui eſt un exemple choiſi à deſſein d'expliquer cette nouvelle Méthode dans toute ſon étenduë dans les ſéries primitives, car c'eſt le plus petit & le plus ſimple des nombres premiers où les valeurs ſoient différentes.

Car $41 = aa \pm y$, ou pour mieux diſtinguer les valeurs des lettres $= aa + y = 36 + 5 = 41$, & $= cc - d = 49 - 8 = 41$.

Où l'on peut remarquer que les quatre valeurs a, y, c, d, ſont toutes quatre différentes, puiſque $a = 6$, $y = 5$, $c = 7$, $d = 8$.

Quoique $\sqrt{13}$ soit lui-même le plus petit & le plus simple des nombres premiers, sur lequel on puisse former quatre séries primitives sur deux formules, les quatre valeurs ne sont pas différentes, mais il n'y en a que deux qui sont répétées; car $13 = aa + y = 9 + 4$, qui donne $a = 3$, & $y = 4$, & le même $13 = aa - y = 16 - 3$, qui donne $a = 4$, & $y = 3$, dans lesquels les nombres 3 & 4 son répétez, car $a = 3$ dans l'un & $= 4$ dans l'autre, de même que y, ce qui empêche d'appercevoir l'analogie des quatre séries des quarrez.

Premier Exemple. $\sqrt{2}$. Le rapport de la diagonale du quarré à son côté 1, s'exprime par le rapport de $\sqrt{2}$. à 1, c'est un rapport important chez les anciens, il ne peut s'exprimer exactement par aucun nombre, parce que $\sqrt{2}$. est une fraction composée de deux nombres premiers entre eux, par conséquent il n'ont aucune mesure commune, donc la racine de 2 est un nombre irrationel qui est réellement dans la suite naturelle des nombres, & qu'on ne peut connoître cependant que par la division de 2 poussée à l'infini, ce qui est impossible par sa nature; ainsi ce qu'une intelligence bornée telle qu'est l'esprit humain peut faire de mieux, c'est d'en approcher le plus près & le plus promtement qu'il est possible par deux séries réglées, dont l'une exprime ce rapport par excès & l'autre par défaut, de sorte que cet excès & ce défaut soient les plus petits qu'il soit possible, comme ces deux séries sont la même dans tous leurs termes, excepté dans le dernier qui différe dans le dernier chifre, tout se réduit à former une série qui soit la plus approchée.

Or on peut former une infinité de séries pour exprimer ce rapport, dont les unes sont primitives & les autres en sont dérivées, ce qui engage, 1°. à donner le détail de leur formation; 2°. à trouver leurs limites;

3°. à les comparer pour faire choix de la meilleure; 4°. à porter la meilleure au degré de perfection néceſſaire, pour exprimer le plus promtement qu'il eſt poſſible le rapport cherché, & de la maniére la plus approchée.

L'unique formule exemplaire pour $\sqrt{2}$ eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+2b}{1a+1b}$, ſur laquelle on peut former une ſérie infinie incomplexe, ſuppoſant $a = 1$ & $b = 1$, comme il ſuit.

$\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$. premier terme.

$\frac{1a+2b}{1a+1b} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$. ſecond terme.

Je ſuppoſe $\frac{3}{2} = \frac{a}{b}$, donc $\frac{1a+2b}{1a+1b} = \frac{3+4}{3+2} = \frac{7}{5}$. 3e. term.

Je ſuppoſe $\frac{7}{5} = \frac{a}{b}$. donc $\frac{1a+2b}{1a+1b} = \frac{7+10}{7+5} = \frac{17}{12}$. 4e. term.

& continuant de la ſorte je formerai la ſérie infinie.

$\frac{1+}{1}$, $\frac{3-}{2}$, $\frac{7+}{5}$, $\frac{17+}{12}$, $\frac{41+}{29}$, $\frac{99-}{70}$, $\frac{239+}{169}$, &c.

Dont tous les termes ont alternativement les ſignes + & — au numérateur; pour trouver ces ſignes, il ſuffit de conſidérer que le premier terme formé ſur la premiére partie de la formule $\frac{a}{b}$ eſt trop petit, il faut donc lui ajouter par le ſigne + le ſecond terme formé ſur la ſeconde partie de la formule, mais on ajoute trop, donc ce ſecond terme aura le ſigne — pour marquer qu'il en faut retrancher le troiſiéme terme, &c.

Autrement, chaque terme de cette ſérie exprime le rapport cherché alternativement par défaut & par excès.

Car le quarré du premier numérateur $1 = 1$, eſt ſurpaſſé d'une unité par le double du quarré du premier dénominateur $1 \times 2 = 2$, puiſque $2 - 1 = 1$ qui eſt l'excès dont le double du quarré du dénominateur ſurpaſſe le quarré du numérateur.

Je trouve le même excès dans tous les termes impairs 1, 3, 5, 7, 9, comparant le quarré du numérateur avec le double du quarré du dénominateur correſpondant dans chaque terme.

Dans le premier terme 1 quarré de 1 qui eſt le premier dénominateur, eſt ſurpaſſé de 1 par 2, qui eſt le double de 1. quarré du premier dénominateur, car 1 $= 2 \times 1 - 1 = 2 - 1$.

Dans le troiſiéme terme, 49 quarré du troiſiéme numérateur 7, eſt ſurpaſſé de 1 par 50 double de 25, qui eſt le quarré du troiſiéme dénominateur 5, car $49 = 2 \times 25 - 1 = 50 - 1$.

Dans le cinquiéme terme 1681, quarré du cinquiéme numérateur 41, eſt ſurpaſſé de 1 par 1682, double de 841 qui eſt le quarré du cinquiéme dénominateur 29; car $1682 = 2 \times 841 + 1$, & ainſi de tous les termes impairs à l'infini.

Au contraire dans les termes pairs comme le ſecond, le quatriéme, le ſixiéme, le huitiéme, &c. Les quarrez des numérateurs ſurpaſſent d'une unité le double des quarrez des dénominateurs correſpondans.

Dans le ſecond terme 9 quarré du ſecond numérateur 3, ſurpaſſe de 1 le nombre 8 qui eſt le double de 4, quarré du ſecond dénominateur 2, car $9 = 2 \times 4 + 1 = 8 + 1$.

De même dans le quatriéme terme 289, quarré du quatriéme numérateur 17, ſurpaſſe de 1 le nombre 288, qui eſt le double de 144, quarré du quatriéme dénominateur 12, car $289 = 2 \times 144 + 1 = 288 + 1$.

Dans le ſixiéme terme 2801, quarré du ſixiéme numérateur 99, ſurpaſſe de 1 le nombre 9800, qui eſt le double de 4900, quarré du ſixiéme dénominateur 70, car $9801 = 2 \times 4900 + 1 = 9800 + 1$, & ainſi de tous les termes pairs à l'infini.

Cette série pour $\sqrt{2}$ est la série primitive & fondamentale, c'est une série incomplexe, dont chacun des termes exprime le rapport cherché alternativement par excès & par défaut.

C'est la premiére espéce du premier genre des séries, qui comprend sous lui une infinité d'espéces de séries différentes.

Cette premiére espéce peut se résoudre d'abord en deux séries complexes dérivées de celle-ci, l'une par addition continuelle faite au premier terme de la différence des termes excédans aux termes défaillans immédiatement suivans.

C'est la seconde espéce du premier genre ou la premiére série dérivée complexe par addition; le premier terme $\frac{1+}{1}$ est défaillant, $\frac{3-}{2}$ est excédant, le suivant $\frac{7+}{5}$ est défaillant, c'est $\frac{3}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3\times5-2\times7}{2\times5} = \frac{15-14}{10}$ donc leur différence est $\frac{1}{10}$, j'ajoute cette différence au premier terme $\frac{1+}{1}$, ce qui donne pour le premier terme complexe de la série dérivée par addition $\frac{1}{1} + \frac{1}{10}$.

Je prends ensuite $\frac{7}{5}$ & $\frac{41}{29}$ qui sont le 3e. & le 5e. terme défaillans; or $\frac{7\times29-5\times41}{5\times29} = \frac{203-205}{145} = + \frac{2}{145}$, c'est leur différence.

De même je prends le 5e. & le 7e. $\frac{41}{29}$ & $\frac{239}{169}$ qui sont tous deux défaillans $= \frac{41\times169-239\times29}{29\times169} = \frac{6929-6931}{5901} = + \frac{2}{5901}$, ce qui donne la premiére série dérivée $\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{2}{145} + \frac{2}{5901}$, &c. les dénominateurs $10 = 9 + 1$. $145 = 144 + 1$.

La troisiéme espéce du premier genre qui est la seconde série dérivée se forme par soustraction, elle se nomme complexe par soustraction, & se fait en ôtant continuellement du premier terme de celle-ci qui est tou-

jours le fecond de la férie primitive, les différences de chaque deux termes immédiatement fuivans.

Le premier terme eft $\frac{1+}{1}$ qui eft défaillant, le fecond terme eft $\frac{3-}{2}$ qui eft le premier des termes excédans, je prends la différence des deux termes qui fuivent ce fecond terme, c'eft $\frac{7}{5}$ & $\frac{17}{12}$ qui font le 4e. & le 5e. de la férie primitive; or $\frac{17}{12} - \frac{7}{5} = \frac{17 \times 5 - 12 \times 7}{12 \times 5}$ $= \frac{85 - 84}{60} = \frac{1}{60}$, c'eft le fecond terme.

De même j'ôte la différence du 5e. & du 6e. terme $\frac{41+}{29}$, $\frac{99-}{70}$, or $\frac{99}{70} - \frac{41}{29} = \frac{99 \times 29 - 41 \times 70}{70 \times 29}$ $= \frac{2871 - 2870}{2030} = \frac{1}{2030}$, c'eft le troifiéme terme de la feconde férie dérivée.

Seconde férie dérivée pour $\sqrt{2}$. $\frac{3}{2} - \frac{1}{60} - \frac{1}{2030}$, &c.

DES FORMULES.

Pour trouver les Séries rationelles infinies, primitives ou du premier genre.

Pour exprimer ou transformer les nombres irrationaux du fecond degré.

Soit propofé de trouver la raçine quarrée de 3. La premiére idée qui fe préfente à l'efprit, eft que 3 eft un quarré imparfait compris entre les deux quarrez parfaits 1, dont la racine eft 1, & 4, dont la racine eft 2; il eft évident que $\sqrt[2]{3}$ eft entre 1 & 2, plus grande que 1, & plus petite que 2, par conféquent $\sqrt{3}$ ne peut être repréfenté que par une fraction $\frac{a}{b}$ dont le numérateur a, foit plus grand que $1b$, & plus petit que $2b$; mais il eft démontré dans le 7, le 8 & 9 Livre des Elémens d'Euclide, que

lorsque a n'est pas mesuré par b, il est impossible que le quarré aa, soit mesuré par le quarré bb; d'où il suit que la fraction $\frac{a}{b}$ ne peut point être exacte & en même tems rationelle pour exprimer la valeur de $\sqrt{3}$. Ainsi tout ce que peut faire une intelligence finie telle qu'est l'esprit humain, se réduit à trouver deux séries en nombres entiers a & b, tels que $aa = 3bb \pm c$, ensorte que la différence c soit par excès, ou par défaut; soit la plus petite différence possible.

Premiére Série des Formules rationelles, ou Série primitive & fondamentale en lettres, pour $\sqrt{3}$

Premier terme. $\frac{a}{b}$

Second terme. $\frac{2a + 3b}{1a + 2b} = \frac{c}{d}$

Troisiéme terme. $\frac{2c + 3d}{1c + 2d} = \frac{e}{f}$

Quatriéme terme. $\frac{2e + 3f}{1e + 2f} = \frac{g}{h}$

Cinquiéme terme. $\frac{2g + 3h}{1g + 2h} = \frac{i}{k}$

Sixiéme terme.... &c. Ainsi de suite à l'infini.

Explication & formation de cette Série primitive.

Dans $\frac{a}{b}$ on peut substituer tel nombre qu'on voudra; mais le plus court chemin est de supposer $a =$ à la racine du quarré prochain plus petit ou plus grand que le quarré imparfait proposé; ici je suppose la racine 2 du quarré plus grand 4.

Dans

Dans le ſecond terme, il y a ſeulement deux lettres répétées *a* & *b*. avec des cœfficiens.

Dans le numérateur le cœfficient de *a* eſt la racine 2 du quarré prochain 4; dans le dénominateur le cœfficient de *b* eſt 2, car ces deux cœfficiens ſont toujours égaux.

Dans le numérateur, le cœfficient de *b* eſt toujours donné, c'eſt 3 dans ce cas, parce qu'on cherche la racine de 3; en général c'eſt l'expoſant de la puiſſance propoſée.

Le cœfficient de *a* dans le dénominateur eſt toujours l'unité conſtante 1 *a*, dans le ſecond terme.

Seconde Série des Formules rationelles compoſée des deux ſeules lettres a *&* b.

Pour former cette ſeconde ſérie dérivée de la ſérie primitive & fondamentale, J'ai d'abord les deux premiers termes tout formez.

Premier terme. $\frac{a}{b}$

Second terme. $\frac{2a+3b}{1a+2b}$

Le troiſiéme terme $\frac{7a+12b}{4a+7b}$ ſe forme ainſi.

Je ſubſtituë dans le troiſiéme terme $\frac{2c+3d}{1c+2d}$ de la ſérie fondamentale & primitive au lieu des lettres *c* & *d*, leur valeurs comme il ſuit,

$$\frac{c}{d} = \frac{7a+3b}{1a+7b}$$

$$\text{Or, } 2c = 4a+6b$$
$$+3d = 3a+6b$$
$$\text{Donc } \overline{2c+3d = 7a+12b}$$

$$\& \ 1c = 2a+3b$$
$$+2d = 2a+4b$$
$$\text{Donc } \overline{1c+2d = 4a+7b}$$

ce qui donne pour le 3e. terme $\frac{7a+12b}{4a+7b}$ comme ci-deſſus.

Analyſe. ggg

Il eſt facile de continuer les termes de cette ſérie par la même Méthode, c'eſt ainſi qu'on a trouvé les termes ſuivans.

Quatriéme terme. $\frac{27a + 45b}{15a + 26b}$

Cinquiéme terme. $\frac{97a + 168b}{56a + 97b}$

& ainſi de ſuite à l'infini.

On peut auſſi continuer directement cette ſeconde ſérie lorſqu'on a deux premiers termes comme il ſuit.

Puiſque dans le numérateur d'un terme ſuivant quelconque, le cœfficient de a eſt compoſé de deux nombres pris dans le numérateur du terme précédent ; ces deux nombres ſont le double du cœfficient de a avec le cœfficient de b, car dans le troiſiéme terme, le cœfficient de a dans le numérateur eſt $7 = 2 \times 2 + 3$, c'eſt-à-dire, $7a = 2 \times 2a + 3$. Or 2 & 3 ſont les cœfficiens du numérateur du terme précédent.

Dans le dénominateur le cœfficient de b eſt 7, toujours égal au cœfficient de ſon numérateur a.

Dans le dénominateur le cœfficient de a eſt 4 compoſé de deux nombres ; ſçavoir, du cœfficient 2 de a pris dans le numérateur du terme précédent & de 2 double de 1 cœfficient de a pris dans le dénominateur du terme précédent.

De même dans le quatriéme terme le cœfficient de a dans le dénominateur eſt 15 compoſé de $7 + 4 + 4$, qui ſont les cœfficiens de a pris dans le numérateur & dans le dénominateur du terme précédent.

Dans le numérateur le cœfficient de b, eſt toujours le triple du cœfficient de a trouvé pour le dénominateur du même terme, ainſi ce cœfficient eſt le dernier que l'on trouve ; ce qui ſe réduit à trouver les cœfficiens de a pour le numérateur & le dénominateur.

Exemple. Ayant le troisiéme terme $\frac{7a+12b}{4a+7b}$ pour trouver par son moyen le quatriéme terme, je dis $\overline{2\times 7 + 12} = 14 + 12 = 26$. ce qui donne pour le numérateur $26a$, & en même tems pour le dénominateur $26b$, puisqu'ils sont toujours égaux $\frac{26a+}{+26b}$.

Je prends dans le troisiéme terme les cœfficiens de a, $7a + \overline{2\times 4a} = 7 + 8a = 15a$, c'est le cœfficient du dénominateur a.

Enfin je triple ce cœfficient $15 \times 3 = 45$, c'est le cœfficient du numérateur $45\,b$. Ce qui donne pour le quatriéme terme cherché $\frac{26a+45b}{15a+26b}$.

Régle générale.

Soit le terme précédent $\frac{ca+3db}{da+cb}$

Le terme suivant sera,

$$\frac{\overline{2c+3d}\times a + \overline{6d+3c}\times b}{\overline{2d+c}\times a + \overline{2c+d}\times b.}$$

Soit $c = 7$. $d = 4$. $3d = 12$.
Donc $\overline{2c+3d}\times a = 14 + 12 = 26\,a$.
Et $\overline{2d+c}\times a = 8 + 7 = 15\,a$.

Remarque. Pour continuer cette seconde série, il suffit de trouver les deux cœfficiens de a; sçavoir, celui du numérateur & celui du dénominateur, car le cœfficient de a du numérateur, donne le cœfficient de b dans le dénominateur, qui lui est égal, & le cœfficient de a étant trouvé pour le dénominateur, son triple donne le cœfficient de b pour le numérateur.

L'usage de ces formules consiste à substituer des nombres à la place des lettres pour trouver en nombres entiers des séries rationelles qui expriment par approximation la

racine du quarré imparfait proposé, ce que j'appelle transformer la racine d'un quarré imparfait dans une série infinie rationelle.

Il y a trois genres de Formules pour les séries rationelles dans chacune des quatre séries primitives.

Le premier genre contient la série primitive & fondamentale comme la précédente, dont les termes se suivent par ordre, comme les nombres ordinaires 1. 2. 3. 4. 5. &c.

Le second genre contient la série des termes pris en progression Arithmetique quelconque, en sautant ou un terme, ou deux termes, ou trois ou quatre termes, &c. en progression Arithmétique quelconque différente de la progression naturelle des nombres, laquelle fait seule le premier genre, sans passer par les termes moïens.

Exemples. 1°. Pour sauter un terme ou plusieurs tout d'un coup sans passer par les termes moyens, il faut avoir des formules propres pour chacun des nombres de termes que l'on veut sauter : or ces formules ont toujours a & b tant au numérateur qu'au dénominateur ; ainsi toute la difficulté consiste à trouver les cœfficiens.

Pour trouver les cœfficiens, il faut d'abord trouver une série en nombres sur la série primitive & fondamentale en lettres pour le quarré imparfait proposé.

Ainsi pour $\sqrt{2}$, la série primitive en nombres est

$$\frac{1+}{1},\ \frac{3-}{2},\ \frac{7+}{5},\ \frac{17-}{12},\ \frac{41+}{29},\ \frac{99-}{70},\ \&c.$$

Exposans 1. 2. 3. 4. 5. 6. des termes.

Le premier terme étant $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$ la formule pour le troisiéme terme est $\frac{3a+4b}{2a+3b} = \frac{3+4}{2+3} = \frac{7}{5}$

Supposant le troisiéme terme $= \frac{a}{b}$, $= \frac{7}{5}$, la formule

$\frac{3a+4b}{2a+3b} = \frac{3\times7+4\times5}{2\times7+3\times5} = \frac{21+20}{14+15} = \frac{41}{29}$. Donc le cinquiéme terme $= \frac{41}{29}$.

Or le second terme de la série $\frac{3}{2}$ donne ces cœfficiens, car le numérateur 3 donne dans la formule le cœfficient $3a$ du numérateur, & le cœfficient $3b$ du dénominateur. Le dénominateur 2 donne le cœfficient $2a$, & son double donne le cœfficient $4b$ du numérateur, de même prenant un terme quelconque pour premier terme de la série, on aura par la même forme le troisiéme terme suivant, en sautant le terme moïen suivant la formule exemplaire $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+4b}{2a+3b}$.

2°. Pour sauter deux termes, la formule exemplaire est $\frac{a}{b}$ & $\frac{7a+10b}{5a+7b}$ les cœfficiens sont tirés du troisiéme terme de la série $\frac{7}{5}$ car $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}$, & $\frac{7a+10b}{5a+7b} = \frac{7+10}{5+7} = \frac{17}{12}$.

3°. Pour sauter trois termes, la formule exemplaire est $\frac{a}{-}$ & $\frac{17a+24b}{12+17b}$ les cœfficiens sont tirés du quatriéme terme de la série numérique $\frac{17}{12}$. Or $\frac{17a+24b}{12a+17b} = \frac{17+24}{12+17} = \frac{41}{29}$.

4°. Pour sauter quatre termes, la formule exemplaire est $\frac{a}{b}$ & $\frac{41a+58b}{29a+41b} = \frac{41+58}{29+41} = \frac{99}{70}$.

On peut continuer à trouver des formules à l'infini pour sauter tel nombre de termes qu'on voudra ; ce qui abrége la formation de la série & la rend plus convergente, puisque les termes les plus éloignez donnent toujours une approximation plus grande de la racine.

Si on prend un terme éloigné dans la premiére série fondamentale pour premier terme de la série du second

genre où l'on saute plusieurs termes en progression arithmétique, dès le second terme on avancera beaucoup sans passer par les termes moyens; mais on avancera encore davantage en sautant les termes en la progression géométrique qui suit, qui est le troisiéme genre des formules.

Le troisiéme genre contient les formules pour sauter un nombres de termes moyens en progression géométrique sans passer par les termes moyens.

Ce troisiéme genre comprend toutes les progressions géométriques à l'infini; il avance à pas de géans & rend la série beaucoup plus convergente, & par conséquent les termes plus approchés que les deux genres précédens. Car la formule de la progression géométrique double, donne un terme double du précédent. La progression triple, donne un terme triple. La progression quadruple, donne un terme quadruple, &c.

La formule exemplaire, générale & primitive pour sauter un nombre de termes en progression géométrique double, sans passer par les termes moyens est $\frac{a}{b}$ & $\frac{2aa+1}{2ab}$.

Lorque le terme simple est impair, le numérateur de la formule est $2aa+1$. Mais lorsque le terme simple est pair, la formule est $2aa-1$. c'est la plus simple, la plus prompte & la plus élégante de toutes les formules générales. C'est par son moyen qu'on a construit la table suivante.

Table générale des formules pour trouver les termes en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

Progr. géom.		
Simple	*numérateur*	$1x^1$
	dénominateur	$1y$
Double	*numérat.*	$2x^2 \pm 1$
	dénomin.	$2x^1y$
Triple	*numérat.*	$4x^3 \pm 3x^1$
	dénomin.	$4x^2y \pm 1y$
Quadruple		$8x^4 \pm 8x^2 + 1$
		$8x^3y \pm 4x^1y + 1y$
Quintuple		$16x^5 \pm 20x^3 + 5x$
		$16x^4y \pm 12x^2y + 1y$
Sextuple		$32x^6 \pm 48x^4 + 18x^2 \pm 1$
		$32x^5y \pm 32x^3y + 6x^1y$
Septuple		$64x^7 \pm 112x^5 + 56x^3 \pm 7x$
		$64x^6y \pm 80x^4y + 24x^2y \pm 1y$
Octuple.		$128x^8 \pm 256x^6 + 160x^4 \pm 32x^2 + 1$
		$128x^7y \pm 192x^5y + 80x^3y \pm 8x^1y$
Noncuple		$256x^9 \pm 576x^7 + 432x^5 \pm 120x^3 + 9x$
		$256x^8y \pm 448x^6y + 240x^4y \pm 40x^2y + 1y$
Décuple		$512x^{10} \pm 1280x^8 + 1120x^6 \pm 400x^4 + 50x^2 \pm 1$
		$512x^9y \pm 1024x^7y + 672x^5y \pm 160x^3y + 10x^1y$
Ondécuple		$1024x^{11} \pm 2816x^9 + 2816x^7 \pm 1232x^5 + 220x^3 \pm 11x$
		$1024x^{10}y \pm 2304x^8y + 1792x^6y \pm 560x^4y + 60x^2y \pm 1y$
dodécuple		$2048x^{12} \pm 6144x^{10} \pm 6912x^8 \pm 3584x^6 + 840x^4 \pm 72x^2$
		$2048x^{11}y \pm 5120x^9y + 4608x^7y \pm 1792x^5y + 280x^3y \pm 12x^1y$

&c. &c. &c. . . .

Table des numérateurs des termes en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

2de. colon.	3e. colon.	4e. colon.	5e. colon.	6e. colon.	7e. col.
$1x^1$					
$2x^2$ ±	1				
$4x^3$ ±	$3x^1$				
$8x^4$ ±	$8x^2$ +	1			
$16x^5$ ±	$20x^3$ +	$5x$			
$32x^6$ ±	$48x^4$ +	$18x^2$ ±	1		
$64x^7$ ±	$112x^5$ +	$56x^3$ ±	$7x$		
$128x^8$ ±	$256x^6$ +	$160x^4$ ±	$32x^2$ +	1	
$256x^9$ ±	$576x^7$ +	$432x^5$ ±	$120x^3$ +	$9x$	
$512x^{10}$ ±	$1280x^8$ +	$1120x^6$ ±	$400x^4$ +	$50x^2$ ±	1
$1024x^{11}$ ±	$2816x^9$ +	$2816x^7$ ±	$1232x^5$ +	$220x^3$ ±	$11x$
$2048x^{12}$ ±	$6144x^{10}$ +	$6912x^8$ ±	$3584x^6$ +	$840x^4$ ±	$72x^2$
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

&c.

Table des dénominateurs des termes en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

1re. colon.	2de. colon.	3e. colon.	4e. colon.	5e. colon.	6e. colon.	7e. col.
Simple	$1y$					
Double	$2x^1y$					
Triple	$4x^2y$ ±	$1y$				
Quadruple	$8x^3y$ ±	$4x^1y$				
Quintuple	$16x^4y$ ±	$12x^2y$ +	$1y$			
Sextuple	$32x^5y$ ±	$32x^3y$ +	$6x^1y$			
Septuple	$64x^6y$ ±	$80x^4y$ +	$24x^2y$ ±	$1y$		
Octuple	$128x^7y$ ±	$192x^5y$ +	$80x^3y$ ±	$8x^1y$		
Noncuple	$256x^8y$ ±	$448x^6y$ +	$240x^4y$ ±	$40x^2y$ +	$1y$	
Décuple	$512x^9y$ ±	$1024x^7y$ +	$672x^5y$ ±	$160x^3y$ +	$10x^1y$	
Ondécuple	$1024x^{10}y$ ±	$2304x^8y$ +	$1792x^6y$ ±	$560x^4y$ +	$60x^2y$ ±	$1y$
Dodécuple	$2048x^{11}y$ ±	$5120x^9y$ +	$4608x^7y$ ±	$1792x^5y$ +	$280x^3y$ ±	$12x^1y$
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Table des cœfficiens des numérateurs.

1					
2	1				
4	3				
8	8	1			
16	20	5			
32	48	18	1		
64	112	56	7		
128	256	160	32	1	
256	576	432	120	9	
512	1280	1120	400	50	1
1024	2816	2816	1232	220	11
2044	6144	6912	3584	840	72

Table des cœfficiens des dénominateurs.

1					
2					
4	1				
8	4				
16	12	1			
32	32	6			
64	80	24	1		
128	192	80	8		
256	448	240	40	1	
512	1024	672	160	10	
1024	2304	1792	560	60	1
2048	5120	4608	1792	280	12

Conſtruction de la Table des Formules rationelles, des termes de la ſérie fondamentale en progreſſion géométrique.

Comme chaque terme de la ſérie contient une fraction dont le premier terme eſt le numérateur, & le ſecond terme le dénominateur pris dans la ſérie primitive pour chaque cas particulier.

Je fais deux tables dont l'une contient les numérateurs de la ſérie primitive pris en progreſſion géométrique ſans paſſer par les termes moïens.

La ſeconde table contient les dénominateurs correſpondans au numérateur de chaque terme.

On peut continuer ces tables à l'infini, puiſqu'il y a une infinité de progreſſions géométriques à l'infini ; je me borne ici au douziéme terme de la progreſſion, ce qui eſt ſuffiſant dans la pratique.

Explication & formation de la Table des numérateurs pour la Série rationelle de $\sqrt{2}$.

Cette table contient ſept colonnes.

La premiére colonne contient les expoſans ou les noms des progreſſions géométriques, ſimple, double, triple, quadruple, &c. dodécuple.

Toutes les autres colonnes contiennent les puiſſances de x priſes de ſuite avec des cœfficiens ; mais ces puiſſande x, ne commencent qu'après un interval occupé par l'unité pour aller d'une colonne à la ſuivante.

La ſeconde colonne contient les puiſſances de x priſes de ſuite avec des cœfficiens qui ſont les puiſſances de la progreſſion géométrique de 2, expoſant du degré de la racine cherchée qui commence par l'unité pour commencer d'auſſi loin qu'il eſt poſſible, c'eſt 1. 2. 4. 8. 16. 32: 64. &c.

La troiſiéme colonne qui commence par l'unité à la ſeconde cellule vis-à-vis le double, contient dans les cel-

lules ſuivantes les puiſſances de x à commencer par la troiſiéme qui en contient la premiére puiſſance x'. Comme les autres puiſſances ſont de ſuite & leurs expoſans croiſſent toujours de l'unité, il n'y a aucune difficulté dans leur formation.

Dans cette troiſiéme colonne, toute la difficulté conſiſte à trouver les cœfficiens numériques de chacune de ces puiſſances de x, le premier eſt l'unité que j'écris dans la ſeconde cellule. Le ſecond eſt 3 égal à la ſomme 1 + 2. Or 1 eſt le premier cœfficient, ou le cœfficient du premier terme précédent dans la même troiſiéme colonne, & 2 eſt le cœfficient qui eſt à côté dans la premiére colonne, auquel j'ajoute la premiére puiſſance de x'; ainſi j'ai pour ſecond terme $3x'$ qui répond à la progreſſion triple.

Pour avoir le troiſiéme terme 8 , je prends la ſomme des deux termes précédens de la même colonne 1 + 3 = 4, plus le terme 4 à côté du dernier dans la colonne précédente. Ce qui donne $\overline{1 + 3} + 4 = 8$. avec la ſeconde puiſſance de x'. c'eſt $8x^2$.

Le quatriéme terme eſt $20\,x^3$; or $20 = \overline{1 + 3 + 8} + 8$. Ce dernier 8 eſt dans la colonne précédente à côté du terme précédent.

Le cinquiéme terme $48x^4$ vient de $\overline{1 + 3 + 8 + 20} + 16$, ce 16 eſt à côté de 20. & ainſi des autres.

La quatriéme colonne commence vis-à-vis le quadruple à la quatriéme cellule, 1, $5x$, $18x^2$, $56x^3$, $160x^4$, &c. Ce ſont les puiſſances de ſuite de x avec des cœfficiens dont le premier eſt l'unité, le ſecond 5 vient du cœfficient de la même colonne 1, & des deux cœfficiens pris de la colonne précédente 1 + 3 = 4, en laiſſant 8 qui eſt à côté du terme précédent de la quatriéme colonne.

Le troiſiéme cœfficient 18 vient de 1 + 5 = 6 pris dans la même quatriéme colonne précédente. Or 6 + 12 = 18.

Le quatriéme cœfficient 56 vient de 1 + 5 + 18

$= 24$ pris dans la quatriéme colonne, & de $1 + 3. + 8 + 20 = 32$ pris dans la troisiéme colonne. Or $24 + 32 = 56$.

Il est facile de continuer de même cette quatriême colonne & les suivantes par la même Méthode.

Explication & formation de la Table des dénominateurs des termes de la Série primitive en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

Cette Table contient sept colonnes comme celle des numérateurs.

La premiére colonne contient les exposans ou les noms des progressions géométriques, double, triple, quadruple, &c.

Les autres colonnes contiennent les puissances de x prises de suite multipliées par y, avec des cœfficiens numériques.

Les cœfficiens numériques de la seconde colonne sont 1. 2. 4. 8. 16. &c. Ce sont les puissances de 2, à commencer par l'unité.

Les cœfficiens de la troisiéme colonne 1. 4. 12, 31. &c. se forment ainsi.

Le premier cœfficient 1 est à la troisiéme cellule vis-à-vis du triple. C'est l'unité.

Le second cœfficient 4, $= 1 + \overline{1 + 2}$. c'est-à-dire 4 égale le cœfficient 1 qui le précéde dans la troisiéme colonne, ajouté à la somme des termes de la colonne précédente $1 + 2$ jusqu'au terme du rang précédent exclusivement,

Le troisiéme cœfficient $12 = \overline{1 + 4} + \overline{1 + 2 + 4}. = 5$ somme des termes précédens de cette troisiéme colonne, plus 7 somme des termes précédens jusqu'au pénultiéme rang dans la seconde colonne.

Le 4me. cœfficient $32 = \overline{1 + 4 + 12} + \overline{1 + 2 + 4 + 8} = 17 + 15$, somme des termes précédens dans cette

colonne & dans celle d'à côté non compris celui du pénultiéme rang, &c. ainsi des autres.

La quatriéme colonne qui commence à la cinquiéme cellule vis-à-vis le quadruple par l'unité est 1, 6. 24. 80. &c. Le premier cœfficient est 1.

Le second cœfficient $6 = 1 + \overline{1 + 4}$, c'est la somme du cœfficient précédent de la même colonne & de celle qui précéde non compris le rang précédent.

Le troisiéme cœfficient $24 = \overline{1 + 6} + \overline{1 + 4 + 12}$ ou $7 + 17$ qui est la somme des cœfficiens précédens de la même colonne & de celle qui la précéde non compris le rang précédent.

Remarque. 1°. Dans les numérateurs contenus dans la Table, le dernier cœfficient est toujours impair; ainsi dans le simple où il n'y a qu'un terme, c'est $1x$ qui est impair.

Dans le double c'est 1, l'unité simple, dans le triple c'est $3x'$, dans le quadruple 1, dans le quintuple $5x$, &c.

De sorte qu'il se trouve toujours une unité simple pour dernier chifre d'un terme compris entre deux cœfficiens de la premiére puissance x', lesquels cœfficiens sont égaux à l'exposant du terme.

2°. Les seconds termes sont tous pairs, & même tous les termes excepté le dernier chifre ou le dernier terme seul.

3°. Dans la Table des dénominateurs, chacun est le cœfficient ou le multiplicateur de y ou de quelque puissance de x multipliée par y.

Le cœfficient des termes pairs, est toujours un nombre pair, même dans le double qui n'a qu'un seul terme, & il est égal à l'exposant du terme.

Mais le cœfficient de chaque dernier terme impair est l'unité.

Tous les autres cœfficiens sont des nombres impairs.

Autre Méthode pour trouver les cœfficiens du numérateur & du dénominateur des termes en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

J'éleve le binôme $1x + 1y$ à la puissance qui a le même exposant de la progression géométrique désirée.

Pour la progression double, j'éleve le binôme $1x + 1y$ à la seconde puissance,

$$\begin{array}{l} \times\, 1x + 1y \\ \hline 1x^2 + 1x'y' \\ \quad + 1x'y' + 1y^2 \\ \hline 1x^2 + 2x'y' + 1y^2 \end{array}$$

je prends les termes alternatifs pour en faire les deux termes de la fraction de la formule, le premier terme $1x^2$ & le troisiéme terme $1y^2$ font le numérateur.

Après les avoir préparé comme il suit, je multiplie l'exposant 2 de la progression double donnée par le cœfficient 1, j'ai $2 \times 1 = 2$ cœfficient du numérateur $2x^2$, & je retranche y^2 du dernier terme, laissant l'unité seule, ce qui donne le numérateur $2x^2 + 1$.

Le second terme donne le dénominateur $2x'y'$, ce qui donne $\frac{2x^2+1}{2x'y'}$ pour le double.

De même pour la formule de la progression quadruple dont l'exposant est 4, j'éleve le binôme $1x + 1y$ à la quatriéme puissance

$1x^2 + 2x'y' + 1y^2$. Seconde puissance.

$$\begin{array}{l} \times\, 1x^2 + 2x'y' + 1y^2. \\ \hline 1x^4 + 2x^3y' + 1x^2y^2 \\ \quad + 2x^3y' + 4x^2y^2 + 2x'y^3 \\ \quad\quad + 1x^2y^2 + 2x'y^3 + 1y^4 \\ \hline 1x^4 + 4x^3y' + 6x^2y^2 + 4x'y^3 + 1y^4. \end{array}$$

je prends les termes alternatifs, sçavoir le 1er. le 3e. le 5e. & autres impairs pour en faire le numérateur après les

avoir préparé comme ci-dessus ; & les termes pairs, sçavoir le second, le quatriéme & autres pairs pour en faire le dénominateur de la formule qui suit.

$$\frac{8x^4 \pm 8x^2 + 1.}{8x^3y \pm 4x^1y^1.}$$

Or cette formule vient des

termes impairs.		*termes pairs.*	
$1x^4$		$4x^3y^1$	
$6x^2y^1$		$4x^1y^3$	
$1y^4$			
8	1e. *somme alternative des cœfficiens.*	8	2e. *somme alternative des cœfficiens.*
Du milieu & des extrêmes.		*Des termes moïens.*	

Ainsi le premier terme du numérateur & du dénominateur ont 8 pour cœfficient qui est égal à chacune des sommes alternatives des cœfficiens, ce qui donne.

$$\frac{8x^4 \pm 8x^2 + 1}{8x^3y^1 \pm 4x^1y^1}$$ Formule pour le quadruple.

C'est-à-dire, le premier terme impair donne le premier terme du numérateur, & le premier terme pair donne le premier terme du dénominateur dont les cœfficiens sont changez & égaux à chacune des sommes alternatives des cœfficiens.

Je retranche dans tous les termes pairs les puissances de y, en laissant leurs cœfficiens ; de sorte que dans le dernier terme qui est la haute puissance de y, j'ai seulement 1, au lieu de $1y^4$.

Dans les termes pairs, je laisse seulement la premiére puissance de y, c'est y^1, & je réduis à cette puissance les autres puissances de y lorsqu'il s'y en trouve.

Il en est de même dans la formule de la progression sextuple. $\frac{32x^6 \pm 48x^4 + 18x^2 \pm 1.}{32x^5y \pm 32x^3 + 6x^1y^1.}$ & dans toutes les autres formules.

Mais

Mais il y a de l'art à déterminer les cœfficiens des autres termes, comme nous l'allons voir.

Examen & formation directe des cœfficiens.

Pour connoître la nature de la progression qui regne dans ces cœfficiens, je les écris dans leur ordre, dans des cellules égales disposées sur un triangle rectangle comme ci-dessus dans la quatiéme table, afin de voir comment les mêmes nombres se répondent en ligne diagonale.

1°. Je trouve que les cœfficiens des numérateurs considérés en ligne diagonale donnent plusieurs progressions arithmétiques; ces diagonales sont, 1°. tous, les premiers chifres de chaque colonne, 2°. tous les seconds, 3°. tous les troisiémes termes, &c.

La premiére diagonale est 1. 1. 1. 1. &c. dont la différence est zéro, c'est la premiére progression arithmétique de zéro degré.

La seconde diagonale est 3. 5. 7. 9. 11. &c. dont la différence constante est 2, c'est la seconde progression arithmétique du 1er. degré, & la série des nombres impairs.

La troisiéme diagonale est 8. 18. 32. 50. &c. c'est la troisiéme progression arithmétique du second degré, dont la différence constante est 4. Il est facile de trouver de même les progressions qui regnent dans les autres diagonales; mais il est plus facile pour les trouver d'écrire de suite sur une ligne tous les premiers nombres, ensuite tous les seconds, & continuant ainsi jusqu'à la fin, & négligeant les premiers nombres de chaque rang, parce que ce sont les puissances de 2, & prenant par soustraction les différences de chaque rang, on trouvera le degré de la progression & la différence constante, comme il est expliqué ci-dessus dans le Traité des progressions arithmétiques.

2°. On trouvera de même que les cœfficiens des dénominateurs pris en diagonale sont 1. 1. 1. 1. &c. dont

la différence constante = o, c'est une progression de zéro degré.

La seconde progression arithmétique des cœfficiens pris en diagonale, est 2. 4. 6. 8. 10. &c. dont la premiére différence constante = 2, les nombres générateurs sont 2 & 2, cette progression est du premier degré.

La troisiéme progression des cœfficiens pris en diagonale est 4. 12. 24. 40. 60. dont la seconde différence constante est 4, elle est du second degré, ses nombres générateurs sont 4. 8. 4.

La quatriéme progression prise en diagonale est 8. 32. 80. 160. 280. 448. &c. la différence constante = 8. ses nombres générateurs sont 8. 24. 24. 8.

Autre formation des cœfficiens.

La seconde colonne contient les puissances de la progression géométrique double de 2, c'est $1x$, $2x^2$, $4x^3$, $8x^4$, $16x^5$, &c. en général pour l'exposant p d'une progression quelconque, le 1er. terme = $2^{p-1} x^p$, ainsi pour le 7e. terme j'ai $2^{7-1} = 2^6 = 64 x^7$.

Dans la table des numérateurs la troisiéme colonne 1. 3. 8. 20. se forme ainsi.

	cœfficiens.		suite naturelle des nombres.		puissances de 2.
double	1	=	1.		
triple	3	=	3	×	1
quadruple	8	=	4	×	2
quintuple	20	=	5	×	4
sextuple	48	=	6	×	8
&c.	112	=	7	×	16
	256	=	8	×	32
	576	=	9	×	64

ou bien

cœfficiens.		multiplicateur constant.		cœfficiens précédens.		puissances de 2.
1	=	1				
3	=	2	×	1	+	1
8	=	2	×	3	+	2
20	=	2	×	8	+	4
48	=	2	×	20	+	8
112	=	2	×	48	+	16
256	=	2	×	112	+	32
576	=	2	×	256	+	64

Formule $p - n \times 2^{p-n}$, p eſt l'expoſant du terme n, expoſant de la colonne, ſoit le quadruple dont $p = 4$, j'ai $4 - 2 \times 2^{4-2}$ ou $2 \times 4 = 8$.

Dans la Table des numérateurs, la quatriéme colonne des cœfficiens commence au quadruple c'eſt 1. 5. 18. 56. &c. qui ſe forment ainſi.

quadruple	1 =	1	
quintuple	5 =	4 × 1	+ 1
ſextuple	18 =	8 × 2	+ 2
ſeptuple	56 =	16 × 3	+ 8
octuple	160 =	32 × 4	+ 32.
&c.	&c.	&c.	&c.

Formule pour trouver tout d'un coup un terme quelconque, $p - n \times 2^{p-n-1}$, ſoit p l'expoſant du terme cherché $= 7$ pour le ſeptuple, & ſoit n, l'expoſant de la colonne $= 4$.

J'ai $p - n = 7 - 4 = 3$.
$2^{p-n-1} = 2^{7-3} = 2^4 = 16$.
or $3 \times 16 = 56$, donc le cœfficient du ſeptuple eſt $56\,x^3$.

Or l'expoſant ^{3} de la puiſſance de $x = 7 - 4 = 3$, ou $p - n$ trouvé ci-deſſus $= 3$.

La cinquiéme colonne des cœfficiens des numérateurs commence au ſeptuple, c'eſt 1. 7. 32. 120. 400.

Sextuple	1 =	1
ſeptuple	7 =	4 × 1 + 3.
octuple	32 =	8 × 4
noncuple	120 =	12 × 10.
décuple	400 =	20 × 20.
ondécup.	1232 =	12 × 100 + 32 ou 400 × 3 + 32.
dodécup.	3584 =	1232 × 2 + 1120.
&c.	&c.	&c.

La Série des cœfficiens de la sixiéme colonne des numérateurs commence à l'octuple, c'est 1. 9. 50. 220. 840. &c.

octuple	$= 1 = 1$	*ou* 1×1
noncuple	$= 9 = 4 + 4 + 1$	*ou* 3×3
décuple	$50 = 5 \times 10$, . .	*ou* 5×10
ondécuple	$220 = 6 \times 70$ . . .	*ou* $7 \times 30 + 10$
dodécuple	$840 = 8 \times 80$ . .	*ou* $9 \times 90 + 30$
		ou $7 \times 90 + 10$.
&c.	&c.	&c.

Pour les cœfficiens des dénominateurs, la seconde colonne de la table qui est la premiére colonne des cœfficiens numériques est $1\,y$. $2\,x^1 y$. $4\,x^2 y$. $8\,x^3 y$. &c.

Les nombres font la progression géométrique double ou les puissances de 2, à commencer par l'unité.

On pourra trouver tout d'un coup le terme de cette progression correspondant à un exposant quelconque p, par cette formule $2^{p-1} \times x^{p-1} \times y$.

Si $p = 7$; $2^{p-1} = 2^6 = 32\,x^6\,y$

La troisiéme colonne 1. 4. 12. 32. 80. &c. sont formez ainsi.

triple	$1 = 1 \times 1$
quadruple	$4 = 2 \times 2$
quintuple	$12 = 3 \times 4$
sextuple	$32 = 4 \times 8$
septuple	$80 = 5 \times 16$
octuple	$192 = 6 \times 32$
noncuple	$448 = 7 \times 64$
décuple	$1024 = 8 \times 128$
ondécuple	$2304 = 9 \times 256$
dodécuple	$5120 = 10 \times 512$.

Donc l'exposant quelconque de la progression étant $= p$, le cœfficient numérique du terme correspondant dans la troisiéme colonne, est $p - 2 \times 2^{p-3} \times x^{p-3}\,y$.

Ainsi soit $p = 7$, on aura $p - 2 = 7 - 2 = 5$, & $2^{p-3} = 2^4 = 5 \times 16 = 80$.
3. exposant de la colonne.

Donc $p - 2 \times 2^{p-3} = 80$, auquel ajoutant $x^{p-3} y$, j'ai $80 x^4 y$ pour le septiéme terme cherché.

La série des cœfficiens de la quatriéme colonne est 1. 6. 24. 80. qui se forment ainsi en commençant au quintuple.

quintuple	$1 = 1 \times 1 \times 0$
sextuple	$6 = 2 \times 3 \times 1$
septuple	$24 = 3 \times 4 \times 2$
octuple	$80 = 4 \times 5 \times 4$
noncuple	$240 = 5 \times 6 \times 8$
décuple	$672 = 6 \times 7 \times 16$
ondécuple	$1792 = 7 \times 8 \times 32$
dodécuple	$4608 = 8 \times 9 \times 64$

$$\begin{array}{l} p - 4 \\ \times\; p - 3 \\ \hline p^2 - 4p \\ \quad - 3p + 12 \\ \hline p^2 - 7p + 12 \end{array}$$

L'exposant quelconque d'un terme de la progression étant $= p$, le terme correspondant dans la quatriéme colonne sera $p - 4 \times p - 3 \times 2^{p-6} \times x^{p-1} \times y$.

Soit $p = 7$. $p - 4 = 7 - 4 = 3$.
$p - 3 = 7 - 3 = 4$, or $3 \times 4 = 12$.
$\times\, 2^{p-6} = 2^{7-6} = 2$. or $12 \times 2 = 24$, c'est le cœfficien numérique cherché.
$x^{p-1} = x^{7-1} = x^6 \times y = x^6 y$.
donc le 7e. terme de la progression est $24\, x^6 y$.

Autrement. Soit l'exposant $= p = 7$, le terme est
$pp - 7p + 12 \times 2^{p-6} \times x^{p-1} \times y$.
$pp = 49$, $-7p = -49 = 0$.
$+ 12 \times 2^{p-6} = 24 x^6 y$. Voyez la multiplication ci-dessus.

La série des cœfficiens de la cinquiéme colonne qui commence au septuple est 1. 8. 40. 160. &c. se forme ainsi.

septuple $1 = 1 \times 1$
octuple $8 = 2 \times 4$, *ou* $1 + 1 \times 2 \times 2$.
noncuple $40 = 5 \times 8$, *ou* $4 + 1 \times 4 \times 2$.
décuple $160 = 10 \times 16$, *ou* $5 \times 2 \times 16$ *ou* $8 + 2 \times 16$
ondécuple $560 = 5 \times 7 \times 16$, *ou* $17 \times 32 + 16$,
dodécuple $1792 = 12 \times 64 + 24$, *ou* $7 \times 8 \times 32$,

Pour avoir un terme quelconque du cœfficient, soit p l'exposant du terme cherché $= 9$, les exposans négatifs de la colonne sont 5, 4 & le double 8.

$p - 5 \times p - 4 \times 2^{p-8} \times x^{p-8} \times y$
$9 - 5 \times 9 - 4 \times 2^1 \times x^1 \times y$
ou $4 \times 5 \times 2 = 40 \times x^1 y$, ou $40\, x^1 y$.

Soit $p = 12$, & les exposans négatifs -5, -4, -8, on aura $12 - 5 \times 12 - 4 \times 2^{12-7} \times x^{12-7} \times y$.
ou $7 \times 8 \times 32 \times x^4 y$.
or $7 \times 8 = 56$, & $56 \times 32 = 1792$.

Soit $p = 11$. $11 - 6 \times 11 - 4 \times 2^{p-7}$.

ou $5 \times 7 \times 2^{11-7}$ (ou $2^4 = 16$) $\times x^{p-7} \times y$

$35 \times 16 = 560\, x^4 y$.

La série de la sixiéme colonne est 1. 10. 60. 280. 1120. à commencer au noncuple & se forme ainsi.

noncuple $1 = 1 \times 1 \times 0$
décuple $10 = 1 \times 1 \times 10$
ondécuple $60 = 2 \times 3 \times 10$
dodécuple $280 = 4 \times 7 \times 10$
trédécuple $1120 = 8 \times 14 \times 10$.

Il est facile de trouver la formule pour avoir un terme quelconque.

Remarque. Ayant trouvé les cœfficiens des numéra-

teurs, on aura par ſimple addition du terme qui eſt à côté les cœfficiens des dénominateurs pour la colonne qui a le même expoſant.

Troiſiéme colonne des numérateurs.			Troiſiéme colonne des dénominateurs.
double	1	. . .	
triple	3	*donne*	$1 = 1 + 0$
quadruple	8	. . . . .	$4 = 1 + 3$
quintuple	20	. . . . .	$12 = 4 + 8$
ſextuple	48	. . . . .	$32 = 12 + 20$
ſeptuple	112	. . . . .	$80 = 32 + 48$

Régle pour les ſignes des formules en progreſſion géométrique.

La table générale contient dans tous les termes pairs les deux ſignes $\pm$, parce que ces formules peuvent ſervir généralement pour le binôme poſitif $a + b$, & pour le binôme négatif $a - b$, ainſi il faut ſuivre la régle générale des ſignes pour les puiſſances de ces deux binômes; or dans les puiſſances du binôme poſitif, tous les termes ont le ſigne $+$, mais dans les puiſſances du binôme négatif, les termes pairs ſont précédez du ſigne $-$, & tous les termes impairs ſont précédez du ſigne $+$.

Méthode très-promte pour continuer la ſérie des Formules pour $\sqrt{3}$.

Soit donné le cinquiéme terme $\frac{362}{209} = \frac{a}{b}$. Pour avoir le ſixiéme terme, je ſubſtituë dans la formule $\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$ les valeurs trouvées ci-deſſus de a & de b dont je forme deux colonnes.

$2a = 724$	$1a = 362$
$3b = 627$	$2b = 418$
$2a + 3b = 1351$	Donc $1a + 2b = 780.$

Donc le ſixiéme terme eſt $\frac{1351}{780} = \frac{a}{b}$.

Pour trouver le ſeptiéme terme ſur la même formule, je ſubſtituë la derniére valeur de ces lettres *a* & *b*.

$2a = 27.02$	$1a = 1351$
$3b = 23.40$	$2b = 1560$
$2a + 3b = 50.42$	$1a + 2b = 2911$

ce qui donne le ſeptiéme terme $\frac{5042}{2911} = \frac{a}{b}$.

Je prends ces valeurs de *a* & *b* pour avoir par ſubſtitution.

$2a = 10084$	$1a = 5042$
$3b = 8733$	$26 = 5822$
$2a + 3b = 18817$	$1a + 2b = 10864$

ce qui donne par le huitiéme terme $\frac{18817}{10864}$.

Uſage de la Table générale des Formules des termes en progreſſion géométrique.

La premiére table des termes en progreſſion géométrique eſt celle dont nous parlons ici ; elle contient pour chaque progreſſion le numérateur avec le dénominateur, & les deux tables ſuivantes où ils ſont ſéparez ne ſervent qu'à éclaircir la conſtruction.

Exemple. Soit la ſérie primitive pour $\sqrt{}$, ſçavoir

1e. 2^{d}. 3e. 4e. 5e. 6e.

$\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{19}$, $\frac{99}{70}$.

Pour continuer indéfiniment cette ſérie en ſautanr d'un terme à un autre en progreſſion géométrique ſans paſſer par les termes moyens. Par exemple, pour trouver un terme en progreſſion géométrique triple.

Si

Si je prends le premier terme $\frac{1}{1}$ dont l'exposant est impair pour premier terme de la progression 1. 3. 6. 9. 12. &c.

Je prendrai dans la table les formules qui ont ces nombres pour exposans, il suffit même de prendre les deux premiéres.

Simple. Triple.

$$\frac{1x}{1y} \qquad \frac{4x^3 + 3x^1}{4x^2y + 1y}$$

Le premier terme de la série $\frac{1}{1} = \frac{x}{y}$, donne $x = 1$ & $y = 1$. Substituant ces valeurs dans les formules, j'ai

$$\frac{1 \times 1}{1 \times 1} \qquad \frac{4 \times 1 + 3 \times 1}{4 \times 1 \times 1 + 1 \times 1},$$

1er. Triple.

ce qui donne $\frac{1}{1}$ $\frac{4+3}{4+1} = \frac{7}{5}$. 3e. terme.

Si je veux continuer la série sur la même formule ; je suppose $\frac{7}{5} = \frac{x}{y}$, & substituant cette valeur dans la formule triple $\frac{4x^3 + 3x^1}{4x^2y + 1y}$, j'ai $\frac{4 \times 73 + 3 \times 7}{4 \times 49 \times 5 + 1 \times 5}$

$= \frac{4 \times 343 + 21}{4 \times 245 + 5} = \frac{1372 + 21}{980 + 5} = \frac{1393}{985}$ 6e. terme & ainsi de suite.

Si je prends pour premier terme de la progression triple celui qui est le second dans la série primitive $\frac{3}{2} = \frac{x}{y}$, dont l'exposant est pair, je trouverai mettant le signe − dans la formule des termes triples à exposant pair, la 6e. car $3 \times 2 = 6$, la 18e. car $3 \times 6 = 18$. la 54e. car $3 \times 18 = 54$, &c. Mais il suffit d'en trouver d'abord une qui est ici la sixiéme & de réïterer à substituer des nombres en la place des lettres comme dans l'exemple précédent, pour avoir toutes ces progressions.

1e. 3e. formule, ou triple avec le signe —

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4x^3 - 3x'}{4x^2y - 1y} = \frac{4\times 27 - 3\times 3}{4\times 9\times 2 - 1\times 2}$$

$$= \frac{108 - 9}{72 - 2} = \frac{99}{70}.$$ C'est le sixiéme terme.

J'observe de mettre toujours le signe — dans la formule de la progression géométrique lorsque l'exposant du terme pris dans la série primitive pour le premier de celle-ci est pair.

6e. terme.

De même supposant $\frac{99}{70} = \frac{x}{y}$, & substituant cette valeur dans la formule triple $\frac{4x^3 - 3x^4}{4x^2y - 1y}$, la substitution donne $\frac{4\times\overline{99}^3 = 3\times 99}{4\times\overline{99}^2\times 70 - 1\times 70} = \frac{4\times 804357 - 297}{4\times 8649\times 70 - 70}$

$$= \frac{3217428 - 297}{34596\times 70 - 70} = \frac{3217131}{2421650}$$ 18e. terme.

$2421720 - 70.$

Ainsi si l'on a plusieurs termes dans la série primitive, & qu'on substituë le cinquiéme terme ou le sixiéme dans la formule décuple on aura tout d'un coup le cinquantiéme terme ou le soixantiéme, car $5\times 10 = 50$, & $6\times 10 = 60$, & continuant sur la même formule, on aura dès la seconde opération un terme incomparablement plus avancé, car $10\times 50 = 500$, & $10\times 60 = 600$. C'est ainsi qu'en peu de tems on avance à pas de geans dans la série sans passer par les termes moïens, ce qui épargne beaucoup de tems, & ce qui abrége extrêmement le calcul.

Remarque sur le nombre des termes de chaque série.

Il est toujours avantageux de former quatre séries ensemble pour chaque nombre irrationel proposé; sçavoir,

deux séries sur chacune des deux formules exemplaires, dont la premiére est tirée de la racine du quarré parfait moindre que l'irrationel proposé, & la seconde est tirée de la racine du quarré parfait immédiatement plus grand. On peut continuer chaque série indéfiniment; mais pour l'usage il suffit de trouver un nombre suffisant de termes pour construire le triangle des rapports, c'est-à-dire que le dernier trouvé soit un nombre capable de donner plusieurs quotients, comme nous le verrons dans la Section suivante, lequel donne la série la plus exacte, la plus convergente & la plus parfaite pour exprimer toute racine irrationelle.

Régle pour les signes & les limites de chaque terme des Séries.

En géneral pour déterminer les limites d'erreur ou d'approximation, soit par excès soit par défaut.

1er. terme	2d. terme.	3e.
$\frac{a}{b}$	$\frac{2a+3b}{1a+2b}$	$\frac{7a+12b}{4a+7b}$

Je dis qu'en comparant le quarré du numérateur du second terme $4aa + 12ab + 9bb$, avec le triple du quarré du dénominateur $3aa + 12ab + 12bb$, la différence est $+ aa \mp 3bb$, selon le rapport qu'on supposera entre a & b.

Ainsi, si $a = b = 1$, la différence constante sera $+ 1aa - 3bb = -2$.

Mais si $a = 2$, & $b = 1$, la différence constante sera $+ 1aa - 3bb = 1$.

De même le troisiéme terme est $\frac{7a+12b}{4a+7b}$, son quarré est $\frac{49aa+168ab+144bb}{16aa+56ab+49bb} = 3\frac{\pm 1aa \mp 3bb}{16aa+56ab+49bb}$. Le triple du quarré du dénominateur $48aa + 168ab + 147bb$ étant ôté du numérateur, la différence est encore

$\pm 1\,aa \mp 3\,bb$, comme ci-dessus, & ainsi de suite à l'infini.

La différence dans le numérateur $\pm 1\,aa \mp 3\,bb$, est toujours constante, mais le dénominateur augmente continuellement & indéfiniment; ainsi prenant deux nombres quelconques pour la valeur de a & de b, quelqu'éloigné que soit leur rapport du rapport donné, la série approchera cependant indéfiniment de la valeur de l'irrationel cherché.

Exemples en nombres pour la valeur de $\sqrt{3}$.

1°. Soit $a = 1$ & $b = 1$, j'ai par la formule ci-dessus $\sqrt{3} = \frac{1+}{1}, \frac{5+}{3}, \frac{19+}{11}, \frac{71+}{41}, \frac{265+}{153}$ la différence constante dans le numérateur est $1\,aa - 3\,bb = 1 - 3 = -2$.

Car le premier terme de la série qui est toute par défaut, est $\frac{1}{1}$, & son quarré est $\frac{1}{1} = 3 - \frac{2}{1}$. Or ce quarré approche indéfiniment de 3 quarré de $\sqrt{3}$. Il est évident que la fraction du second terme $\frac{5}{3}$ dont le quarré est $\frac{25}{9} = 3 - \frac{2}{9}$ approche encore elle-même indéfiniment de la valeur de $\sqrt{3}$.

Le troisiéme terme $\frac{19}{11}$ dont le quarré est $\frac{361}{121} = 3 - \frac{2}{121}$.

Le quatriéme terme $\frac{71}{41}$, son quarré $\frac{5041}{1681} = 3 - \frac{2}{1681}$

2°. Soit $a = 30$, & $b = 7$, dans la formule exemplaire pour $\sqrt{3}$, $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$, j'aurai $1\,aa - 3\,bb = 600 - 147 = 753$, excès constant dans le numérateur, la série est $\frac{30}{7}, \frac{81}{44}, \frac{294}{169}$, &c.

Dans le premier terme $\frac{30}{7}$, son quarré est $\frac{900}{49} = 3 + \frac{753}{49}$ qui surpasse 3 de $\frac{753}{49}$.

Dans le second terme $\frac{81}{44}$, son quarré est $\frac{6561}{1939} = 3 + \frac{753}{1936}$, excès constant au numérateur.

Dans le troisiéme terme $\frac{294}{169}$, son quarré est $\frac{86436}{28561} = 3 \frac{753}{28561}$, excès constant au numérateur.

3°. Si l'on ſuppoſe $a = 2$, & $b = 1$, on aura dans la même formule $\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2$, donc la ſérie par excès ſera $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{97}{56}$, &c. Et la différence conſtante eſt $1\,aa - 3\,bb = 4 - 3 = 1$, & c'eſt la plus excellente de toutes les hypothéſes, puiſque la différence ne peut jamais être moindre que l'unité entre le triple du quarré du dénominateur & le quarré du numérateur.

Dans/le troiſiéme terme $\frac{2}{1}$, ſon quarré $\frac{4}{1} = 3 + \frac{1}{1}$.

Dans le ſecond terme $\frac{7}{4}$ le quarré $\frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16}$.

Dans le troiſiéme terme $\frac{97}{56}$, le quarré $\frac{9409}{3136} = 3 + \frac{1}{3136}$.

4°. Soit $a = 3$, & $b = 10$, on aura dans la même formule la ſérie par défaut $\frac{3}{10}$, $\frac{36}{23}$, $\frac{141}{82}$, &c.

Dans le premier terme $\frac{3}{10}$, ſon quarré $\frac{9}{100} = 3 - \frac{291}{100}$, or 291 eſt la différence conſtante du numérateur, car $1\,aa - 3\,bb = 9 - 300 = -291$.

Dans le ſecond terme $\frac{36}{23}$, ſon quarré $\frac{1296}{529} = 3 - \frac{291}{529}$, différence conſtante au numérateur.

Dans le troiſiéme terme $\frac{141}{82}$, ſon quarré $\frac{19881}{6724} = 3 - \frac{291}{6724}$, &c. à l'infini.

Méthode pour connoître la plus parfaite & la plus convergente des quatres ſéries primitives qui expriment une racine irrationelle.

Le triangle des rapports qui ſuit donne toujours la ſérie la plus parfaite, comme nous le verrons dans la ſection ſuivante ; mais comme il faut l'employer avec les formules rationelles, leſquelles ſervent à lui préparer des matériaux pour ſa conſtruction ; il s'agit ici de comparer enſemble les quatre ſéries données par les formules rationelles, pour juger de celle qui mérite la préférence & qui eſt la plus parfaite & la plus approchée par excès ou par défaut.

Exemple. Pour l'irrationel $\sqrt{41}$, les quatres ſéries primitives ſont,

Premiére ſérie des racines $\frac{6+}{1}$, $\frac{77-}{12}$, $\frac{954+}{149}$, $\frac{11833-}{1848}$

La ſérie des quarrez eſt alternativement par défaut & par excès.

$\frac{36}{1} = 41 - \frac{5}{1}$

$\frac{5929}{144} = 41 + \frac{25}{144}$

$\frac{910.116}{22201} = 41 - \frac{125}{22201}$

$\frac{14\,0019\,889}{3415104} = 41 + \frac{625}{3415104}$

& ainſi de ſuite à l'infini.

Seconde ſérie des racines $\frac{7}{1}$, $\frac{90}{14}$, $\frac{1204}{188}$, $\frac{16136}{2520}$, la ſérie des quarrez par réduction à moindres termes ſont tous par excès.

$\frac{49}{1} = 41 + \frac{8}{1}$

$\frac{2025}{49} = 41 + \frac{16}{49}$

$\frac{60601}{2209} = 41 + \frac{32}{2209}$

$\frac{4068289}{99\,225} = 41 + \frac{64}{99225}$ &c.

Troiſiéme ſérie des racines $\frac{7+}{1}$, $\frac{83-}{13}$, $\frac{1031+}{161}$, $\frac{12787-}{1997}$, la ſérie des quarrez eſt alternativement par excès & par défaut.

$\frac{49}{1} = 41 + \frac{8}{1}$

$\frac{6889}{169} = 41 - \frac{40}{169}$. $\frac{1062961}{25921} = 41 + \frac{200}{25921}$

$\frac{163.507.369}{3988009} = 41 - \frac{1000}{3988009}$, &c.

Quatriéme ſérie des racines $\frac{6}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1114}{174}$ $\frac{14932}{2332}$, la ſérie des quarrez ſont tous par défaut.

$\frac{36}{1} = 41 - \frac{5}{1}$

$\frac{6889}{169} = 41 - \frac{40}{169}$

$\frac{1240996}{30276} = 41 - \frac{320}{30276}$

$\frac{222.964.624}{54.38\ 224} = 41 - \frac{2560}{54.38224}$, &c.

Paralléle du second & du quatriéme terme de ces quatre séries

1re. série par excès.	2de. série par excès.	3e. série par défaut.	4e. série par défaut.
2d. terme.	2d. terme.		
$41 + \frac{25}{144}$	$41 + \frac{16}{69}$	$41 - \frac{40}{169}$	$41 - \frac{40}{169}$
4e. terme.			
$41 + \frac{625}{3415104}$	$41 + \frac{64}{99225}$	$41 - \frac{1000}{3988009}$	$41 - \frac{160}{339889}$

Il est facile de juger quelle est celle de ces quatre séries qui approche davantage par excès ou par défaut, c'est la seconde, puisque $41 + \frac{16}{49}$ est le terme le plus appproché de 41 par excès.

Mais pour m'en assurer davantage je divise chaque numérateur par le dénominateur dans chacune des fractions, & chaque division donnera un quotient complexe, qui servira dans la suite à former le triangle des rapports comme nous le verrons dans la section suivante, qui donnera la série la plus convergente & la plus parfaite.

Pour $41 + \frac{25}{144}$

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
144	25 : 000	0 : 173 : 6. + &c.

```
0
1 . . 144
      106:0
7 . . 100 8
         5 2:0
3 . . . . 4 3 2
            8 8:0
6 . . . .   8 6 4
                6:0
```

Pour $41 + \frac{16}{49}$

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
49.	16 : 00	0 : 3265 +

```
0
3 . . 147
       1 3:0
2 . . . . 9 8
          3 2:0
6 . . .   2 9 4
            2 6 : 0
5 . . . . . 2 4 5
              1 5 : 0
```

Pour $41 - \frac{40}{169}$

Diviseur	*Dividende.*	*Quotient.*
169	40 : 000	0. 2366 +

```
0
2 . . 338
      62:0
3 . . 50 7
      11 3:0
6 . . 10 1 4
       1 1 6:0
6 . . . 1 0 1 4
          1 4 6 : 0
```

Ainsi comparant ensemble ces quotiens, je peux juger quelle est la série la plus parfaite, & je la trouverai par le triangle des rapports formé sur ces quotients.

De même je peux comparer les seconds termes des séries des racines, & trouver par la division les quotients.

Pour $\frac{77}{12}$, 1re. série second terme.

Diviseur.	*Dividende.*	*Quotient.*
12	77 : 00	64166 +

6...

6 . . 72 ou 64167 —

5 : 0

4 . . . 4 8

2 : 0

1 . . . . 1 2

8 : 0

6 + . . . 7 2

8 : 0

pour $\frac{90}{14} = \frac{45}{7}$, ſecond terme de la ſeconde ſérie.

Diviſeur.	*Dividende.*	*Quotient.*
7	45 : 00	64285 +

6 . . . 42 ou 64286 —

3 : 0

4 . . . 2 8

2 : 0

2 . . . . 1 4

6 : 0

8 . . . . . 5 6

4 : 0

5 + ... 3 5

5 : 0

pour $\frac{83}{13}$, ſecond terme de la 3e. & 4e. ſérie.

Diviſeur.	*Dividende.*	*Quotient.*
13	83 : 00	63853 +

6 . . 78 ou 63854 —

5 : 0

3 . . . 3 9

1 1 : 0

8 . . 1 0 4

6 : 0

5 . . . . 6 5

5 : 0

4 — 5 2

Donc le rapport de $\sqrt{41}$ qui réſulte des quotiens trou-

vez par la divison du second terme des quatre séries est, sçavoir,

de la 1re. série entre $\begin{cases} 64166 + \\ 64167 - \end{cases}$

de la 2de. série entre $\begin{cases} 64285 + \\ 64286 - \end{cases}$

de la 3e. & 4e. série $\begin{cases} 63853 + \\ 63854 - \end{cases}$

Or par le triangle des rapports expliquez ci-après dans la Section suivante, on trouve pour le rapport de $\sqrt{41}$ = 64031 +
ou 65032 —.

Or de 64031 +	de 64032 —
ôtez 64166 +	ôtez 64167 —
différence — 135	diff. — 135 trop grande de 135.
de 64031 +	de 64032 —
ôtez 64285 +	ôtez 64286 —
différence — 254	diff. — 254 trop grande de 254.
de 64031 +	de 64032 —
ôtez 63853 +	ôtez 63854 —
différence + 177	+ 177 trop petit de 177.

Conclusion. La premiére série approche davantage, puisque son excès 135 est la moindre des différences trouvées ; d'ailleurs elle est alternativement par excès & par défaut, ce qui est essentiel ; je la choisis préferablement à toute autre pour en former le triangle des rapports comme il suit, qui donnera la série la plus convergente & la plus parfaite.

Je prends le quatriéme terme de cette premiére série $\frac{11833 -}{1848}$ & le 5e. terme $\frac{146766}{221921}$ je fais la division séparément dans chacune de ces fractions du numérateur par leur dénominateur comme si je voulois les réduire à moin-

dres termes, & trouver leur commune mesure en divisant d'abord le numérateur par le dénominateur, écrivant ce quotient à côté, & le premier reste au-dessous.

Puis je divise le numérateur par ce premier reste; j'écris le quotient à côté, & le second reste au-dessous.

Ensuite je divise le premier reste par le second reste, j'écris le quotient à côté, & le troisiéme reste au-dessous.

Je continuë cette opération jusqu'à ce que je trouve un quotient qui soit double du premier quotient, car pour lors l'opération est finie, & j'ai par ce moyen la période réglée des quotients générateurs pour former le triangle des rapports.

Opération sur le 4e. terme.

		Quotiens.
Divid.	11833	6
Diviseur	1848	
1er. *prod.*	11088	2
1er. *reste*	745	
2^{d}. *prod.*	1490	2
2^{d}. *reste*	358	
3e. *produit*	716	12 +
3e. *reste*	29	
4e. *produit*	348	2
4e. *reste*	10	
5e. *produit*	20	
6e. *reste*	9 : 9	

Opération sur le 5e. terme.

		Quotiens.
Divid.	146766	6
Divis.	22921	
1er. *prod.*	137526	2
1er. *reste*	9240	
2^{d}. *prod.*	18480	2
2^{d}. *reste*	4441	
3e. *prod.*	8882	12 +
3e. *reste*	358	
4e. *prod.*	4296	2
4e. *reste*	— 145.	

Puisque j'ai le quatriéme quotient 12 qui est précisément double du premier quotient 6 l'opération est finie, & j'ai la période réglée des quotiens générateurs qui reviennent toujours excepté le premier car c'est une maxime

constante, que lorsque l'on trouve dans la division un quotient qui est précisément le double du premier, si on ajoute des zéros au reste, & qu'on continuë la division, on trouvera toujours la même période des mêmes quotiens qui reviennent continuellement, cette période est donc composée de quatre termes 6. 2. 2. 12. dont le premier est hors d'œuvre & ne revient jamais, & les trois autres reviennent continuellement, & cette période s'exprime ainsi.

6 || 2. 2. 12 || 2. 2. 12 || 2. 2. 12 || &c.

c'est cette période réglée des quotients qui servira à former le triangle des rapports inverse comme il suit, qui donnera la série la plus parfaite.

Formation du triangle du rapport inverse pour $\sqrt{41}$.

Chaque colonne contient plusieurs cellules ou carreaux qui ont chacun quatre termes ou nombres.

Le premier est toujours l'unité, & le second est l'un des nombres générateurs ou des quotients de la période, car chaque colonne a son nombre générateur particulier.

La premiére colonne a le premier quotient 6, qui est hors d'œuvre & qui ne revient plus le premier dans aucune autre colonne.

Chacun des trois autres quotients donne les trois nombres générateurs des trois autres colonnes, & se met en tête aprês l'unité constante qui commence chaque colonne.

Les trois mêmes nombres générateurs sont encore dans le même ordre, les seconds nombres particuliers des 4e. 5e. & 6e. colonne.

riangle du rapport de $\sqrt{41}$. formé sur la période des nombres générateurs 6 || 2. 2. 12 || 2. 2. 12 || &c.

								9e. col.	
								1	
								2	
								× 2	
								.....	
							8e. col.	4	
							1	+ 1	
							2	5	
							× 12	× 12	
							.....	.....	
						7e. col.	24	60	
						1	+ 1	+ 2	
						12	25	62	
						× 2	× 2	× 2	
						.....	.....	.....	
					6e. col	24	50	124	
					1	+ 1	+ 2	+ 5	
					2	25	52	129	
					× 2	× 2	× 2	× 2	
					.....	.....	.....	.....	
				5e. col.	= 4	= 50	104	258	
				1	+ 1	+ 12	+ 25	+ 62	
				2	5	62	129	320	
				× 12	× 12	× 12	× 12	× 12	
				.....	.....	.....	.....	.....	
			4e. col.	= 24	= 60	= 744	1548	3840	
			1	+ 1	+ 2	+ 25	+ 52	+ 129	
			12	25	62	769	1600	3969	
			× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	
			.....	.....	.....	.....	.....	.....	
		3e. col.	24	50	124	1538	3200	7938	
		1	+ 1	+ 2	+ 5	+ 62	+ 129	+ 320	
		2	25	52	129	1600	3329	8258	
		× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	
		.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
	2de. col.	= 4	50	104	258	3200	6658	16516	
	1	+ 1	+ 12	+ 25	+ 62	+ 769	+ 1600	+ 3969	
	2	5	62	129	320	3969	8258	20485	dén
	× 6	× 6	× 6	× 6	× 6	× 6	× 6	× 6	
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
ol.	= 12	= 30	372	774	1920	23814	49548	122910	
	+ 1	+ 2	+ 25	+ 52	+ 129	+ 1600	+ 3329	+ 8258	
	13	32	826	826	2049	25414	52877	131168	nu

La formation de chaque colonne se fait alternativement par multiplication & par addition dans chaque terme, comme il est expliqué fort en détail dans la Section suivante, avec cette différence qu'on y trouve le triangle du rapport direct, & celui-ci est inverse; chaque colonne donne deux nombres, un est le dénominateur, l'autre en bas est le numérateur de la fraction ou du rapport cherché.

Voici leur série.

1er. Terme.

$\left| \frac{6}{1} \right\|$ Ce premier terme est hors d'œuvre & ne revient jamais dans la Période des quotients.

2e 3e 4e. terme.

$\left\| \frac{13}{2}, \frac{32}{5}, \frac{397}{62}. \right\|$

5e. 6e. 7e.

$\left\| \frac{826}{129}, \frac{2049}{320}, \frac{25414}{3969} \right\|$

8e. 9e. 10e. terme.

$\left\| \frac{52877}{8258}, \frac{131168}{20435}, \frac{1626.893}{254.078} \right\|$

11e. 12e. 13e. terme.

$\left\| \frac{3384954}{528641}, \frac{8396.801}{1311360}, \frac{104146566}{26264961.} \right\|$

On peut ensuite continuer cette série à l'infini par les formules suivantes dans lesquelles le premier terme est hors d'œuvre, c'est-à-dire, qu'il n'entre point dans la période réglée des quotients qui revient toujours dans la série continuée à l'infini.

Formule pour la Série des dénominateurs.

a	b	c	d
... 1 ...	.. 2 ...	... 5 ...	... 62
a	2 *a* + o	2 *b* + *a*	12 *c* + *b*

e	f	g
.. 129 ..	.. 320 ..	.. 3969
2 *d* + *c*	2 *e* + *d*	12 *f* + *e*

h	i	k
.. 8258 ..	..20485..	254078
2 *g* + *f*	2 *h* + *g*	12 *i* + *h*

l	m	n
528641	1311360	15 752. 961
2 *k* + *i*	2 *l* + *k*	12 *m* + *l*

Formule pour la Série des numérateurs.

A	B	C	D
... 6 ...	... 13 ...	... 32 ...	... 397
A	2 A + 1	2 B + A	12 C + B

E	F	G
.. 826 ...	.. 2049 ..	... 25414
2 D + C	2 E + D	12 F + E

H	I	K
.. 52877 ..	131168	1626893
2 G + F	2 H + G	12 I + H

L	M	N
3. 384. 954	8. 396. 801	20. 178. 556
2 K + I	2 L + K	12 M + L

Examen de la différence des quarrez.

Présentement si j'examine la série des défauts & des excès dans les quarrez des termes de la véritable & parfaite série formée par le triangle des rapports & résultante des autres séries les plus approchantes, je trouve que ces différences tant par excès que par défaut sont des périodes réglées, — 5, + 5, — 1 || + 5 — 5 + 1, — 5, + 5, — 1 || + 5, — 5, + 1 ||, &c. où chaque terme d'une période a le signe contraire à son terme correspondant dans la période suivante, & comme ce sont les trois mêmes nombres dans chacune des périodes, ils se trouvent détruits par les trois nombres de la période suivante qui sont égaux avec des signes contraires.

Racines. *Quarrez du numérateur.*

$\frac{6}{1}$.... 36 $= \overline{41 \times 1} - 5 = 41 - 5 = 36$. défaut — 5.

$\frac{13}{2}$... 169 $= \overline{41 \times 4} + 5 = 164 + 5$, excès + 5.

$\frac{32}{5}$... 1024 $= \overline{41 \times 25} - 1 = 1025 - 1$. défaut — 1.

$\frac{397}{62}$... 157609 $= \overline{41 \times 3844} + 5$. excès + 5.

$\frac{826}{129}$... 682276 $= \overline{41 \times 16641} - 5$. défaut — 5.

$\frac{2049}{320}$... 4198401 $= \overline{41 \times 102400} + 1$. excès + 1.

$\frac{25414}{3969}$.. 645871396 $= \overline{41 \times 15752961} - 5$. défaut — 5.

Et ainsi de suite de tous les autres à l'infini.

SECTION

SECTION CINQUIE'ME.

La Science universelle des Rapports.

Discours Préliminaire sur la nature des Rapports, leur étenduë, & la nécessité de connoître tous les Rapports.

TOutes les véritez géométriques en général, ne sont que les rapports des grandeurs comparées ensemble.

L'Analyse qui est la source & le fondement des Mathématiques, consiste uniquement à découvrir des grandeurs inconnuës par le moyen des rapports connus. C'est là où se réduit la résolution de tous les Problêmes des Mathématiques pures, & des sciences Phisico-Mathématiques ; il est donc important de connoître parfaitement les rapports des grandeurs, puisque c'est de leur connoissance qu'on doit esperer la perfection de l'Analyse & de toutes les Mathématiques.

Cependant, je ne sçais par quelle fatalité, les Géométres ont négligé une science si nécessaire, elle se trouve très-bornée, on ne connoît parfaitement que le rapport d'égalité qui n'est pas la moitié du premier genre, mais seulement une partie infiniment petite de tous les rapports, car nous verrons dans la suite qu'il y a une infinité de genres entre les rapports, une infinité d'espéces simples, une infinité d'espéces composées, primitives, & subalternes ou dérivées, toutes infinies, & dont chaque rapport en particulier est le premier terme & l'origine d'une série infinie d'individus, telle est l'étenduë des rapports d'inégalité, ils s'étendent de toutes parts à l'infini,

& ils ſont entiérement inconnus, on ſçait ſeulement en gros & confuſément qu'il y a une infinité de rapports d'inégalité plus grande ou plus petite à l'infini.

N'y a-t-il pas lieu de s'étonner que les Géometres en ſoient demeurez là, & n'aïent pas pouſſé plus loin leurs recherches ſur une matiére ſi vaſte & ſi importante? quelle utilité ne devoit-on pas eſpérer? à en juger par le ſeul rapport d'égalité qui eſt celui qui nous ſoit connu, puiſque c'eſt la ſource de la ſcience des proportions & généralement de toutes les véritez géométriques qui nous ſont connuës; quel ſecours ne devoit-on pas attendre de la connoiſſance entiére & exacte des rapports de tous les genres & de toutes les eſpéces à l'infini? pour la perfection de l'Analyſe, pour les lignes courbes & pour les ſciences Phiſico-Mathématiques.

Cette conſidération m'a porté à examiner de plus près la nature des rapports, j'ai trouvé cette matiére encore neuve, je me ſuis fait une route ſimple naturelle & facile par laquelle je conduirai mon lecteur, pour lui donner le plaiſir de découvrir avec moi tout ce qui regarde une matiére ſi vaſte & ſi utile.

Définition. Le rapport des deux grandeurs a & b conſiſte ou dans leur égalité ou dans leur inégalité; ou dans leur égalité qui fait que la premiére a contient la ſeconde b, autant de fois qu'elle y eſt contenuë, & réciproquement, ou dans l'inégalité qui fait que la premiére a eſt la plus grande & contient la moindre b un certain nombre de fois avec un reſte ou ſans reſte.

Ainſi le rapport de deux grandeurs conſiſte ou dans leur égalité ou dans leur inégalité, c'eſt le fondement de toutes les comparaiſons qu'on en peut faire, la fraction $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{a}$ eſt la plus ſimple expreſſion du rapport de ces deux grandeurs; or une fraction indique un diviſion dont le Dividende eſt le premier terme ou le dénomi-

nateur ; c'eſt donc le quotient qui réſulte de cette diviſion qui caractériſe le rapport, ainſi ſubſtituant des nombres à la place des lettres dans $\frac{a}{b}$ & dans $\frac{b}{a}$, le quotient exprimera en nombres ce rapport.

Soit $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$, &c. dans chaque fraction de cette ſérie, en nombres j'ai 1 pour quotient, qui eſt la marque & le caractére du rapport le plus ſimple qui eſt celui d'égalité, car l'antécédent contient une fois ſon conſéquent, & réciproquement le conſéquent contient une fois ſon antécédent, c'eſt le plus ſimple des tous les rapports, le rapport d'égalité qui eſt ſeul de ſon genre & de ſes eſpéces, & qui n'a ſous lui que des individus.

Mais dans cette ſeconde ſérie de rapports ou fractions, $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}$, &c. tous ces rapports ſont ſemblables, puiſque chaque antécédent contient deux fois ſon conſéquent, & chaque quotient qui réſulte de la diviſion eſt 2, ce qui montre que tous ces rapports ſont égaux & ſont très-ſimples, puiſqu'ils n'ont qu'un ſeul quotient qui eſt le moindre qui ſoit poſſible dans les rapports d'inégalité.

Cette ſeconde ſérie ne contient qu'un ſeul & unique rapport, qui eſt le plus ſimple rapport d'inégalité $\frac{2}{1}$, qui eſt l'origine de cette ſérie, le reſte de la ſérie ſont des individus du même rapport qui eſt le plus ſimple rapport d'inégalité, qui fait le premier degré ou genre du rapport d'inégalité ; les rapports plus compoſez ſont les degrez ſupérieurs.

La troiſiéme ſérie des rapports ſuivans, $\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{10}$, &c. contient les individus du premier $\frac{3}{2}$ qui eſt l'origine de la ſérie, chaque antécédent contient une fois ſon conſéquent avec un reſte, & le conſéquent contient deux fois ce reſte, ce qui donne deux quotients. 1 & 2.

	Quotiens.
Dividende 3	1
Diviseur 2	2
Reste 1	

Voilà déja deux quotients qui marquent le second degré ou second genre des rapports d'inégalité , mais le plus simple de son genre , puisque les quotients 1. & 2. sont les plus simples, car le quotient 1 est si simple qu'il se trouve même dans le rapport d'égalité qui est le plus simple de tous , & le quotient 2 est le plus simple qui puisse se trouver dans le rapport d'inégalité.

Mais comme ces deux quotients peuvent varier par la suite des nombres naturels, ils donneront des rapports differens en ce cas : mais d'ailleurs on peut conserver ces deux quotients constans & invariables, & substituer en la place de $\frac{3}{2}$ tous les multiples $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$, &c. qui sont des individus: de même aussi dans chaque variation de l'un des quotients, on aura une série infinie de raports: dans la variation de l'autre quotient on aura encore une autre série infinie différente : en faisant varier le reste ou la commune mesure on aura aussi une autre série infinie; de même si on fait varier deux quotients, on aura encore une série infinie de rappors; si l'on fait varier l'un des quotients d'abord avec la commune mesure & ensuite l'autre quotient, puis tous les trois ensemble; dans tous ces cas on aura autant de séries infinies de rapports tous différens, & chaque terme de l'une de ces séries pourra être pris pour l'origine & le premier terme d'une série infinie de rapports semblables, que je nomme des individus.

Pour traiter cette matiére si étenduë avec ordre, & d'une maniére claire qui porte la lumiére dans ce vaste païs de l'infini, j'établis entre les rapports differens degrez ou genres à l'infini, je divise chaque genre en ses

espéces primitives, soit simples, soit composées, chaque espéce primitive a ses espéces subalternes ou dérivées, & chaque rapport en particulier est l'origine & le premier terme d'une série infinie d'individus; je distingue cela sans peine & sans fatiguer la mémoire du lecteur, c'est par le nombre & la qualité des quotients & de la commune mesure que l'on trouvera par la division que nous allons expliquer dans le Problême qui suit.

LEMME ET PROBLE'ME 1er. & fondamental.

Trouver la commune mesure de deux nombres, ou Méthode nouvelle pour faire la division propre pour connoître les rapports des grandeurs exprimées en nombres.

Nous expliquerons dans la suite la Méthode d'exprimer les rapports géométriques par les nombres, qui est la seule expression claire & sensible.

Soit un rapport exprimé par la fraction $\frac{39}{24} = \frac{A}{B}$.

Opération.

1er. *Dividende.* A = 39	1 = C. *premier Quotient.*
1er. *Diviseur* B = 24. *& second Dividende.*	1 = D. *second Quotient.*
1er. *Reste.* M = 15 2d. *Diviseur & 3e. Divid.*	1 = E. *troisiéme Quotient.*
2d. *Reste.* N = 9 3e. *Diviseur, & 4e. Divid.*	1 = F. *quatriéme Quotient.*
3e. *Reste.* O = 6 4e. *Diviseur, & 5e. Divid.*	2 = G. 5e. *& dernier Quot.*
4e. *Reste.* P = 3 *& commune mesure.*	

Explication. J'écris le plus grand nombre A = 39 pour premier dividende, & au-dessous le plus petit du rapport proposé B = 24 pour le premier diviseur; j'ôte le diviseur du dividende 39 autant fois qu'il est possible, ici il y est une fois, j'ôte donc une fois 24 de 39, le premier reste est M = 15 que j'écris au-dessous pour second diviseur, j'écris aussi à côté le premier quotient 1 = C. Voilà la premiére opération finie.

J'ai B = 24 pour second dividende, & M = 15 pour second diviseur; j'ôte M = 15 de B = 24, autant de fois qu'il est possible, c'est-à-dire une fois qui donne 1 = D pour second quotient; or 24 — 15 = 9, j'écris le second reste N = 9 au-dessous pour troisiéme diviseur: voilà la seconde opération finie.

J'ai pour la troisiéme opération M = 15 pour troisiéme Dividende, & N = 9 pour troisiéme diviseur, dont le quotient est E = 1, & le reste O = 6.

Pour la quatriéme opération, j'ai N = 9, quatriéme dividende, & O = 6, quatriéme diviseur, qui donne pour quotient 1 = F, & pour quatriéme reste P = 3.

Pour la cinquiéme opération j'ai O = 6, cinquiéme dividende, & P = 3, cinquiéme diviseur, qui donne pour cinquiéme quotient 2 = G, qui étant exact ne donne aucun reste, partant c'est le dernier quotient, & P = 3 est la commune mesure des deux nombres donnez du rapport proposé $\frac{39}{24}$.

Remarque. 1. Lorsqu'un diviseur donne un quotient exact & sans reste, ce diviseur est la commune mesure des deux nombres proposez, parce qu'il se mesure lui-même par l'unité.

2. Si dans l'opération un diviseur est 10 fois, 30 fois, 35 fois, ou 100 fois, 150 fois, 153 fois dans le dividende, ou même davantage, le quotient est exprimé par deux ou trois chifres ou même par un plus grand nombre, & n'est pas moins un seul quotient; alors pour ôter plus

commodément du dividende le produit du diviſeur par ce quotient, j'écris à part ou ſous le diviſeur ce produit pour ne le pas confondre avec le reſte donné par cette opération.

Corollaire premier, général & fondamental.

Il ſuit de la diviſion précédente, dans le rapport donné $\frac{39}{24}$, 1°. que 3 eſt la commune meſure de ces deux nombres, laquelle marque par ſes trois unitez que ce rapport eſt le troiſiéme individu de ſon genre & de ſes eſpéces.

2°. Il y a cinq quotients, dont 5 eſt l'expoſant qui marque tout enſemble le degré & le genre de ce rapport qui ſont toujours les mêmes. Il marque auſſi le nombre des diviſions qu'il faut faire pour connoître ce rapport, dont chacune donne un quotient.

3°. Le cinquiéme & dernier quotient 2 marque que c'eſt un rapport d'inégalité; mais le plus ſimple de ſon genre, car dans le rapport d'égalité le dernier quotient eſt toujours 1, & dans le rapport d'inegalité, le dernier quotient ne peut être moindre que 2, mais il peut croître à l'infini.

4°. Les quatre quotients qui précédent le dernier ſont des unitez, ce qui marque que ce rapport eſt le premier & le plus ſimple de ſes eſpéces: mais ſa commune meſure 3 marque qu'il eſt le troiſiéme individu de ſon genre, le premier individu eſt encore plus ſimple que le propoſé, ce qui s'éclaircira dans la ſuite.

Corollaire ſecond, général & fondamental.

Ce Problême montre que la commune meſure des deux nombres propoſez avec les quotients trouvez par la diviſion, ſont les ſeuls Elémens qui entrent dans la formation des rapports.

Ce qui m'engage à développer les proprietez de ces Ele-

mens d'où dépend toute la théorie des rapports, comme il suit.

THEOREME.

Quels sont les Elémens des Rapports ? Leurs propriétez ? Ou Théorie générale des Rapports.

Les Elémens d'un rapport exprimé par deux nombres quelconques, sont la commune mesure de ces deux nombres, & les quotients que l'on trouve en divisant le plus grand nombre par le plus petit, par une division réïterée jusqu'à ce qu'on ne trouve plus aucun reste. Comme ces Elémens sont les seuls qui entrent dans la formation des rapports, leur variation qui est la seule proprieté que je considére ici, est aussi l'unique source de toutes les diversitez qui peuvent se rencontrer entre les rapports.

1°. La variation dans le nombre des quotiens est la source de la plus grande diversité qui se trouve entre les rapports, elle me fournit la premiére idée pour distinguer les rapports comme les puissances par différens degrez à l'infini que je nomme aussi les genres des rapports, parce qu'ils ont différentes espéces du même degré, & par conséquent du même genre. Voilà la premiére & la plus importante distinction entre les rapports, tirée de la nature & de l'essence des nombres.

2°. La variation de chacun des quotients cause une moindre diversité entre les rapports, elle se trouve entre les rapports d'un même degré ou genre, c'est-à-dire entre ceux dont on trouve la commune mesure par un nombre égal de divisions qui donnent autant de quotients, comme cette variation est moindre que la précédente, je m'en sers pour distinguer les espéces différentes entre les rapports différens d'un même genre.

Je nomme *espéces primitives simples*, celles qui sont formées pour la variation d'un seul quotient, & dont la série infinie contient des rapports qui croissent en même

même tems au dénominateur & au numérateur.

Je nomme *eſpéces primitives compoſées* celles qui ſont formées par la variation ou de deux quotiens, ou de trois quotiens, ou d'un plus grand nombre qui varient enſemble, combinez enſemble ou avec la commune meſure, de toutes les maniéres poſſibles, & dont la ſérie infinie contient des rapports qui croiſſent en même tems au dénominateur & au numérateur.

Mais je nomme *eſpéces ſubalternes* ou *dérivées* les ſéries infinies des rapports qui croiſſent ſeulement au numérateur, tandis que le dénominateur eſt conſtant & invariable, qui eſt toujours le même que celui du rapport qui eſt le premier & l'origine d'où la ſérie eſt dérivée.

3°. Enfin la variation de la commune meſure des deux nombres qui expriment un rapport, eſt celle qui produit entre les rapports la moindre diverſité qui ſoit poſſible, je m'en ſers pour établir la diſtinction des individus entre les rapports.

Voilà le fondement des diſtinctions que j'établis entre les rapports, genres, eſpéces, individus, qui ſuffiſent pour déveloper tout ce qui appartient à la ſcience des rapports; ces diſtinctions ſont ſimples & tirées de la nature des nombres; pour les mettre dans leur jour, il faut entrer dans le détail & former les ſéries de ces genres, de ces eſpéces, de ces individus comme il ſuit.

Formation de la ſérie infinie de tous les genres des Rapports à l'infini.

Série. $\overbrace{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, $\frac{34}{21}$, $\frac{55}{34}$, $\frac{89}{55}$, $\frac{144}{89}$, &c. à l'infini.

Expoſans. 1er. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 10e. genre

Le premier genre eſt double, il contient le premier & le plus ſimple rapport d'égalité qui eſt $\frac{1}{1}$, avec le premier & plus ſimple rapport d'inégalité $\frac{2}{1}$, qui ſont tous deux

du premier degré & du premier genre, puiſqu'ils ne peuvent avoir qu'un ſeul quotient, car $\frac{1}{1} = 1$, & $\frac{2}{1}$ donne 2 pour quotient.

Le premier terme de la ſérie eſt $\frac{1}{1}$, l'antécédent & le conſéquent ſont égaux.

Pour le ſecond terme $\frac{2}{1}$ ſon antécédent 2 eſt égal à la ſomme de l'antécédent & du conſéquent du premier terme qui le précéde $1 + 1 = 2$, ſon conſéquent 1 eſt égal à l'antécédent précédent.

Pour le troiſiéme terme $\frac{3}{2}$, ſon antécédent 3 eſt la ſomme de l'antécédent & du conſéquent du terme qui le précéde immédiatement $2 + 1 = 3$.

Son conſéquent 2, eſt l'antécédent du terme précédent.

La même analogie regne dans toute la ſérie que l'on peut continuer indéfiniment, chaque rapport a pour numérateur la ſomme du numérateur & du dénominateur précédent, mais le dénominateur eſt toujours le numéteur précédent.

Démonſtration de la ſérie des genres des Rapports.

Pour démontrer *à priori* que cette ſérie comprend les rapports les plus ſimples de tous les genres à l'infini, il ſuffit de démontrer qu'un rapport quelconque, par exemple, celui du cinquiéme genre $\frac{13}{8}$, eſt le rapport le plus ſimple du cinquiéme genre, or cela eſt évident par ſa formation, puiſqu'il contient tous les rapports les plus ſimples que le précédent & qu'il les ſurpaſſe, car il contient & ſurpaſſe le plus ſimple rapport du quatriéme genre $\frac{8}{5}$, & en rétrogradant de même juſqu'à l'origine, on trouvera qu'il contient & ſurpaſſe le rapport du troiſiéme genre $\frac{5}{3}$, celui du ſecond genre $\frac{3}{2}$, celui du premier genre d'inégalité $\frac{2}{1}$, & enfin qu'il contient & ſurpaſſe $\frac{1}{1}$ qui eſt le rapport d'égalité, le premier & le plus ſimple de tous les rapports.

Comme la même choſe ſe trouve dans chacun des rap-

ports de cette série, il suit de-là que la série continuée à l'infini comprend par ordre les rapports les plus simples de tous les genres à l'infini.

On démontrera encore la même chose *à posteriori* par la division, car on trouvera que chacun des rapports pris à discrétion dans la série, comme ici le rapport du cinquiéme genre $\frac{13}{8}$ contient tous les rapports les plus simples des genres précédens dans la série, & il est évident que chacun de ces rapports est le premier & le plus simple de son genre, puisque chaque quotient est l'unité, excepté le dernier quotient 2 qui ne peut être moindre dans le rapport d'inégalité, ce qui est de l'essence du rapport d'inégalité.

1er. *Dividende.*	13	1. *premier Quotient.*
1er. *Diviseur* & 2d. *Divividende.*	8	1. 2d. *Quotient.*
1er. *Reste.* 2d. *Diviseur* & 3e *Dividende.*	5	1. 3e. *Quotient.*
2d. *Reste.* 3e. *Diviseur* & 4e. *Dividende.*	3	1. 4e. *Quotient.*
3e. *Reste.* 4e. *Diviseur* & 5e. *Dividende.*	2	2. 5e. *Quotient.*
dernier Diviseur & *commune mesure.*	1	

Formation des séries infinies des espéces simples & primitives des rapports.

Entre les rapports d'un même genre ou degré, par exemple, dans le second genre ou degré qui a cinq quotients, on peut former une série infinie des espéces simples & primitives par la variation d'un seul quotient, en prenant pour origine & premier terme de la série infi-

nie le premier & plus ſimple rapport de ce cinquiéme genre ou degré.

Ainſi je prends le rapport le plus ſimple & le premier du cinquiéme genre $\frac{13}{8}$, j'en cherche les quotients par la diviſion expliquée dans le premier Problême, & à côté de cette opération, j'en fais une toute contraire en multipliant la commune meſure, & remontant de bas en haut par la ſuite des quotients, après en avoir changé un ſeul (pourvû que ce ne ſoit pas le premier pour les raiſons que nous verrons) dans cet exemple j'ai changé le dernier 2, & j'ai mis en ſa place 3 pour premier multiplicateur.

Diviſion.			*Multiplication.*
1re. *Dividende.* 13	1er. *Quot.* 1.	18	5e. *ou dernier* 1 *Multiplicat.*
1er. *Diviſeur.* & 2d. *Dividende.* 8	2d. *Quot.* 1.	5e. *nombre à multip.* 11	4e. *Multiplic.* 1.
1er. *Reſt.* 2d. *Diviſ.* & 3e. *Divid.* 5	3e. *Quot.* 1.	4e. *nombre à multip.* 7	3e. *Multiplic.* 1.
2d. *Reſt.* 3e. *Diviſ.* & 4e. *Divid.* 3	4e. *Quot.* 1.	3e. *nombre à multip.* 4	2d. *Multiplic.* 1.
3e. *Reſte* 4e. *Diviſ.* & 5e. *Divid.* 2	5e. *Quot.* 2.	2d. *nombre à multip.* 3	1er. *Multiplic.* 3.
4e. *Reſte* der. *Diviſ.* & *comm. meſure.* 1		1er. *nombre à multipl.* 1 *ou com. meſ.*	

Je ſuppoſe la commune meſure toujours conſtante $=1$, je la multiplie par le dernier quotient 3 mis à la place de 2 pour ſervir de premier multiplicateur, le produit eſt 3, que j'écris à gauche pour le ſecond nombre à multiplier.

Le 2d. multiplicateur au deſſus eſt 1, or $1 \times 3 + 1 = 4$

que j'écris au dessus pour troisiéme nombre à multiplier.

Le 3ᵉ. multiplicateur est 1, & le troisiéme nombre à multiplier 4, or $1 \times 4 = 4$, auquel j'ajoute le nombre trouvé au dessous 3, $4 + 3 = 7$, j'écris 7 pour 4ᵉ. nombre à multiplier.

Le 4ᵉ. multiplicateur est 1, & le 4ᵉ. nombre à multiplier 7, $1 \times 7 = 7$, j'ajoute 4, nombre trouvé au dessous $7 + 4 = 11$, que j'écris pour cinquiéme nombre à multiplier.

Enfin le 5ᵉ. multiplicateur est 1, & le 5ᵉ. nombre à multiplier 11, or $1 \times 11 = 11$, j'ajoute 7, nombre trouvé au dessous $11 + 7 = 18$, nombre désiré, qui finit l'opération.

Si le cinquiéme quotient 2 croît ainsi continuellement de l'unité & que l'on substituë sa valeur en sa place pour avoir les premiers multiplicateurs pour réïtérer la seconde opération qui précéde, on trouvera les termes de la série infinie de la cinquiéme espéce simple & primitive du cinquiéme genre des rapports, (je dis la cinquiéme espéce, parce qu'elle vient de la variation du cinquiéme quotient) comme il suit.

Série $\frac{13}{8}$, $\frac{18}{11}$, $\frac{23}{14}$, $\frac{28}{17}$, $\frac{33}{20}$, $\frac{38}{23}$, $\frac{43}{26}$, &c. à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs croissent de 3, c'est la valeur du premier multiplicateur constante.

Les numérateurs croissent de 5, & c'est l'exposant du genre de cette série, & du rang qu'occupe parmi les quotients, le cinquiéme quotient dont la seule variation produit cette série.

Ce qui fournit un moyen facile de la continuer indéfiniment par addition continuelle de 3 au dénominateur précédent pour avoir le suivant, & par addition de 5 au numérateur pour avoir le suivant.

COROLLAIRE I.

On formera de même une série infinie d'espéces sim-

ples & primitives par la variation ſeule du quatriéme quotient qui eſt ici le pénultiéme, dont le plus ſimple rapport du cinquiéme genre eſt encore l'origine & le premier terme.

Série $\frac{13}{8}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{25}{16}$, $\frac{31}{20}$, $\frac{37}{24}$, $\frac{43}{28}$, $\frac{49}{32}$, &c. à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs & les numérateurs croiſſent en même tems, ce qui eſt de l'eſſence des eſpéces primitives.

Les dénominateurs croiſſent de 4, c'eſt l'expoſant du rang de ce quatriéme quotient dont la variation ſeule produit cette ſérie.

Les numérateurs croiſſent de $6 = 5 + 1$, ou $4 + 2$,

COROLLAIRE II.

On formera auſſi par une ſemblable opération une ſérie infinie d'eſpéces ſimples & primitives par la variation ſeule du troiſiéme quotient qui eſt l'antépénultiéme dans cet exemple, en le ſuppoſant ou le faiſant ſucceſſivement égal à 1. 2. 3. 4. &c. à l'infini, le premier & le plus ſimple rapport du cinquiéme genre $\frac{13}{8}$ eſt encore l'origine & le premier terme de cette ſérie.

Série $\frac{13}{8}$; $\frac{19}{11}$, $\frac{25}{14}$, $\frac{31}{17}$, $\frac{37}{20}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{49}{26}$, &c. à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs croiſſent de 3, qui eſt l'expoſant du rang du troiſiéme quotient dont la variation donne cette ſérie.

Les numérateurs croiſſent de 6, c'eſt le double de 3, expoſant du rang du quotient générateur pris en remontant, ou bien 6 eſt triple de 2, expoſant du rang du quotient générateur en deſcendant.

COROLLAIRE III.

La ſeule variation du quatriéme quotient en remontant de bas en haut, donne la ſérie des eſpéces ſimples & primitives qui ſuit.

Série $\frac{13}{8}$, $\frac{18}{13}$, $\frac{23}{18}$, $\frac{28}{23}$, $\frac{33}{28}$, $\frac{38}{33}$, $\frac{43}{38}$, $\frac{48}{43}$, &c. à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs & les numérateurs croiſſent conſtamment de 5.

COROLLAIRE IV.

On ne peut pas former une ſérie infinie d'eſpéces ſimples & primitives par la variation ſeule du 1er. quotient, car alors le dénominateur demeureroit le même 8 conſtant, ce qui eſt de l'eſſence des eſpéces ſubalternes ou dérivées, comme nous le verrons, en quoi elles différent des eſpéces primitives, dont l'eſſence conſiſte à varier en même tems tant au dénominateur qu'au numérateur.

Cependant ſi on veut faire varier le premier quotient de maniére qu'il donne une ſérie dont le dénominateur & le numérateur varient en même tems ; ce qui eſt de l'eſſence des eſpéces primitives, il faut en ce cas faire varier ce premier quotient conjointement avec la commune meſure, ou avec quelqu'autre quotient, mais la ſérie qui en réſulte contient non pas des eſpéces ſimples & primitives des rapports, mais ſeulement des eſpéces primitives & compoſées comme il ſuit.

Formation des ſéries des eſpéces compoſées & primitives des Rapports.

Les eſpéces compoſées & primitives, ſont celles qui ſe trouvent dans une ſérie infinie de rapports qui croiſſent en même tems tant au dénominateur qu'au numérateur, ce qui fait l'eſſence de l'eſpéce primitive, & qui ſont formez par la variation des deux quotients enſemble, ou de pluſieurs quotients en quelque nombre que ce ſoit combinez entre eux, ou avec la commune meſure variable de toutes les maniéres poſſibles.

Entre les eſpéces compoſées, il y en a de plus compoſées les unes que les autres, par la variation des deux quotients elles ſont moins compoſées que par la variation de trois, de quatre, de cinq, de ſix, & de tout autre

nombre de quotients à l'infini ; à mesure que le genre du rapport est plus élevé, il y a un plus grand nombre de quotients qu'on peut combiner & faire varier ensemble.

La série la plus composée des rapports du cinquiéme genre ou degré est celle qui suit.

Série $\frac{13}{8}$, $\frac{198}{82}$, $\frac{1407}{426}$, $\frac{7985}{1885}$, $\frac{26046}{5016}$, &c. à l'infini.

Elle se forme par la variation de tous les cinq quotients & de la commune mesure, comme on le voit dans les opérations suivantes.

Primitif.

13	1	198	2	1407	3	7985	4	26046	5
8	1	82	2	426	3	1885	4	5016	5
5	1	34	2	129	3	445	4	966	5
3	1	14	2	39	3	105	4	186	5
2	2	6	3	12	4	25	5	36	6
1		2		3		5		6	

Comme la commune mesure croît avec les cinq quotients, la variation de ces six nombres font croître les dénominateurs & les numérateurs tout ensemble le plus qu'il est possible dans le cinquiéme genre ou degré.

COROLLAIRE. V.

On peut par des opérations semblables & réïtérées trouver des séries d'espéces de rapports composées & primitives par la variation de deux quotients quelconques, ou de trois, ou de quatre, ou de cinq quotients, ou par la variation de la commune mesure conjointement avec un ou plusieurs quotients, c'est ainsi qu'on a trouvé les séries suivantes.

Série formée par la variation des trois premiers quotients, $\frac{13}{8}$, $\frac{46}{19}$, $\frac{113}{34}$, $\frac{233}{55}$, $\frac{417}{88}$, $\frac{758}{123}$; &c. à l'infini.

Série

Série formée par la variation des trois derniers quotients, $\frac{13}{8}$, $\frac{65}{24}$, $\frac{211}{56}$, $\frac{529}{110}$, $\frac{1121}{192}$, $\frac{2113}{308}$, &c. à l'infini.

Série formée par la variation du second, du troisiéme & 4e. quotients $\frac{13}{8}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{76}$, $\frac{199}{161}$, $\frac{353}{296}$, $\frac{573}{493}$, &c. à l'infini.

Formation des séries des espéces subalternes ou dérivées des Rapports.

Dans les séries subalternes ou dérivées, le dénominateur est toujours constant & le même que celui du premier terme de la série qui en est l'origine, & le numérateur seul est variable & croît continuellement, voilà l'essence des séries subalternes, entre lesquelles il y en a qui sont dérivées des espéces simples primitives, & les autres sont dérivées des espéces composées primitives.

Les séries subalternes ou dérivées se forment par la variation du seul premier quotient du premier terme de la série, ce qui augmente le seul numérateur; ou ce qui revient au même pour former les séries subalternes, soit un rapport ou terme quelconque d'une série infinie d'espéces primitives pris pour premier terme ou origine de la série désirée, on aura les numérateurs suivans en ajoutant au premier numérateur son dénominateur, & continuant de même par l'addition du premier dénominateur à chaque numérateur trouvé pour avoir le suivant, on trouvera de la sorte tous les numérateurs, sous lesquels on écrira le premier dénominateur qui est le dénominateur commun & constant de tous les termes de la série. Exemple, soit le plus simple rapport du cinquiéme degré, & le plus simple d'une espéce primitive, $\frac{13}{8}$, j'ai $\frac{13+8}{8}$ $\left(=\frac{21}{8}\right)$ $\frac{21+8}{8}$ $\left(=\frac{29}{8}\right)$ $\frac{29+8}{8}$ $\left(=\frac{37}{8}\right)$ &c. à l'infini, ce qui donne la série dérivée ou subalterne, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{8}$, $\frac{29}{8}$, $\frac{37}{8}$, $\frac{45}{8}$, $\frac{53}{8}$, $\frac{61}{8}$, &c. à l'infini.

Les dénominateurs sont les mêmes, c'est celui du premier terme de la série.

Analyse. ooo

Les numérateurs croissent constamment de 8 qui est le premier dénominateur du premier terme qui est l'origine de la série.

Formation des Séries infinies des individus des rapports.

Chaque rapport particulier, ou chacun des termes pris dans une série de rapports, soit dans la série des genres, soit dans les séries des espéces primitives simples, soit dans les séries des espéces primitives composées, soit enfin dans les séries des espéces subalternes ou dérivées; ce rapport quelconque pris dans l'une de ces séries à volonté, peut servir de premier terme & d'origine à une série infinie d'individus de rapports; ce qui donne une infinité de séries infinies d'individus de rapports, dont les séries se forment de la maniére qui suit.

Pour former une série d'individus de rapports sur un rapport donné quelconque; par exemple, soit le premier & plus simple rapport du cinquiéme degré ou genre $\frac{13}{8}$, je multiplie séparément le numérateur & le dénominateur par 1, 2, 3, 4, &c. qui est la suite naturelle des nombres pour avoir les multiples de ce numérateur & de ce dénominateur qui sont les termes de la série.

Exposans.	1e.	2d.	3e.	4e.	5e.	6e.	&c.
Série.	$\frac{13}{8}$,	$\frac{26}{16}$,	$\frac{39}{24}$,	$\frac{52}{32}$,	$\frac{65}{40}$,	$\frac{78}{48}$,	&c. à l'infini

Il est facile de former de la même maniére les séries des individus de tout autre rapport.

COROLLAIRE GE'NE'RAL.

Cela suffit pour donner une idée de l'étenduë de la science des rapports, & pour former les séries des rapports dont on peut avoir besoin; il est bon de s'exercer sur les rapports de différens genres, & former soi-même les séries des espéces primitives simples, ensuite des espéces primitives composées; & après en avoir formé plusieurs pour les mieux posséder, on passera aux séries

des individus; cet exercice est le meilleur moïen pour apprendre aux commençans la théorie des rapports, & leur donner la facilité de les trouver dans le besoin.

PROBLE'ME II.

Un Rapport étant exprimé par deux nombres, le réduire à sa plus simple expression; ou deux nombres étans donnez qui ne soient pas les plus petits de leur raison; trouver les deux plus petits nombres qui soient en même raison.

Soient les deux nombres donnez 1591 & 688, ou $\frac{1591}{688}$. 1°. je cherche leur commune mesure & leurs quotients par la division expliquée dans le Problême premier comme il suit.

1e. colonne.	2de. colonne. *Quotiens*	3e. colonne. Produits.
1er. *Dividende* 1591	$2 = a$	$16 \times a + c.$ $37 = 16 \times 2 + 5 = 32 + 5$
1er. *Diviseur & 2d. Dividende* 688	$3 = b$	$c \times b + 1$ $16 = 5 \times 3 + 1$
1er. *reste 2d. Diviseur & 3e. Dividende* 215	$5 = c$	$4 = c$
2d. *reste 3e. Divis.* 43 *& commune mesure.*		1 *l'unité constante.*

2°. Je me sers des quotiens contenus dans la seconde colonne pour former une troisiéme colonne comme il suit par multiplication.

J'écris en bas l'unité constante 1. dans la troisiéme colonne qui est celle des produits à droite vis-à-vis la commune mesure 43.

Ensuite j'écris 5 au-dessus de 1 dans la troisiéme colonne vis-à-vis de $5 = c$ de la seconde colonne.

Je multiple ce 5 par le quotient qui le précéde dans la

ſeconde colonne $3 = b$, & au produit j'ajoûte l'unité conſtante qui eſt au-deſſous, j'ai $c \times b + 1$, ou $5 \times 3 + 1$ qui donne 16 que j'écris vis-à-vis du pénultiéme quotient $3 = b$.

Je multiplie ce 16. par a, au produit j'ajoûte c, c'eſt $16 \times a + c = 16 \times 2 + 5 = 37$, j'écris le produit 37 vis-à-vis $2 = a$.

Ainſi les deux nombres cherchez ſont 37 & 16, ou $\frac{37}{16}$ qui ſont les plus petits qui ſoient en même raiſon que le rapport propoſé $\frac{1591}{688}$.

Démonſtration. Je dis que la troiſiéme colonne des produits contient les mêmes nombres que la premiére colonne qui contient les dividendes, avec cette différence que dans la troiſiéme colonne ils ſont diviſez par 43 qui eſt la commune meſure.

Dans la troiſiéme colonne l'unité conſtante, repréſente cette commune meſure 43 diviſée par elle-même.

Le nombre 5 qui eſt au-deſſus dans la troiſiéme colonne égal au quotient 5 qui eſt à côté, repréſente le premier reſte 215 diviſé par la commune meſure 43, car diviſant 215 par 43 le quotient eſt 5.

Le troiſiéme produit 16, qui vient de $c \times b + 1 = 5 \times 3 + 1 = 15 + 1 = 16$ repréſente le ſecond quotient $3 = b$, multiplié par le troiſiéme quotient 5 augmenté de l'unité, & cette ſomme 16 repréſente le premier diviſeur ou ſecond dividende 688 diviſé par 43, puiſque ſon quotient eſt 16.

Enfin le dernier produit 37 repréſente le premier dividende 1591 diviſé par la commune meſure 43, car 1591 diviſé par 43 donne au quotient 37.

Donc les deux nombres du rapport $\frac{37}{16}$ ſont les plus petits nombres qui ſoient en même raiſon que le rapport $\frac{1591}{688}$. Donc ce rapport eſt réduit à ſes moindres termes; ce qu'il falloit trouver & démontrer.

SECOND EXEMPLE.

1re. colonne. *Dividendes.*	2e col. *Quot.*	3e. colonne. *Produits.*
1er. *Dividende.* 8. 36. 16	5 = *a*	21. 44. = $\overline{403}\times\overline{5}$ + 129.
1er. *Diviseur &* 2d. *Dividente* 1. 57. 17 *Son produit* × 5 *à ôter du* 1e. *Divid.* 7. 85. 85	3 = *b*	403 = $\overline{129}\times\overline{3}$ + 16
1er. *Reste.* 2d. *Diviseur* *&* 3e. *Dividende.* 50. 31 *Son produit* × 3 *à ôter du* 2d. *Divid.* 1 50. 93	8 = *c*	129 = $\overline{16}\times\overline{8}$ + 1.
2d, *Reste.* 3e. *Diviseur* *&* 4e. *Dividende* 6. 24 *Son produit* × 8 *à ôter du* 3e. *Divid.* 49. 92	16 = *d*	16 = $\overline{1}\times\overline{16}$.
3e. *Reste.* 4e. *Diviseur* *& commune mesure* 39 *Son produit à ôter* *du* 4e. *Divid.* 6. 24		
Dernier reste. 00		

Opérations subsidiaires.

1. 57. 17 × 5 7. 85. 85	8. 36. 16 — 7. 85. 85 50. 31	50. 31 × 3 15093	1. 57. 17. — 1 50. 93 6 24
624 × 8 49. 92	50. 31 — 49. 92 39	39 × 16 6. 24.	

J'ai formé les deux premiéres colonnes par la division expliquée dans le Problême 1. qui m'a donné les quotiens $5 = a$, $3 = b$, $8 = c$, $16 = d$ (que je distingue par des lettres pour éviter l'obscurité) avec la commune mesure 39.

J'ai formé ensuite la troisiéme colonne qui est celle des produits, comme il suit.

Le 1[er]. terme est 1, l'unité constante premier produit.

Le second produit 16 est le second quotient $16 = d$ écrit dans la seconde colonne vis-à vis.

Ce produit 16 multiplié par le quotient précédent $8 = c$ donne $16 \times c$, ou $\overline{16 \times 8} = 128 + 1 = 129$ troisiéme produit qui est en bas vis-à-vis $8 = c$.

Multipliant $129 \times 3 = b$, au produit 387, ajoûtant 129, produit précédent la somme 403 est le quatriéme produit vis-à-vis $3 = b$.

Enfin multipliant 403×5 quotient précédent $= a$, & au produit 2015 ajoûtant le produit précédent 129, la somme 2144 est le cinquiéme produit vis-à-vis le quotient $5 = a$.

L'opération est finie, & les deux derniers produits de la troisiéme colonne $\frac{2144}{403}$ sont les deux plus petits nombres cherchez, qui expriment en moindres termes le rapport des deux nombres proposez $\frac{8.36.16.}{1.57.17.}$.

Démonstration. Dans la troisiéme colonne qui est celle des produits, en bas l'unité vis-à-vis la commune mesure 39, représente 39 divisé par lui-même.

Le second produit 16 vis-à-vis du quotient $16 = d$, représente le second reste de la premiére colonne 624 divisé par la commune mesure 39, car par hypothése & par construction 39 mesure 624. par 16, puisque le quotient 16 est celui que donne la division de 624 par 39.

Le troisiéme produit 129 représente le premier reste

de la premiére colonne divisé par la commune mesure 39, car par hypothése & par construction le premier reste 5031, contient le second reste 624 huit fois, plus une fois 39, c'est-à-dire $\overline{624 \times 8} + 39 = 50.31.$ ou $\overline{8 \times 16 \times 39} + 39$, ou $\overline{128 \times 39} + 39 = \overline{129 \times 39}$.

De même le quatriéme produit 403, représente le premier diviseur 1. 57. 17, divisé par la commune mesure 39, car par hypothése & par construction 15717, contient trois fois le premier reste 5031 plus une fois 64, c'est-à-dire $15717 = \overline{3 \times 129 \times 39} + \overline{16 \times 39} = \overline{387 \times 16 \times 39}$ $= \overline{403 \times 39}$.

Enfin par la même raison dans la troisiéme colonne le cinquiéme produit 21. 44. représente le premier dividende 8. 36. 16. divisé par la commune mesure 39, car par hypothése & par construction 836. 16. contient le premier diviseur 157. 17 cinq fois, plus une fois le premier reste 5031, c'est-à-dire que $8.\ 36.\ 16 = \overline{5 \times 403 \times 39}$ $+ 5031 = 5 \times 3 \times 8 \times 16 \times 39 = \overline{2144 \times 39}$.

Donc le rapport $\frac{2144}{403}$ exprime dans les plus petits termes possibles le rapport donné $\frac{8.\ 36.\ 16}{1.\ 57.\ 17}$, ce qu'il falloit trouver & démontrer.

PROBLEME III.

Inverse du précédent.

Trouver les moindres termes d'un Rapport donné, c'est-à-dire d'un rapport dont les quotiens sont donnez; ou trouver la suite des deux plus petits nombres qui soient tels, que divisant le plus grand des deux nombres par le plus petit, & le plus petit nombre par le premier reste; & continuant à diviser le premier reste par le second, & ainsi de suite jusqu'au dernier reste qui soit un diviseur exact, les quotiens soient ceux du Rapport donné.

Par exemple. Soit donné la suite des quotients 5. 3. 8. 16. qui sont ceux d'un rapport donné du quatriéme genre ou

degré, exprimer ce rapport par la ſuite de deux nombres premiers entr'eux.

C'eſt-à-dire, on demande les deux plus petits nombres, qui étant diviſez continuellement donnent les mêmes quotiens & dans le même ordre propoſé.

Il faut que ces deux nombres cherchez ſoient tels que le plus grand diviſé par le plus petit donne 5 pour premier quotient avec un premier reſte.

Que ce premier reſte diviſant le plus petit des deux nombres, donne 3, pour quotient avec un 2d. reſte.

Que ce ſecond reſte diviſant le premier reſte donne 8 pour quotient avec un troiſiéme reſte.

Et qu'enfin ce troiſiéme reſte diviſant le ſecond reſte, il le meſure exactement par 16 ſans aucun reſte.

Régle. J'écris à gauche dans une colonne tous les quotiens donnez dans le même ordre qu'ils ſont propoſez.

Je forme à côté vers la droite une ſeconde colonne des produits par la multiplication expliquée dans le Problême précédent.

J'écris d'abord 1 en bas pour premier produit, & au-deſſus le deuxiéme produit 16 vis-à-vis le dernier quotient.

Je multiplie ce produit 16 par 8 pénultiéme quotient, ce qui donne 128, j'ajoûte le premier produit 1, c'eſt $128 + 1 = 129$ que j'écris pour troiſiéme produit vis-à-vis 8.

Je multiplie le troiſiéme produit 129 par le troiſiéme quotient 3, au produit 387; j'ajoûte le ſecond produit 16, j'ai 403 pour quatriéme produit que j'écris vis-à-vis 3.

Enfin je multiplie le quatriéme produit 403 par le quatriéme quotient 5, & au produit 2015, j'ajoûte le troiſiéme produit 129, j'ai 2144 pour cinquiéme & dernier produit que j'écris vis-à-vis de 5.

Ce qui donne le rapport $\frac{2144}{403}$ qui contient les deux nombres cherchez qui ont les conditions requiſes par le Problême.

1re.

1re. colon. *Quotients donnez.*	2de. colonne. *Produits.*	Opération. 16 *dernier quotient* × 8 *pénultiéme quot.*
5	21. 44. *dern. prod.*	1. 28... 1er. *produit.* + 1. *l'unité constante.*
3	4. 03. 4e. *produit.*	129... 1re. *somme.* × 3... 3e. *quotient.*
8	1. 29. 3e. *produit.*	387... 2d. *produit.* + 16.. *dern. & 4e. quot.*
16.	16. 2d. *produit.*	403... 2de. *somme.* × 5... 1er. *quotient.*
	1. 1er. *produit.*	20. 15... 3e. *produit.* + 1. 29... 1re. *somme.*
		21. 44... 3e. *& dern. som.*

PROBLEME IV. FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction du triangle des Rapports.

Trouver la ſuite de tous les nombres premiers entr'eux, qui expriment le plus exactement qu'il eſt poſſible le Rapport de deux grandeurs données.

Il y a deux cas. Puiſque ces grandeurs ſont commenſurables ou incommenſurables.

Premier cas. Si les grandeurs ſont commenſurables, on trouvera facilement deux nombres qui repréſenteront leur rapport, & ſi les nombres donnez ne ſont pas les moindres termes de leur rapport, on les réduira à moindres termes par le Problême précédent.

Second cas. Si ces deux grandeurs étant incommenſurables, ſont exprimées auſſi exactement qu'il eſt poſſible par deux grands nombres qui différent de moins d'une unité, l'un par excès, l'autre par défaut, qui ne ſoient

pas des nombres premiers entr'eux, c'est-à-dire les moindres termes de leur rapport, on les réduira à moindres termes qui feront en même raison par le Problême précédent.

Mais si les nombres qui expriment le rapport donné sont premiers entr'eux, ou les plus petits nombres de leur raison; alors pour avoir la suite des plus petits nombres qui expriment d'une maniére approchée le plus exactement qu'il est possible le même rapport, ce qui est plus commode dans la pratique. Voici la Méthode pour trouver la suite de tous les nombres qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport de deux grandeurs données en nombres entiers.

Exemple. Soit donné le rapport $\frac{85.17.}{39.13.}$ exprimé par deux nombres qui sont les plus simples de leur raison, & premiers entr'eux, qui expriment ce rapport le plus exactement qu'il est possible.

1°. Je fais sur ces deux nombres la division expliquée par le Problême 1er. qui me donne les sept quotiens suivans que je distingue par des lettres pour éviter la confusion.

a, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*.
2, 5, 1, 1, 1, 28, 8. Dans cet ordre, ce qui me donne deux colonnes.

La premiére colonne contient les dividendes, les diviseurs & les restes.

La seconde colonne contient les sept quotients *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, exprimez en chifres & en lettres.

Il s'agit de former d'autres colonnes que je nomme les colonnes des produits (sur ces deux premiéres, ainsi construites,) ce qui se fait de la maniére qui suit.

La troisiéme colonne vers la droite se forme de cette sorte. J'écris 1 qui est l'unité pour premier produit vis-à-vis le dernier quotient 8 = *g*. Je forme tous les pro-

duits de cette troisiéme colonne en remontant, de la maniére expliquée dans le Problême précédent, ce qui se fait en multipliant chacun des produits trouvez par le quotient de la seconde colonne qui est du rang au-dessus, & ajoûtant à ce produit celui qui est au-dessous du multiplié dans la troisiéme colonne.

C'est-à-dire, j'écris dans la troisiéme colonne le second produit 28 vis-à-vis du quotient $28 = f$, de la seconde colonne.

Je multiplie ce produit 28 par le quotient du rang supérieur $1 = e$. Au produit 28 j'ajoûte le premier produit 1 de la troisiéme colonne, j'écris la somme 29 dans la troisiéme colonne pour troisiéme produit

Je multiplie ce troisiéme produit 29 par le quotient précédent de la seconde colonne $1 = d$. Et au produit 29 j'ajoûte le produit précédent 28, & j'écris la somme 57 dans la troisiéme colonne pour quatriéme produit.

Je multiplie ce 57 par le quotient précédent $1 = c$ de la seconde colonne, & au produit 57, j'ajoûte le produit précédent 29, & j'écris la somme 86 dans la troisiéme colonne pour cinquiéme produit.

Je multiplie ce 86 par le quotient précédent $5 = b$; & au produit 430 j'ajoute le produit précédent 57, & j'écris la somme 487 dans la troisiéme colonne pour sixiéme produit.

Enfin je multiplie ce 487 par le quotient précédent qui est le premier de la seconde colonne $2 = a$; & au produit 974 j'ajoûte le produit précédent 487, & j'écris la somme 10. 60 dans la troisiéme colonne pour le septiéme & dernier produit.

Je conclus de la formation de cette troisiéme colonne, que le rapport $\frac{10\,60}{487}$ contient les plus petits nombres qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport donné $\frac{85.17}{39.13}$.

Nous verrons ensuite la formation des autres colonnes.

Premiére colonne. *Contenant les Dividendes. les Diviseurs & les Restes.*	2de. col. *Quot.*	3me. col. *Prod.*	4me. col. *Prod.*	5me. col. *Prod.*	6me. col. *Prod.*	7me. col. *Prod.*	8me. col. *Prod.*
1er. *Dividende.* 85. 17	2=*a*	10.60	37	24	13	11	2
1er. *Diviseur & 2d. Dividende* 39.13	5=*b*	4.87	17	11	6	5	1
1er. *Reste.* 2d. *Divis.* 6.91 & 3e. *Dividende* 34.55	1=*c*	86	3	2	1	1	
2d. *Reste.* 3e. *Diviseur & 4e. Dividende* 4.58	1=*d*	57	2	1	1		
3e. *Reste.* 4e. *Diviseur & 5e. Dividende* 2.33	1=*e*	29	1	1			
4e. *Reste.* 5e. *Diviseur & 6e. Dividende* 2.24	28=*f*	28	1				
5e. *Reste.* 6e. *Diviseur & 7e. Dividende* .... 8 *Son produit par* 28... 224	8=*g*	1					
6e. *Reste.* 7e. *Diviseur & la commune mesure* 1							

Formation de la quatriéme colonne

1°. J'écris dans la quatriéme colonne l'unité 1 dans une cellule vis-à-vis le second quotient 28 = *f* de la seconde colonne pour le premier produit de la 4e. colonne.

2°. Je multiplie cet 1. par le troisiéme quotient 1 = *e* de la seconde colonne, & j'écris 1 pour le second produit de la quatriéme colonne.

3°. Je multiplie ce second produit 1×1, j'ajoûte le premier produit qui est 1, & j'écris la somme 2 dans la 4e. colonne vis-à-vis de 1 = *d* pour 3e. produit de la 4e. colonne.

4°. Je multiplie ce troisiéme produit 2 par le quotient précédent 1 = *e*, & au produit 2 j'ajoûte le produit précédent 1, & j'écris la somme 3 pour quatriéme produit.

5°. Je multiplie ce quatriéme produit 3 par le quotient précédent 5 = *b*; & au produit 15 j'ajoûte le produit précédent 2, & j'écris 17 pour cinquiéme produit.

6°. Je multiplie ce cinquiéme produit 17 par le quotient précédent 2 = *a*, & au produit 34, j'ajoûte le produit précédent, 5, & j'écris la somme 37 pour sixiéme & dernier produit.

D'où je conclus que les nombres du rapport $\frac{37}{17}$ sont encore sensiblement dans le même rapport que les nombres donnez $\frac{85\,17}{39\,13}$, car divisant les uns & les autres par la division expliquée dans le Problême premier, ils donneront les mêmes quotients qui sont par construction les multiplicateurs, dont les nombres ou produits de la quatriéme colonne ont été formez, excepté le dernier quotient que j'ai supposé 1, au lieu de 1 $\frac{8}{225}$.

Formation de la cinquiéme, sixiéme, septiéme & huitiéme colonnes.

On formera encore de la même maniére la 5e. 6e. 7e. & 8e. colonnes qui donneront les rapports $\frac{24}{11}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{2}{1}$, qui sont encore chacun sensiblement égaux au rapport donné $\frac{85.\,17}{39.\,13}$ on aura ainsi la suite de tous les nombres premiers entr'eux, qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport de 85 17, à 39 13, telle qui suit dans les deux rangs que nous avons détachez des colonnes formées ci-dessus.

1re. col.	3e. col.	4e.	5e.	6e.	7e.	8e.
85. 17.	1060.	37.	24.	13.	11.	2
39. 13.	487.	17.	11.	6.	5.	1

On peut toujours augmenter le nombre des colonnes jusqu'à ce qu'on arrive à une colonne qui n'ait que deux nombres, après laquelle on ne peut pas en former d'autres.

Démonstration du Problême & du résultat de chaque colonne des produits.

On peut démontrer le Problême en général en cette sorte, deux nombres qui ont exactement le même rapport que deux autres nombres, donnent précisément la même suite de quotients, & plus leur rapport est approchant, plus aussi la suite de leurs quotients doit être approchante ; or par la construction les nombres 1060 & 487, ont les mêmes quotients que les deux nombres 8517 & 3913, excepté le dernier quotient 8 que j'ai omis exprès dans la colonne des produits pour mettre en sa place l'unité, donc les nombres du rapport $\frac{1060}{487}$ sont fort approchans des nombres qui expriment le rapport $\frac{8517}{3913}$; pour s'en convaincre, il faut examiner leur différence, c'est-à-dire, les limites d'approximation par excès & par défaut comme il suit.

Limites d'approximation ou examen des erreurs, tant par excès que par défaut.

Comme il est impossible d'exprimer exactement le rapport donné, il y a erreur ou par excès ou par défaut dans chaque terme de la série ci-dessus $\frac{1060}{487}$, $\frac{37}{17}$, $\frac{24}{11}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{2}{1}$, pour connoître les limites, il faut remonter aux hypothéses qui ont donné les produits, comme il suit.

1°. Dans la premiére colonne j'ai supposé que 8 mesuroit 225 négligeant l'unité qui reste, car il mesure 224 $=$ 225 $-$ 1, ce qui donneroit 28 $\frac{1}{8}$, au lieu du quotient 28 $= g$, donc ce quotient g est trop petit, ainsi en écrivant dans la troisiéme colonne le second produit 28, il est trop petit de $\frac{1}{8}$, puisque le véritable quotient est 28 $\frac{1}{8}$, qui surpasse 28 de $\frac{1}{8}$.

2°. J'écris 29 dans la troisiéme colonne pour la même raiſon, au lieu de 29 $\frac{1}{8}$, & 57 pour 57 $\frac{2}{8}$, & 86 au lieu de 86 $\frac{3}{8}$, & 487 au lieu de 487 $\frac{17}{8}$, ou de 489 $\frac{1}{8}$, & enfin 1060 au lieu de 1060 $\frac{37}{8}$, ou de 1064 $\frac{5}{8}$.

Donc les excès des véritables quotients ſur les quotients approchez ſont $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{37}{8}$, dont les numérateurs 1. 1. 2. 3. 17. 37. ſont produits continuellement par la multiplication du numérateur 8 par le quotient précédent de la ſeconde colonne, & le produit ajouté au numérateur ſuivant en remontant comme il paroît dans la table ſuivante.

Colonne des Quotients.	*Numérateurs des excès & des défauts.*	*Produits exacts de la colonne.*
2 = *a*	37	1060 $\frac{37}{8}$
5 = *b*	17	487 $\frac{17}{8}$
1 = *c*	3	36 $\frac{3}{8}$
1 = *d*	2	57 $\frac{2}{8}$
1 = *e*	1	29 $\frac{1}{8}$
28 = *f*	1	28 $\frac{1}{8}$
8 = *g*		1

Ce qui ſe démontre comme dans le Problême 2^d. puiſque c'eſt la même opération, comme il ſuit.

Démonſtration des limites de la troiſiéme colonne.

Puiſque nous venons de voir que 487 $\frac{17}{8}$ eſt à 1060 $\frac{37}{8}$, exactement comme 3913 eſt à 8517, ſi j'en ôte les deux fractions $\frac{17}{8}$, & $\frac{37}{8}$, qui ſont ſenſiblement dans le même rapport, comme on le verra dans la formation de la quatriéme colonne, il ſuit de-là que les reſtes 487 &

1060 seront encore sensiblement dans le même rapport, ce qui est évident par la formation de la quatriéme colonne expliquée ci-dessus.

Démonstration des limites de la quatriéme colonne.

Je dis que les deux nombres de la quatriéme colonne 37 & 17, sont encore sensiblement dans le même rapport que les deux nombres donnez 8517, & 3913, c'est-à-dire qu'ils donneront par la division les mêmes cinq premiers quotients & dans le même nombre & le même ordre $2 = a$, $5 = b$, $1 = c$, $1 = d$, $1 = e$; mais ils différent dans le sixiéme quotient que j'ai supposé 1, au lieu de $1\frac{8}{225}$.

Car en divisant de suite 85 17, & 39 13, & tous les restes par 225, on trouvera ce qui suit; sçavoir,

D'abord divisant 225 par 225, le quotient est 1, comme je l'ai écrit dans la quatriéme colonne.

En remontant 233 divisé par 225, le quotient est $1\frac{8}{225}$, au lieu de 1 que j'ai mis à la seconde cellule de la quatriéme colonne pour second produit.

En remontant encore 458 divisé par 225 le quotient est $2\frac{8}{225}$, au lieu de 2 que j'ai mis à la quatriéme colonne pour troisiéme produit.

Ensuite 691 divisé par 225, le quotient est $3\frac{16}{225}$, au lieu de 3 que j'ai écrit à la quatriéme colonne pour quatriéme produit.

De même 3913 divisé par 225, le quotient est $17\frac{88}{225}$, au lieu de 17 que j'ai écrit à la quatriéme colonne pour cinquiéme produit & dernier.

Donc les excès des veritables quotients sur les quotients approchez qui sont les produits contenus dans la quatriéme colonne sont $\frac{8}{225}$, $\frac{8}{225}$, $\frac{16}{225}$, $\frac{88}{225}$, $\frac{192}{225}$, dont les numérateurs 8, 8, 16, 88, 192, sont produits continuellement par la multiplication du numérateur 8 multiplié

tiplié par le quotient précédent, & le produit ajouté au numérateur précédent, comme il paroît par la table qui suit, ce qui se démontre comme ci-dessus.

Quotients.	*Numérateurs des excès & des défauts.*	*Produits exacts de la 4e. colonne.*
2 = *a*	192	$37\frac{192}{225}$
5 — *b*	88	$17\frac{88}{225}$
1 = *c*	16	$3\frac{16}{225}$
1 = *d*	8	$2\frac{8}{225}$
1 = *e*	8	$1\frac{8}{225}$

C'est-à-dire, puisque $37\frac{192}{225}$ est à $17\frac{28}{225}$ exactement comme 8517 est à 3913, & que les deux excès $\frac{192}{225}$ & $\frac{88}{225}$ qui sont entre eux comme 24 à 11, qui sont encore dans le même rapport, comme on le voit par la formation de la cinquiéme colonne, c'est-à-dire qu'ils sont entre eux sensiblement comme 8517 est à 3913.

COROLLAIRE.

Regle générale pour les limites.

L'origine du triangle des Rapports.

Ce Problême me fournit par la formation de ses colonnes distinguées par carreaux, la figure d'un triangle numérique que je nommerai désormais *le triangle des Rapports*; c'est de ce triangle que je tire une Méthode générale pour connoître le plus exactement qu'il est possible les rapports des nombres tant commensurables qu'incommensurables, qui se trouvent exprimez dans les deux rangs d'en haut par la suite des nombres entiers premiers entre eux, non pas dans la derniére précision, ce qui

eſt impoſſible dans les nombres irrationaux, mais avec la plus grande approximation poſſible alternativement par excès & par défaut, avec des limites qui déterminent l'erreur.

Des limites.

Toute Méthode d'approximation eſt inutile, ſi elle n'eſt accompagnée d'une autre Méthode qui donne les limites d'erreur, ſoit par excès, ſoit par défaut; ici je donne une Méthode facile pour ces limites, en comparant comme il ſuit par la régle de trois chaque terme de la ſérie compriſe dans les deux premiers rangs d'en haut trouvez par l'opération ci-deſſus avec les nombres du rapport donné.

$\frac{8517}{3913}. \frac{1060}{487}. \frac{37}{17}. \frac{24}{11}. \frac{13}{6}. \frac{11}{5}. \frac{2}{1}$ Série des nombres compris dans les deux rangs d'en haut.

Régle générale.

Faites cette analogie ou régle de trois, comme le nombre du 2ᵈ. rang ou le dénominateur eſt au nombre correſpondant du premier rang ou le numérateur.

Ainſi le plus petit des deux nombrres donnez 3913, eſt à un quatriéme nombre.

Or ce quatriéme nombre qui n'eſt qu'approché & non pas exact, différe ou par excès ou par défaut d'une fraction, dont le dénominateur eſt le dénominateur même compris dans le ſecond rang d'en haut, & le numérateur eſt le reſte de la diviſion que donne la regle de trois, ce qui s'éclaircira par les exemples ſuivans.

Exemple. Pour connoître l'erreur du dernier terme de la ſérie ci-deſſus, j'ai cette analogie, 1 : 2 : : 3913 : 7826; je trouve ce quatriéme nombre par la régle de trois comme il ſuit, je multiplie le plus petit des nombres donnez 3913 par le nombre 2, numérateur du rapport $\frac{2}{1}$, le pro-

duit eſt 7826, que je diviſe par 1 dénominateur du même rapport $\frac{2}{1}$, le quotient eſt 7826.

Enſuite j'ôte ce quotient 7826 du plus grand des deux nombres donnez 8517, la différence eſt 691, c'eſt l'excès dont 8517 ſurpaſſe le quotient 7826.

Opération

Analogie. 1 : 2 : : 3913 : 7826 — 3913 × 2

1 { 78.26 { *Quotient.* 7826

85.17
— 78.26 défaut $\frac{691}{1}$

691

J'ai donc une fraction pour l'erreur par défaut dont le numérateur eſt cette différence 691, & le dénominateur eſt 1, qui eſt le dénominateur du rapport $\frac{2}{1}$.

Autrement. Dans la ſérie des rapports formée par les nombres des deux rangs d'en haut ; je conſidére deux choſes, 1°. le nombre des quotients dont la multiplication a donné chaque rapport particulier, 2°. le caractére ſpécial du pénultiéme quotient qui fournit le deuxiéme produit en commençant l'opération, & qui eſt au-deſſus de l'unité dans chaque colonne, j'examine ſi ce pénultiéme quotient eſt défectif ou exceſſif, c'eſt à-dire par défaut ou par excès, d'où je tire cette régle générale.

Régle générale pour trouver les limites.

1er. cas. Si le pénultiéme quotient eſt défectif, & que le nombre des quotients reſtans qui ſerviront de multiplicateurs (pour l'une des colonnes dont il s'agit), ſoit un nombre pair ſans y comprendre l'unité, dans ce cas le plus grand des deux nombres exprime par excès le rapport propoſé.

2d. cas. Mais ſi le nombre des quotients reſtans eſt impair, alors le rapport eſt exprimé par défaut.

3e. cas. Au contraire, si le pénultiéme quotient qui donne le 2d. produit de la colonne dont il s'agit est excessif, & le nombre des quotients restans est ou pair ou impair, alors le plus grand des deux nombres de cette colonne exprime par défaut le rapport donné.

D'où il suit que lorsque tous les quotients sont défectifs comme il arrive ordinairement, la série des rapports trouvés dans les deux rangs d'en haut expriment le rapport donné alternativement par excès & par défaut.

Ainsi dans la huitiéme colonne le rapport $\frac{2}{1}$ exprime par défaut le rapport $\frac{8517}{3913}$, puisque le quotient $2 = a$ est défectif, & laisse un reste, d'ailleurs le nombre des quotients restans est impair non compris l'unité, puisque ce quotient 2 est unique, ce qui donne cette analogie comme ci-devant.

1 : 2 :: 3913 : 7826 — 8517

Opération. 3913 — 7826 Défaut $\frac{1}{691}$

×2 *Quotient* 691

$1 \{ 7826 \{ 7826$

Dans la septiéme colonne le rapport $\frac{11}{5}$ est excessif, puisque le pénultiéme quotient $5 = b$ est défectif, & que le nombre des quotients est pair non compris l'unité, ce qui donne par la régle ci-dessus cette analogie.

$11 : 5 :: 3913 : 1778 + \frac{7}{11}$.

Opération. 3913

×11

3913

39130 *Quotient.*

$5 \{ 43043 \{ 8608 + \frac{3}{5}$

8 . . 40 — excès.
3 : 0 — or 8517
8 . . 3 0 — $-\ 8608 + \frac{3}{5}$ — $\frac{91 + \frac{3}{5}}{5}$ ou $\frac{24}{5}$
0 . . . . 0 : 4 : 3 — $= 91 + \frac{3}{5}$
8 . . . . . 4 0

reste 3

Dans la sixiéme colonne le rapport $\frac{13}{6}$ est défectif, puisque le pénultiéme quotient 1 = *c* est défectif laissant un reste, & que le nombre des quotients non compris l'unité est impair, ce qui donne par la régle ci-dessus cette analogie.

$6 : 13 :: 3913 : 8478\frac{1}{6} -$

Opération. 3913
× 13

1.17.39
3.91.30

6 { 5.08.69 { 84.78 $\frac{1}{6}$

8 . . 4 8
2 : 8 — défaut.
4 . . . 2 4 — or 8517
4 : 6 — $-\ 8478\frac{1}{6}$ — $\frac{38\frac{1}{6}}{6}$ ou $\frac{43}{6}$
7 . . . . 4 2 — $= -\ 38\frac{1}{6}$
4 : 9
8 . . . . . . 4 8

reste 1

Dans la cinquiéme colonne le rapport $\frac{24}{11}$ est excessif, puisque le pénultiéme quotient 1 = *d* est défectif laissant un reste, & que le nombre des quotients est pair non compris l'unité, ainsi par la régle j'ai cette analogie.

$11 : 24 :: 39\,13 : 8537\frac{5}{11} +$

Opération. 3913
× 24

1.5652
7.826 *Quotient.*
{ 11 { 9.3.9.12. { 8564 $\frac{8}{11}$
8 . . 88
5 : 9 excès.
5 . . . 5 5 or 8517
4 : 1 — 8564 $\frac{8}{11}$ 47 + $\frac{8}{11}$
6 . . . . 3 6 ou $\frac{11}{11}$
= 47 $\frac{8}{11}$ 11
5 : 2
4 . . . . . . 4 4
reste 8

Dans la quatriéme colonne le rapport $\frac{37}{17}$ est défectif, puisque le pénultiéme quotient 1 = *e* est défectif, & que le nombre des quotients restans non compris l'unité est impair, ce qui donne cette analogie.

17 : 37 : : 3913 : 85 16 $\frac{19}{17}$ —

Opération. 39. 13
× 37 ou pat 40 — 3.
15. 65. 20
— 1. 17. 39 *Quotient.*
{ 17 { 14. 47. 81. { 85. 16 $\frac{9}{17}$ —
8 . . 13 6
8 : 7 or 8517
5 . . . . 8 5 — 8516 + $\frac{9}{17}$
2 : 8 = défaut $\frac{9}{17}$.
1 . . . . . 1 7
1 1 · 1
6 . . . . . 1 0 2
reste 9

Enfin dans la troisiéme colonne le rapport $\frac{1060}{487}$ est ex-

cessif, parce que le pénultiéme quotient 28 $=f$ est défectif, laissant un reste, d'ailleurs le nombre des quotients non compris l'unité, est pair, ce qui donne cette analogie.

$487 : 1060 :: 3913 : 8517 \frac{1}{487}$ —
Quotient

```
{ 487 { 4.14.77.80 { 85.17 1/487
_____________________________________
8 . . . 3.89.6
        25 1:7                                   3913
5 . . . . 24 3 5        = 8517 + 1/487         × 1060
           8 2:8        or 8517                _______
1 . . . . . . 4 8 7     ____________           23.4780
           3 4 1:0      excès + 1/487          3.91.3 . .
7 . . . . . . 3 4 0 9                          _________
              _____                            4.14.77.80.
                1
```

On voit par le détail des opérations l'erreur de chacun des termes de la série, soit par excès, soit par défaut, il est impossible de trouver d'autres moindres nombres qui expriment plus exactement le même rapport $\frac{8517}{3913}$, car quelques nombres que l'on choisisse, on trouvera toujours que l'excès ou le défaut sera toujours plus grand, & par conséquent moins approchant, ce qui démontre que ceux-ci approchent davantage; ce qu'il falloit démontrer.

Remarque fondamentale.

Si le rapport donné est exprimé exactement par les deux nombres donnez, la série donne exactement la suite de tous les nombres premiers entre eux qui expriment le même rapport le plus exactement qu'il est possible.

Si les deux nombres donnez ne sont pas exacts, mais seulement approchez d'un rapport géométrique donné quelconque, ou l'un des nombres exact, & l'autre seule-

ment approché, on opérera de même comme ci-dessus.

Si les nombres donnez sont irrationaux & incommensurables, il sera toujours fort aisé de substituer en leur place deux nombres rationaux entiers aussi grands qu'on voudra, qui différent chacun de moins d'une unité du rapport donné, & dont l'un en approche par excès & l'autre par défaut; dans ce cas il faut deux opérations, la premiére sur les nombres approchés par excès qui donne une premiére série, & la seconde opération sur les nombres approchés par défaut qui donne une seconde série, comparant ensuite ces deux séries, on préfére celle qui approche davantage, soit par excès, soit par défaut, comme nous le verrons dans la suite.

LE TRIANGLE DES RAPPORTS

Ou Méthode générale & facile pour trouver la série infinie de tous les nombres premiers entr'eux, qui expriment le plus exactement qu'il est possible un Rapport donné quelconque.

Définition. Je nomme un triangle des rapports, le triangle numérique composé de plusieurs colonnes divisées par carreaux ou cellules tel qu'est celui qui résulte dans le Problême quatriéme qui précéde, de la formation des derniéres colonnes 3e. 4e, 5e. 6e, 7e. & 8e. qui présentent à la vûë la figure d'un triangle rectangle.

C'est ce triangle que je nomme *le triangle des Rapports*, & je l'employe comme un instrument universel pour former la plus simple, la plus convergente & la plus parfaite des séries pour exprimer un rapport quelconque; par exemple, soit proposé le rapport $\frac{8517}{3913}$.

Pour former le triangle des rapports qui donne la série des fractions en nombres premiers entr'eux qui expriment ce rapport le plus exactement qu'il est possible.

1°. Il faut par la division expliquée dans le Problême premier trouver les quotiens & la commune mesure des deux

deux nombres qui expriment ce rapport, qui sont les sept quotients suivans trouvez dans cet ordre.

1er.	2d.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e. Quotient.
$2 = a$.	$5 = b$.	$1 = c$.	$1 = d$.	$1 = e$.	$28 = f$.	$8 = g$.

Voilà dans leur ordre analytique les sept quotiens générateurs du triangle des rapports, que je nomme générateurs parce qu'ils sont les seuls avec la commune mesure qui entrent dans la formation du triangle des rapports. Les extrêmes sont; sçavoir, $2 = a$ qui est le premier, & $8 = g$ qui est le dernier, tous les autres sont les quotients moïens.

2°. Je range ces mêmes quotients par Synthése dans un ordre contraire.

1er. Quot.	2d.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e. Quotient.
$8 = g$.	$28 = f$.	$1 = e$.	$1 = d$.	$1 = c$.	$5 = b$.	$2 = a$.

3°. Si je prends les sept quotients en nombres, je formerai par la multiplication & l'addition un triangle des rapports numérique & particulier pour le rapport donné.

Mais si je prends ces sept quotients en lettres, je formerai par leur multiplication & addition un *Triangle des Rapports Analytique & universel* qui servira de formule générale ou de régle abrégée pour construire sur ce modéle tous les *Triangles des Rapports numériques & particuliers* qu'on voudra en substituant à la place des lettres les quotients numériques qu'on aura trouvé par la division pour chaque cas particulier.

Ainsi *le Triangle des Rapports Analytique ou universel*, & le *Triangle des Rapports numérique & particulier* ne différent que par la seule expression, qui est générale dans le premier triangle, & qui est particuliére ou déterminée dans le second triangle, nous les formerons ici tous les deux en même tems pour montrer leur conformité, & nous prendrons pour exemple un rapport du cinquiéme genre ou degré qui n'a que cinq quotients, afin que les

opérations puissent se renfermer dans deux pages, & représenter les triangles sans confusion.

Formation du Triangle des Rapports, pour trouver la Série infinie des fractions qui expriment en nombres premiers entr'eux le plus exactement & le plus promptement qu'il est possible un Rapport donné.

Exemple. Soit le rapport donné $\frac{869}{178}$.

Pour former le triangle des rapports sur ces deux nombres.

Préparation. 1°. Je me sers de la division expliquée dans le Problême premier pour trouver la commune mesure & les quotients par cette opération.

		Quotients.
1er. *Dividende.*	869	4 = a
1er. *Diviseur & 2d. Dividende*	178	1 = b
Produit × 4 du Diviseur à ôter du 1er. Dividende . . .	712	
1er. *Reste. 2d. Diviseur & 3e. Dividende*	157	7 = c
2d. *Reste. 3e. Diviseur & 4e. Dividende*	21	2 = d
3e *Reste. 4e. Diviseur & 5e. Dividende*	10	10 = e
Dernier Diviseur, reste & commune mesure	1	

Ainsi j'ai par Analyse les cinq quotients générateurs dans cet ordre,

1er. 2d. 3e. 4e. 5e. Quotient.

4 = *a*. 1 = *b*. 7 = *c*. 2 = *d*. 10 = *e*.

Ensuite je peux ranger ces mêmes quotients par Synthése dans un ordre contraire, parce que la Synthése est opposée à l'Analyse de cette sorte.

1er. Quotient. 2d. 3e. 4e. 5e. Quotient.
10=e. 2=d. 7=c. 1=b. 4=a.

Je nomme ces quotients diſpoſez par Analyſe les quotiens générateurs du triangle des rapports, parce que ce ſont les ſeuls nombres avec la commune meſure qui entrent dans la formation du triangle des rapports; chacun de ces quotients ſert à former l'une des colonnes de ce triangle, d'où il ſuit que le triangle des rapports contient autant de colonnes qu'il y a de quotients trouvez par la diviſion précédente ſur le rapport propoſé, c'eſt-à-dire que dans cet exemple où le rapport $\frac{869}{178}$ donne cinq quotients, le triangle des rapports aura cinq colonnes.

Préparation de l'eſpace néceſſaire pour écrire & former le Triangle des Rapports pour les cinq Quotiens précédens.

1°. Je tire une ligne droite indéfinie qui doit ſervir de baſe au triangle des rapports, ſur laquelle je marque ſix diviſions inégales dans la proportion qui ſera expliquée ci-deſſous, pour déterminer par des lignes perpendiculaires indéfinies les eſpaces néceſſaires pour les cinq colonnes que je formerai ſur les cinq quotients générateurs trouvez ci-deſſus.

La premiére diviſion de gauche à droite, aura une largeur ſenſible pour écrire le premier quotient, & ce premier interval ſervira d'échelle pour déterminer tous les autres. C'eſt l'eſpace de la premiére colonne, ſa hauteur ſera double de ſa largeur, parce qu'elle ne contient que deux rangs pour $\frac{1}{4}$.

La ſeconde diviſion ou le ſecond interval de gauche à droite pour la ſeconde colonne aura de largeur le double de la premiére colonne & le triple de hauteur, parce qu'elle doit avoir ſix termes ou rangs, & deux chifres ou deux lettres dans le rang d'en bas.

La troisiéme division ou le troisiéme interval de gauche à droite pour la troisiéme colonne, aura de largeur le triple de la largeur de la premiére parce qu'elle contient trois termes dans le rang d'en bas. Sa hauteur contient cinq fois la hauteur de la premiére colonne, parce qu'elle contient dix termes ou dix rangs.

On déterminera facilement de même les largeurs & les hauteurs des autres colonnes en suivant les progressions des séries suivantes, qu'on peut continuer indéfiniment.

Série pour déterminer les hauteurs des colonnes du triangle 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13, &c. c'est la progression continuë des nombres impairs.

Série pour déterminer les largeurs des colonnes du triangle des rapports, 1. 2. 3. 5. 8. 13. &c. qu'on peut continuer aisément, puisque chaque terme pris dans le milieu de la série égale la somme des deux termes précédens. Exemple $13 = 5 + 8$.

Construction de chaque colonne du Triangle des Rapports en particulier.

Pour éviter les répétitions, je forme tout à la fois chacune des colonnes du triangle des rapports Analytique ou universel, & celle du triangle des rapports numérique & particulier en même tems, cela servira à les comparer & à montrer que les deux triangles ne différent que par la seule expression.

Après avoir formé séparément chacune des cinq colonnes, je les rassemble ensuite pour former le triangle des rapports tout entier dont ces colonnes sont les parties.

La premiére colonne ne contient que deux termes; le premier terme est l'unité constante, c'est la commune mesure & la premiére somme Analogique, ou le premier terme constant & invariable dans toutes les colonnes du triangle des rapports.

Le second terme est le premier quotient generateur

$4 = a$. C'eſt le quotient propre & particulier de cette premiére colonne, car chaque colonne a un quotient particulier, qui a le même expoſant dans l'ordre Analytique.

Premiére colonne en Lettres.	Premiére colonne. en Chifres.
I. *L'unité conſtante.* 1re. *ſomme Analogique.*	1 *Premiére ſomme Analogique.*
a 1er. *Quotient.*	4. *Premier Quotient.*

Cette premiére colonne me donne le premier terme de la ſérie que je veux former, c'eſt $\frac{1}{a} = \frac{1}{4}$. Ce rapport approche par excès.

La ſeconde colonne contient ſix termes ſur ſa hauteur, & deux termes ſur ſa largeur.

Sur ſa hauteur le premier terme eſt l'unité conſtante 1, qui eſt toujours la premiére ſomme analogique.

Le ſecond terme, eſt le ſecond quotient $1 = b$, qui eſt le quotient propre & particulier à la ſeconde colonne, puiſqu'il eſt le ſecond dans l'ordre Analytique.

Le troiſiéme terme eſt le premier quotient $4 = a$ comme multiplicateur du ſecond quotient.

Le quatriéme terme eſt le produit de ces deux quotients, c'eſt $\overline{4 \times 1} = 4 = ab$. C'eſt le premier produit contenu dans cette colonne.

Le cinquiéme terme eſt l'unité conſtante qui eſt la premiére ſomme analogique répétée pour la premiére fois.

Le ſixiéme terme eſt la ſomme du premier produit & de la premiére ſomme répétée, c'eſt-à-dire $\overline{4 + 1} = 5$, ou $\overline{ab + 1}$.

Seconde colonne en Lettres.	Seconde colonne. en Nombres.
1 *Premiére somme Analogique.*	1. *Premiére somme Analogique.*
b. *Second Quotient & pénultiéme somme*	1. *Second Quotient & pénultiéme somme*
×a. *Premier Quotient.*	×4. *Premier Quotient.*
a b. *Premier produit.*	=4. *Premier produit.*
+1. *Premiére somme répetée.*	+1. *Premiére somme répétée.*
a b + 1. *Derniére somme.*	5. *Derniére somme.*

La troisiéme colonne contient trois termes en lettres sur sa largeur en bas, qui se réduit à un seul nombre dans le triangle numérique & particulier.

Sur sa hauteur elle contient dix termes.

Le premier terme est l'unité constante 1.

Le second terme est le troisiéme quotient $7 = c$ qui est le quotient propre & particulier de la troisiéme colonne.

Le troisiéme terme est le second quotient $1 = b$, comme multiplicateur.

Le quatriéme terme est le produit des deux quotients $\overline{7 \times 1} = \overline{c \times b} = bc$. Premier produit de cette colonne.

Le cinquiéme terme est la premiére somme analogique 1. répétée une seconde fois.

Le sixiéme terme est la somme du premier produit & de l'unité répétée. C'est $\overline{7+1} = 8 = \overline{bc+1}$.

Le septiéme terme est le premier quotient $4 = a$, comme multiplicateur.

Le huitiéme terme est le produit du premier quotient par la seconde somme $4 \times 8 = 32$, ou $\overline{bc+1} \times a = abc + 1a$, c'est le second produit de la troisiéme colonne.

Le neuviéme terme est le troisiéme quotient propre de

cette troiſiéme colonne repétée une ſeconde fois $7 = c$.

Le dixiéme terme eſt la ſomme du ſecond produit & du troiſiéme quotient répété $\overline{32+7} = 39 = abc+1a+c$. C'eſt la 3e. & derniére ſomme de la 3e.colonne.

Troiſiéme colonne. en Lettres.		Troiſiéme colonne. en Nombres.	
1.	*Premiére ſomme.*	1.	*Premiére ſomme.*
c.	3e. *Quotient propre.*	7.	3e. *Quotient propre.*
×b.	2d. *Quotient.*	×1.	2d. *Quotient.*
bc.	1er. *produit*	7.	1er. *produit.*
1.	1re. *ſomme répetée.*	+1.	1re. *ſomme répétée.*
bc+1.	2de. *& pénultiéme ſomme.*	8.	*pénultiéme ſomme.*
×a.	1er. *Quotient.*	×4.	1er. *Quotient.*
abc+1a.	2d. *produit.*	32.	2d. *produit.*
+c.	3e. *Quotient répété.*	+7.	3e. *Quotient répété.*
abc+1a+c.	*Derniére ſomme.*	39.	*Derniére ſomme.*

La quatriéme colonne contient ſur ſa largeur en bas quatre termes en lettres, & un ſeul nombre en chifres.

Sur ſa hauteur elle contient quatorze termes, c'eſt une Loi conſtante, que le nombre des termes croît toujours de 4 d'une colonne à la ſuivante à droite, ainſi la premiére colonne n'a que deux termes, la ſeconde en a ſix, la troiſiéme a dix termes, la quatriéme quatorze termes, &c. c'eſt une cellule entiére.

Le 1er. terme eſt l'unité conſtance 1. Premiére ſomme.

Le ſecond terme eſt le quatriéme quotient $2 = d$, qui eſt le quotient propre & particulier de la 4e. colonne.

Le troiſiéme terme eſt le troiſiéme quotient $7 = c$, comme multiplicateur.

Le quatriéme terme eſt le produit de ces deux quotients $2 \times 7 = 14 = c \times d = cd$.

Le cinquiéme terme eſt la premiére ſomme 1 répetée.

Le ſixiéme terme eſt la ſomme du premier produit & de la premiére ſomme $\overline{14+1} = 15 = cd + 1$. C'eſt la ſeconde ſomme de cette colonne.

Le ſeptiéme terme eſt le ſecond quotient $1 = b$ comme multiplicateur.

Le huitiéme terme eſt le produit de la ſeconde ſomme multipliée par le ſecond quotient, ce qui donne le ſecond produit $\overline{15 \times 1} = 15 = bcd + 1b$.

Le neuviéme terme eſt le 4e. quotient $2 = d$ répété.

Le dixiéme terme eſt la ſomme du ſecond produit & du quatriéme quotient, ce qui donne $\overline{15+2} = 17, = \overline{bcd+1b}$ c'eſt la troiſiéme & pénultiéme ſomme.

L'onziéme terme eſt le premier quotient $4 = a$, comme multiplicateur.

Le douziéme terme eſt le produit de la pénultiéme ſomme par le premier quotient, c'eſt $17 \times 4 = 68$, & $abcd + ab + ad$.

Le treiziéme terme eſt la ſeconde ſomme répetée $15 = cd + 1$.

Enfin le quatorziéme terme eſt la ſomme du troiſiéme produit & de la ſeconde ſomme répétée, c'eſt $\overline{68+15} = 83$, & $abcd + ab + ad + cd + 1$.

Quatriéme colonne en Lettres.	Quatriéme colonne. en Nombres.
1 *Premiére ſomme.*	1. *Premiére ſomme.*
d. *Le 4e. Quotient propre.*	2. *Le 4e. Quotient propre.*
×c. *Le 3e. Quotient.*	×7. *Le 3e. Quotient.*
. . . .	. . . .
c d. *Le 1er. produit.*	14. *Le 1er. produit.*
+ 1. *La 1re. ſomme répétée.*	+1. *La 1re. ſomme répétée.*
cd + 1. *La 2de. ſomme.*	15. *La 2de. ſomme.*
× b. *Le 2d. Quotient.*	× 1. *Le 2d. Quotient.*
. . . .	. . . .

bcd

bcd + 1*b*. *Le* 2^{d}. *produit.*	15. *Le* 2^{d}. *produit.*
+ d. *Le* 4e. *Quotient répété.*	+ 2. *Le* 4e. *Quotient répété.*
bcd + 1*b* + d. *La* 3e. *& pénultiéme somme.*	17. *La* 3e. *& pénultiéme somme.*
× a. *Le* 1er. *Quotient.*	× 4. *Le* 1er. *Quotient.*
. . . .	. . . .
abcd + ab + ad. *Le* 3e. *prod.*	68. *Le* 3e. *produit.*
+ cd + 1. *La* 2de. *somme repétée.*	+ 15. *La* 2de. *somme repétée.*
abcd + ab + ad + cd + 1 *derniére somme.*	83. *Derniére somme.*

La cinquiéme colonne & les autres au-dessus se forment par la même Méthode.

Triangle des Rapports numérique & particulier, formé sur les cinq Quotients générateurs.

4 = a
1 = b
7 = c
2 = d
10 = e.

				1	
				10 × 2 . . . . . 20 + 1	
			1		
			2 × 7 . . . . . 14 + 1	21 × 7 . . . . . 147 + 10	
		1			
		7 × 1 . . . . . 7 + 1	15 × 1 . . . . . 15 + 2	157 × 1 . . . . . 157 + 21	
	1				
	1	8	17	178	pénultiéme somme.
	× 4 . . . . 4 + 1	× 4 . . . . . 32 + 7	× 4 . . . . . 68 + 15	× 4 . . . . . 712 + 157	
1					
4	5	39	83	869	derniére somme.

Analyse. ſſſ

Remarque. En renversant ce triangle & le suivant, on aura le triangle du rapport direct comme dans la page 540. ci-dessus.

Triangle des Rapports Analytique & universel, formé sur les cinq Quotients générateurs a, b, c, d, e.

			1
			d $\times c$
		1	cd $+ 1$
		c $\times b$	$cd + 1$ $\times b$
	1	bc $+ 1$	$bcd + b$ $+ d$
	b	$bc + 1$	$bcd + b + d$
	$\times a$	$\times a$	$\times a$
1	ab $+ 1$	$abc + 1 a$ $+ c$	$abcd + ab + ad$ $+ cd + 1$
a	$ab + 1.$	$abc + a + c.$	$abcd + ab + ad + cd + 1$

1

e
$\times d$

de
$+ 1$

$de + 1$
$\times c$

$cde + 1c$
$+ e$

$cde + c + e$
$\times b$

$bcde + bc + be$
$+ de + 1$

$bcde + bc + be + de + 1.$ Pénultiéme ſomme.

$\times a$

$abcde + abc + abe + ade + 1a$
$+ cde + c + e.$

$abcde + abc + abe + ade + a + cde + c + e.$
derniére ſomme.

Avertissement. Comme il est très-important de suivre exactement les régles prescrites ci-dessus dans la formation des colonnes du triangle des rapports, puisque le moindre changement gâteroit tout, j'ai jugé à propos d'entrer dans un plus grand détail dans régles qui suivent en déterminant toutes les parties du triangle des rapports, afin que le lecteur ne puisse pas se tromper; ensuite je verrai l'usage de ce triangle des rapports & des séries qui en résultent.

1re. *Régle générale pour former les colonnes du triangle des Rapports, sur des quotients générateurs donnez.*

Chacune des colonnes du triangle des rapports a son quotient générateur propre & particulier, qui a le même exposant qui marque le rang qu'il occupe dans la premiére disposition des rangs des quotients où ils sont rangez par Analyse; ainsi le troisiéme quotient est le quotient propre de la troisiéme colonne, le cinquiéme quotient est le quotient propre de la cinquiéme colonne, &c.

Chaque colonne outre son quotient propre contient encore tous les quotients qui le précédent dans l'ordre d'Analyse, ainsi la troisiéme colonne contient outre son quotient propre les deux quotients qui le précédent, qui sont le premier & le second comme multiplicateurs; de même la cinquiéme colonne outre le cinquiéme quotient, qui est son quotient propre, contient encore comme multiplicateurs les quatre quotients précédens, & ces multiplicateurs donnent chacun leurs produits, que je distingue dans la colonne par ordre 1er. 2d. 3e. &c. produits.

Chaque colonne considérée dans sa figure contient d'abord en tête un triangle rectangle qui contient un seul terme, c'est toujours l'unité constante mise pour premiére somme analogique, le reste est un parallelograme partagé en plusieurs cellules ou carreaux.

Chaque cellule a la forme d'un parallelograme, &

contient quatre rangs ou quatre termes ; ſçavoir, un terme pour chaque rang : le premier rang eſt un quotient, le ſecond eſt un quotient précédent comme multiplicateur, après ces deux rangs ou termes, eſt une ligne ponctuée pour les ſéparer des deux rangs ſuivans, le troiſiéme terme eſt un produit, le quatriéme terme eſt alternativement ou une ſomme répetée ou un quotient répété.

Le nombre des cellules eſt déterminé par l'expoſant même de la colonne auquel il eſt égal moins un ; c'eſt-à-dire que la cinquiéme colonne dont l'expoſant eſt 5, contient quatre cellules de quatre rangs ou de quatre termes chacune, la troiſiéme colonne contient deux cellules, la ſeconde colonne ne contient qu'une cellule, & la premiére colonne n'a point de cellules, puiſque 1 — 1 = 0, ainſi elle ne contient que deux termes, dont le premier eſt l'unité conſtante qui eſt en tête dans ſon triangle rectangle, & au-deſſous un ſeul rang qui eſt le premier quotient, c'eſt le premier rang en bas, ou le dernier ſi l'on veut, qui étant prolongé contient la derniére ſomme de toutes les colonnes, & qui en eſt abſolument ſéparé de même que le triangle qui eſt en tête de chaque colonne.

Seconde Régle pour le nombre des termes contenus dans chaque colonne en particulier.

Le nombre des termes de la premiére colonne eſt 2, elle ne peut en avoir moins, c'eſt un rapport exprimé par une fraction qui a deux termes, ſon numérateur & ſon dénominateur.

Dans chaque colonne le nombre des termes croît de 4, c'eſt-à dire d'une cellule entiére d'une colonne à celle qui la ſuit de gauche à droite ſuivant cette progreſſion,

Exposans des colonnes.	1re.	2de.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e. &c.
Exposant du nombre des termes.	2.	6.	10.	14.	18.	22.	26. &c.

Troisiéme Régle pour la qualité des termes.

Il y a trois eſpéces de termes dans chaque colonne ; ſçavoir, des quotients, des produits & des ſommes, qui reviennent toujours de la même maniére & dans le même ordre dans les quatre termes de chaque cellule dans cet ordre ; ſçavoir, 1°. une ſomme, 2°. un quotient multiplicateur, 3°. un produit, 4°. une ſomme, excepté dans la premiére cellule dont le premier terme eſt le quotient propre de la colonne, mais il eſt conſidéré comme une ſomme dans les autres cellules, ce premier terme eſt la ſomme des termes de la cellule précédente.

De telle ſorte que dans la premiére cellule de chaque colonne, le premier terme eſt le quotient propre & particulier de cette colonne.

Le ſecond terme dans toutes les cellules eſt le quotient précédent comme multiplicateur.

Le troiſiéme terme eſt le produit des deux termes précédens, deſquels il eſt ſéparé par une ligne ponctuée.

Le quatriéme terme eſt toujours le premier terme de la cellule précédente répété & conſidéré comme une ſomme.

Car chaque fois qu'on employe pour multiplicateur un quotient qui précéde le quotient propre de la colonne, il occaſionne toujours un quatriéme terme qui ſuit ſon produit, qui eſt néceſſairement la répétition d'une ſomme précédente, ce qui donne la ſomme qui fait le premier terme de la cellule ſuivante.

Premier usage du triangle des Rapports, ou examen de la série fondamentale des Rapports trouvez par le moïen du triangle des Rapports.

Le but de la construction du triangle des rapports, consiste à trouver les termes d'une série de rapports ou fractions, qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport proposé; or dans chaque colonne c'est la pénultiéme somme & la derniére qui sont les termes qui composent les rapports cherchez selon cet ordre.

somme { pénultiéme / derniére $\frac{1}{a}$, $\frac{b}{ab+1}$, $\frac{abc+1a+c}{bc+1}$ &c.

dans le triangle des rapports analytique.

Mais dans le triangle numérique & particulier, j'ai

somme { pénultiéme / derniére $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{8}{39}$, $\frac{17}{83}$, $\frac{178}{869}$, &c.

Ces fractions ou ces rapports ont été trouvez par le moïen des quotients générateurs pris dans l'ordre d'Analyse, mais si on les avoit pris en ordre de Synthése, on auroit les mêmes rapports dans un ordre renversé qui est celui dont on a besoin & tel qu'il suit; sçavoir, dans le triangle des rapports analytique & universel.

somme { derniére / pénultiéme $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$, $\frac{abc+1a+c}{bc+1}$, &c.

c'est la vraïe série primitive & fondamentale.

De même aussi dans le triangle numérique & particulier j'ai la série primitive & fondamentale, en renversant de même tous les termes.

somme	dernière	4	5	39	83	869	&c.
	pénultiéme	1,	1,	8,	17,	178,	

De cette sorte pour avoir la série primitive & fondamentale, je prends de chaque terme dans la base du triangle pour numérateur la derniére somme, & pour dénominateur la pénultiéme somme de chaque colonne, & la série étant ainsi trouvée dans laquelle chaque terme approche de plus en plus de la valeur du rapport donné; j'ai deux moïens pour la perfectionner.

Le premier moïen consiste à continuer indéfiniment cette série, 1°. ou en augmentant la suite du nombre des termes, puisque les plus éloignez expriment plus exactement le rapport cherché, 2°. ou en sautant plusieurs termes pour avancer plus vîte dans une progression arithmétique quelconque, 3°. ou en sautant plusieurs termes dans une progression géométrique qui est encore plus prompte, & qui avance à pas de géans.

Le second moïen de perfectionner la série primitive & fondamentale trouvée par le triangle des rapports, consiste à trouver d'autres séries qui soient dérivées de celles-ci par addition ou soustraction, &c. j'expliquerai ces deux moïens dans le détail; mais auparavant je veux donner les limites de chaque terme de cette série primitive & fondamentale, pour connoître l'erreur qui se trouve dans chaque terme, soit par excès, soit par défaut.

DES LIMITES.

Pour connoître l'erreur soit par excès, soit par défaut dans chaque terme de la série primitive & fondamentale résultante du triangle des rapports.

Comme le rapport donné est irrationel de sa nature, il

il eſt impoſſible de l'exprimer exactement ſans une diviſion pouſſée à l'infini, ce qui eſt encore impoſſible dans la pratique; cé que peut faire de mieux une intelligence bornée telle qu'eſt l'eſprit humain, c'eſt d'exprimer ce rapport par une ſérie de fractions rationelles, dont les termes approchent le plus qu'il eſt poſſible alternativement, ou par excès ou par défaut, & dont l'erreur ſoit non ſeulement inſenſible, mais la moindre qui ſoit poſſible; & pour en juger il faut connoître & déterminer avec préciſion l'erreur de chaque terme de la ſérie, ſoit par excès ſoit par defaut.

Dans le triangle des rapports numérique & particulier ci-deſſus, ſoit le rapport donné $\frac{869}{178} = \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, j'ai trouvé en lettres la ſérie primitive & fondamentale

$$\frac{a+}{1}, \frac{ab+1-}{b}, \frac{abc+a+c+}{bc+1}, \frac{abcd+ab+ad+cd+1-}{bcd+b+d},$$
$$\frac{abcde+abc+abe+ade+a+cde+c+e+}{bcde+bc+be+de+1}. \ \&c.$$

La même ſérie primitive & fondamentale trouvée en nombres pour le rapport donné $\frac{869}{178}$ eſt

$$\frac{4+}{1}, \frac{5-}{1}, \frac{39+}{8}, \frac{83-}{17}, \frac{869+}{178}$$

Dans cette ſérie chacun des termes eſt ſuivi alternativement du ſigne $+$ & $-$, parce qu'ils expriment alternativement par défaut & par excès le rapport donné en plus petits nombres toujours premiers entre eux, puiſqu'ils n'ont que l'unité ſeule pour commune meſure, & par conſéquent c'eſt l'expreſſion la plus ſimple & la plus exacte qui ſoit poſſible du rapport des deux nombres donnez; pour s'en convaincre, il n'y a qu'à appliquer ici les régles des limites expliquées ci-deſſus, comme il ſuit.

Dans la ſérie primitive & fondamentale en lettres, le premier terme $\frac{a}{1}$ donne le rapport $\frac{a}{b}$ par défaut, car le numérateur a eſt un quotient défectif par la conſtruc-

tion du triangle des rapports analytique ; puiſqu'il laiſſe un reſte, & que ce quotient eſt impair, étant unique. Donc ſuivant les régles des limites, il exprime par défaut le rapport donné, c'eſt pourquoi ce numérateur doit être ſuivi du ſigne +, ainſi $\frac{a+}{1}$, ſes limites ſont $b - 1$,

car $\frac{a}{1+b-1} = \frac{a}{b}$.

Le ſecond terme $\frac{ab+1-}{b}$ doit être ſuivi du ſigne —, parce qu'il exprime par excès le rapport donné $\frac{a}{b}$ par ſa conſtruction, ſes limites ſont $b + 1$, ſuivant les régles expliquées ci-deſſus page 370 & 499.

Tous les autres termes ſont de même alternativement par défaut & par excès, on en trouvera facilement les limites par la régle de trois, comme il eſt expliqué ci-deſſus.

Des ſéries dérivées.

De la premiére ſérie trouvée ci-deſſus par le triangle des rapports qui eſt la ſérie primitive & fondamentale, on peut former pluſieurs autres ſéries dérivées en joignant enſemble deux termes de la ſérie primitive, ou pluſieurs comme il ſuit.

1°. La ſeconde ſérie qui eſt la premiére des ſéries dérivées ſe forme en joignant enſemble deux à deux les termes de la ſérie primitive qui ſont toujours alternativement par excès & par défaut, je retranche l'excès des termes qui donnent trop pour l'ajouter aux termes qui ne donnent pas aſſez.

Ainſi du ſecond terme $\frac{1ab+1-}{1b}$, j'ôte $\frac{1a+}{1}$, le reſte eſt $\frac{1}{1b}$, qui étant ajouté au premier terme qui ne donne pas aſſez, la ſomme eſt $\frac{1a+}{a} + \frac{1}{1b}$, ce ſont les deux pre-

miers termes trouvez, qui sont trop grands, car c'est $\frac{1ab+1}{1b}$, duquel j'ôte le 3e. terme $\frac{1abc+1a+1c}{1bc+1}$ le reste est $\frac{1}{1bbc+1b}$ qui sera le troisiéme terme de la série dérivée; pour la preuve il suffit de faire l'opération qui suit.

car $1ab + 1$
$\times\ 1bc + 1$

$= 1abbc + 1ab + 1bc + 1.$

Et $1abbc + 1a + 1c$
$\times\ 1b$

$= 1abbc + 1ab + 1bc$

or ôtant ce second produit du premier, le reste est $\frac{1}{1bbc+1b} = \frac{1}{1bc+1\times 1b}$, c'est le troisiéme terme de la série dérivée, & ainsi des autres termes à l'infini.

Par ce moïen je forme la seconde série qui suit, qui est la premiére série dérivée de la série primitive.

1er. 2^{d}. 3e. terme 4e. terme.

$$\frac{a}{1} + \frac{1}{b} - \frac{1}{1bbc+1b} + \frac{1}{1bbccd+1bbc+2bcd+1b+1d} - \frac{1}{1bbccdde+1bbcd}, \text{ \&c.}$$

Dans laquelle, 1°. tous les numérateurs sont l'unité constante, ce qui rend cette série la plus simple qui soit possible, & les dénominateurs de chaque terme sont toujours le produit des dénominateurs des deux termes qui ont servi à former ce terme, qui ne sont que des parties aliquotes de l'unité qu'il faut soustraire & ajouter pour avoir le rapport cherché.

2°. Tous les termes ont alternativement le signe + & — après le premier terme dans cette série.

Remarque. Il eſt plus facile de former cette ſeconde ſérie en nombres qu'en lettres, parce que dans l'addition des grandeurs, littérales elles reſtent toutes entiéres & conſervent le même nombre de termes, au lieu que dans l'expreſſion des nombres, l'addition les réünit dans un ſeul terme ou dans une ſeule ſomme, ce qui rend cette ſeconde ſérie beaucoup plus ſimple lorſqu'elle eſt exprimée en nombres, que lorſqu'elle eſt exprimée en lettres, la même choſe ſe trouve encore dans la ſouſtraction, où l'expreſſion en nombres conſerve le même avantage, mais dans la multiplication & dans la diviſion où il eſt néceſſaire de connoître tous les termes, l'expreſſion littérale a l'avantage au-deſſus de l'expreſſion en nombres & lui eſt préférable.

Formation de la ſeconde ſérie qui eſt la premiére dérivée en nombres de l'équation primitive.

	1er. terme.	2d.	3e.	4e.	5e. terme.	
Série primitive.	$\frac{4}{1}$.	$\frac{5}{1}$.	$\frac{39}{8}$.	$\frac{83}{17}$.	$\frac{869}{178}$.	&c.

J'opére comme dans l'expreſſion littérale en prenant toujours deux termes, & ôtant le premier du ſuivant après les avoir réduit au même dénominateur, ainſi de $\frac{5}{1}$, j'ôte $\frac{4}{1}$, c'eſt $\frac{5}{1} - \frac{4}{1} = \frac{5 \times 1 - 1 \times 4}{1 \times 1} = \frac{5 - 4}{1} = \frac{1}{1}$ voilà le ſecond terme trouvé pour la ſeconde ſérie que j'ajoute au 1er. terme, ainſi les deux premiers termes ſont $\frac{4}{1} + \frac{1}{1} = \frac{5}{1}$, cette ſomme eſt trop grande, j'en ôte le troiſiéme terme de la ſérie primitive $\frac{39}{8}$, c'eſt $\frac{5}{1} - \frac{39}{8}$, je les réduis d'abord au même dénominateur $= \frac{5 \times 8}{1 \times 8} - \frac{1 \times 39}{1 \times 8} = \frac{40 - 39}{8} = \frac{1}{8}$, c'eſt le troiſiéme terme de la ſérie dérivée, que l'on continuëra de même à l'infini, autant qu'on voudra.

Série dérivée $\frac{4}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{8} +$ &c. où les termes ont al-

ternativement les ſignes + & — après le premier.

Cette ſérie eſt la plus ſimple & la plus commode de toutes les ſéries qu'on peut dériver de la ſérie fondamentale, ſoit par l'addition de pluſieurs termes excédans & la ſouſtraction des termes défaillans, ſoit en comparant de toutes les maniéres & dans toutes les combinaiſons poſſibles les termes de la ſérie primitive, ce qui donne autant de ſéries dérivées, mais cette premiére dérivée aïant toujours l'unité conſtante au numérateur, elle eſt la plus commode, parce qu'il eſt facile de voir la progreſſion qui regne dans les dénominateurs, qui ne ſont que des parties aliquotes de l'unité qu'il faut ajouter & ſouſtraire pour avoir le rapport cherché ; mais ces ſéries dérivées ſont tres-utiles dans la rectification & la quadrature des lignes courbes, & dans tous les Problêmes où il entre des racines irrationelles, c'eſt pourquoi nous les renvoyons dans l'Analyſe particuliére, c'eſt leur place naturelle, parce que nous en ferons en même tems l'application aux lignes courbes, où l'on en a beſoin.

De la Méthode inverſe du triangle des Rapports.

Le triangle des rapports qui eſt expliqué ci-deſſus donne infailliblemeut toujours la ſérie la plus parfaite qui exprime le plus exactement qu'il eſt poſſible le rapport ou la racine irrationelle cherchée.

Ce triangle eſt un inſtrument univerſel pour trouver les rapports de tous les nombres irrationaux & de toutes les racines irrationelles de tous les degrez à l'infini, car ce que nous expliquons ici dans le détail pour le ſecond degré, doit s'appliquer également à proportion dans tous les degrez.

Mais il y a deux maniéres de propoſer un rapport, la premiére maniére que je nomme le *Rapport direct*, eſt lorſque le rapport eſt exprimé par deux nombres qui

forment une fraction, alors il faut opérer directement ſur les deux nombres donnez, diviſer le plus grand par le plus petit, ce qui donne un premier reſte, enſuite continuer à diviſer le plus petit par le premier reſte, ce qui donne un ſecond reſte, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que l'on trouve un dernier diviſeur exact & ſans reſte, & les quotients que l'on trouve par chaque diviſion, ſervent de matériaux pour former le triangle des rapports expliqué ci-deſſus dans cette ſection.

La ſeconde maniére que je nomme la Méthode inverſe du triangle des rapports, eſt lorſque le rapport propoſé eſt inconnu & n'eſt point exprimé par deux nombres qui font une fraction, mais que l'on propoſe ſeulement la période réglée des quotients qui réſulte de la diviſion du rapport, & dans ce cas il s'agit par le moïen de la période de ces quotients, de trouver les deux nombres qui ont ce raport, & même tous les nombres qui ont le même rapport en réïtérant la période des quotients qui eſt toujours la même ; nous en avons donné un exemple ſur la fin de la Section précédente, p. 509.

C'eſt-à-dire que la Méthode directe du triangle des rapports cherche les quotients du rapport de deux nombres donnez & connus, la Méthode inverſe au contraire cherche les deux nombres inconnus dont le rapport eſt exprimé par une ſérie de quotients donnez & connus.

Former la Série générale des Périodes reglées des nombres irrationaux en général.

Toutes les périodes réglées des quotients générateurs, commencent après le premier quotient qui eſt hors d'œuvre & qui ne ſe répéte point & s'étendent depuis le ſecond quotient juſqu'à celui qui eſt préciſément double du premier incluſivement, & la diviſion continuée indéfiniment donne toujours la même période de quotiens qui ſe répéte à l'infini, quelquefois il n'y a qu'une ſeule période, c'eſt

lorſque le premier diviſeur revient le premier dans l'opération ; & quelque fois il y a deux périodes, c'eſt lorſque le premier nombre qui revient n'eſt pas le premier diviſeur.

Exemple. Pour trouver le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, je cherche la racine quarrée de 2, j'ajoûte des zéros tant que je veux après 2, ou ſimplement je mets des points que je regarde comme des zéros.

Extraction de la Racine quarrée de 2.

{ *Dividende.* 2. 00. 00. &c. { *Quotient.* 14142. 13. 56 +.

Racines ou 14 142 13. 57 —.

1 . . . 1. premier quarré à ôter.

1 : 00 . . premier reſte augmenté de deux zéros.

2 : 4 . . . . 96 . . ſecond produit à ôter.

4 : 00. ſecond reſte augmenté de deux zéros.

2 : 8 : 1 . . 2 81. troiſiéme produit à ôter.

1 19 : 00 . . 3me. reſte augmenté de deux zéros.

28 : 2 : 4 . . 1 12. 96. quatriéme produit.

6. 04 : 00. quatriéme reſte.

282 : 8 : 2 . . . 5 6 5 64. cinquiéme produit.

3 8. 36 : 00. cinquiéme reſte.

2828 : 4 : 1 . . . 2.8 28 41. ſixiéme produit.

1 0 07 59 : 00. ſixiéme reſte.

28284 : 2 : 3 . . 8 48 52 69. ſeptiéme produit.

1 5 9 0 6 3 1 : 00. ſeptiéme reſte.

282842 : 6 : 5 . . 1 4 1 4 2 1 3 2 5. huitiéme produit.

1 7 6 4 1 7 7 5 : 00. huitiéme reſte.

282842 : 70 : 6 . . . 1 6 9 7 0 5 6 2 36. neuviéme produit.

&c. &c. &c.

Au contraire ſi j'opére ſur ces deux nombres donnez en fraction $\frac{141.421.356+}{100.000.00}$ qui eſt par défaut & $\frac{141.421.357-}{100.000.000}$ par excès. Pour trouver la ſérie des nom-

bres qui expriment ce même rapport le plus exactement qu'il est possible alternativement par excès & par défaut, je trouverai comme dans les deux opérations suivantes la série des quotients générateurs 1 | 2 || 2 || 2 || &c.

Premiére opération, sur le rapport exprimé par défaut.

Premier Divid. par défaut	141.421.356+	1er *Quot.* 1
1er. *Diviseur & 2d. Divid.*	100.000.000.	2d. *Quot.*
1er. *produit à ôter*	100.000.000	2.
1er. *reste. 2d. Divis. & 3e. Divid.*	41.421.356.	3e. *Quot.*
2d. *produit à ôter.*	82.842.712.	2.
2d. *reste. 3e. Divis. & 4e. Divid.*	17.157.288.	4e. *Quot.*
3e. *produit à ôter.*	34.314.576	2
3e. *reste. 4e. Divis. & 5e. Divid.*	7.106.780.	5e. *Quot.*
4e. *produit à ôter*	14.213.560.	2.
4e. *reste. 5e. Divis. & 6e. Divid.*	2.943.728.	6e. *Quot.*
5e. *produit*	5.887.456.	2.
5e. *reste. 6e. Divis. 7e. Divid.*	2.219.324.	7e. *Quot.*
6e. *produit.*	2.438.648.	2.
6e. *reste. 7e. Diviseur 8e. Divid.*	505.080.	8e. *Quot.*
7e. *produit*	1.010.160.	2.
7e. *reste. 8e. Divis. 9e. Divid.*	209.164.	9e. *Quot.*
8e. *produit*	418.328.	2.
8e. *reste. 9e. Divis. 10e. Divid.*	86.752.	10e. *Quot.*
9e. *produit*	173.504.	2.
9e. *reste. 10e. Divis. 11e. Divid.*	35.660.	11e. *Quot.*
10e. *produit*	71.320.	2.
10e *reste. 11e. Divis. 12e. Divid.*	15.432.	12e. *Quot.*
	30.864.	3 —.
	4.796.	

Les

Les onze premiers quotients sont bons & exacts ; mais le douziéme commence à être faux par excès ; c'est un 3 au lieu de 2, parce que le dividende a été pris un peu trop petit dans son dernier chifre 6.

Seconde opération sur le rapport exprimé par excès.

1er. *Divid. par excès.*	141. 421. 357. —	{	1er. *Quotient.* 1.
1er. *Divis. & 2d. Divid.*	100. 000. 000.	{	2d. *Quotient.* 2.
1er. *reste. 2d. Divis. & 3e. Divid.*	41. 421. 357. 82. 842. 714.	{	3e. *Quotient.* 2.
	17. 157. 286. 34. 314. 572.	{	4e. *Quotient.* 2.
	7. 106. 785. 14. 213. 570.	{	5e. *Quotient.* 2.
	2. 943. 716. 5. 887. 432.	{	6e. *Quotient.* 2e.
	1. 219. 353. 2. 438. 706.	{	7e. *Quotient.* 2.
	505. 010. 1. 010. 020.	{	8e. *Quotient.* 2.
	209. 333. 418. 666.	{	9e. *Quotient.* 2.
	86. 344. 172. 688.	{	10e. *Quotient.* 2.
	36. 645. 73. 290.	{	11e. *Quotient.* 2.
	13. 054. 26. 108.	{	12e. *Quotient.* 1. + ou 2 —
	10. 537.		

Analyse. ∗∗∗

Les onze premiers quotients sont bons & exacts, mais le douziéme est faux par défaut, c'est 1 + au lieu de 2. parce que le dividende a été pris trop grand au dernier chifre 7.

THEORE'ME.

Tout rapport d'inégalité comme $\frac{13}{17}$, ou $\frac{17}{13}$ peut être transformé dans une période de quotients réglée suivant la progression géométrique décuple continuë descendante à l'infini, 2°. & le nombre des chifres nécessaires pour exprimer chaque période réglée, non compris le zéro peut être égale au nombre d'unitez que comprend le numérateur du rapport qui est l'antécédent moins un.

Ainsi dans $\frac{17}{13}$, la période réglée contient 16 chifres dont quinze sont significatifs, & le 16e. est un zéro, car les restes de la division peuvent être 1, 2, 3, &c. jusqu'à 16 & pas davantage, ce qui donne ce raport comme 17 est à 13, ainsi 10000, &c. est à $\frac{764.\ 705.\ 882.\ 352.\ 9411.\ \&c}{1000.\ 000.\ 000.\ 000.\ 000\ \&c.}$ comme il paroît par la démonstration sensible de l'opération qui suit.

Démonstration sensible & particuliére pour $\frac{13}{17}$.

Diviseur { *Dividende* { *Quotient*

17 : { 13 : 0 . . . { 0.764.705.882. 352. 941. 1
||764.705.882. 352.941. 1. ||

7 . . 119
11:0
6 . . . 102
8:0
4 . . . 68

1 2:0
7 . . . 119
1:0

o . . . . . o

1010

5 85

15:0

8 136

14:0

8 136

4:0

2 34

6:0

3 51

9:0

5 85

5:0

2 34

16:0

9 153

7:0

4 68

2:0

1 17

3:0

fin de la 1re. période 1 . . . . 17 égal au 1er. diviseur.

---

qui recommence à l'infini 13:0. 1er. divid.

7 119

11:0

6 102

8:0

4 68

12:0

Remarque sur les restes. Le Dividende 13 est regardé

comme le premier reste, car tous les restes sont des dividendes, en le comprenant il y a 17 restes dans cet exemple, & c'est tout ce qu'il y en peut avoir, puisque 17 est le diviseur.

Remarque importante & fondamentale. Lorsque le premier reste qui revient dans le cours de l'opération est le même que le dividende comme ici 13, alors il n'y a qu'une seule & unique période réglée qui recommence toujours à l'infini, & qui redonne toujours la même série des quotients comme dans l'exemple précédent.

Mais lorsque le premier reste qui revient dans le cours de l'opération, comme dans le rapport $\frac{355}{113}$, alors il y a deux périodes qui composent la période réglée, la premiére partie se termine à ce premier reste qui revient le premier, cette premiére partie de la période se borne là, & ne revient plus, mais la seconde partie contient la période qui suit après, & qui se répéte à l'infini.

Conclusion. C'est cette expression en parties décimales du rapport $\frac{13}{17}$; sçavoir 0.764, &c. que je nomme le calcul intégral, il peut s'appliquer à tous les rapports, & par conséquent à toutes les racines irrationelles de tous les degrez à l'infini, & cette intégration est incomparablement plus facile, plus commode & plus exacte que celle des progressions géométriques décroissantes à l'infini, & l'expression sensible des nombres la rend préférable à toute autre Méthode d'intégration, nous en verrons la preuve dans l'application que nous en ferons aux rectifications & aux quadratures des lignes courbes, de leurs surfaces & de leurs solides, c'est le sujet de l'Analyse particuliére qui fera la seconde partie de cette Analyse complette.

LIVRE TROISIE'ME.

Des Problêmes indéterminez, & des Problêmes plus qu'indéterminez.

ME'THODE GE'NE'RALE

Pour résoudre en nombres entiers les Problêmes indéterminez dans tous les cas possibles à l'infini.

LEs anciens n'ont pas voulu recevoir les solutions irrationelles dans les Problêmes numériques, parce qu'effectivement ils n'ont pas regardé les irrationaux comme de véritables nombres. Euclide n'en a fait aucune mention dans le 7. 8. & 9. livres de ses Elémens qui sont tous destinez aux nombres, & le deuxiéme qui auroit dû traiter des irrationaux n'est exprimé qu'en lignes, ils ont crû que cette expression étoit la seule exacte & naturelle pour les rapports incommensurables, en quoi ils se sont trompez, comme l'auteur de la recherche de la vérité l'a fait voir, car les lignes ne parlent qu'aux yeux, & pour en connoître exactemenr le rapport, il faut avoir recours aux nombres, lesquels s'ils sont rationaux expriment exactement & en même tems d'une maniére parfaitement intelligible le rapport de toutes les grandeurs, mais s'ils sont irrationaux, ils expriment ces mêmes rapports exactement & en même tems de la maniére la plus intelligible qui soit possible, mais qui a cependant essentiellement & inévitablement une inintelligibilité indéfinie que l'on peut diminuer à l'infini, en substituant des nombres exacts qui approchent toujours de la valeur de ces irrationaux par défaut ou par excès, mais qui ne peuvent jamais l'égaler.

Euclide n'a pas même regardé comme nombres les fractions rationelles, la définition qu'il donne du nombre au commencement du 7e. livre ne leur convient pas plus directement qu'aux irrationaux, effectivement on ne peut concevoir de fraction abstraite, l'unité abstraite étant indivisible.

Diophante n'a point admis les irrationaux, mais il employe les fractions, & tous les Problêmes dont l'égalité passe le premier degré sont ou indéterminez, ou restrains par des conditions qui les rendent nécessairement rationaux, & il n'y a de difficulté & d'adresse que dans les Problêmes indéterminez, lesquels naturellement tombent dans les irrationaux; il faut entre une infinité de solutions rationelles & irrationelles dont ils sont susceptibles, sçavoir former l'égalité de telle sorte, qu'elle donne nécessairement une solution rationelle, de sorte que les Problêmes qni sont les plus difficiles, & même quelquefois impossibles étant proposés avec cette restriction, d'en donner la solution en nombres rationaux, sont si faciles sans cette même condition, qu'il seroit ridicule de les proposer.

Par Exemple. Diviser un nombre quarré en deux autres nombres quarrez, diviser un cube en deux autres cubes, &c. & ce n'est pas sans raison que l'on s'attache aux nombres rationaux préférablement aux irrationaux, car il est évident que l'esprit reçoit avec plus de plaisir ce qu'il apperçoit exactement comme les nombres rationaux, que les irrationaux qu'il ne peut jamais apercevoir parfaitement.

Diophante & les autres anciens n'ont point connu de solutions négatives, & effectivement elles doivent être rejettées, lorsqu'il y en peut avoir de positives, & lorsqu'il n'y en péut avoir, le Problême est absolument impossible, car il est impossible de concevoir un nombre négatif purement & simplement; effectivement les solutions négatives d'un Problême sont des solutions po-

ſitives d'un autre Problème, quoique cependant il y ait une trés petite différence entre les Problêmes abſolument impoſſibles, & ceux qui ne peuvent avoir que des ſolutions négatives, ou même imaginaires.

Diophante ne s'eſt pas mis en peine d'aller plus avant, il me ſemble au contraire qu'on peut réduire à cinq, les différens degrez de perfection dans la ſolution d'un Problême.

Le premier, qu'elle ſoit en nombres rationaux.

Le ſecond, qu'elle ſoit en nombres entiers.

Le troiſiéme, qu'elle ſoit en plus petits nombres qu'il ſoit poſſible, le quatriéme, qu'on en ait une infinité.

Le cinquiéme qu'on les ait toutes, ce qui eſt différent du quatriéme, car on peut en avoir une infinité, ſans cependant les avoir toutes, par exemple, on trouve une infinité de nombres propres aux triangles rectangles par la régle des quarrez impairs, mais on ne les trouve pas tous, car on ne trouve pas, par exemple. 8 : 15 : 17 :

De tous ces degrez de perfection, Diophante & les anciens ne ſe ſont mis en peine que du premier, mais il eſt aiſé de voir qu'ils ont eu tort de négliger les autres, & pour ne parler que des ſolutions en nombres entiers, il eſt évident que les réſolutions en nombres entiers ont ſur les ſolutions en fractions, à peu près tout l'avantage que les ſolutions rationelles ont ſur les irrationelles.

Voici en peu de mots l'occaſion & la maniére dont j'ai trouvé la Méthode, un de mes amis m'ayant dit qu'il ſe trouvoit embarraſſé dans la ſolution d'un Problême de Diophante, qui n'étoit cependant que du premier degré, me pria de lui en envoyer la ſolution Méthodique, parce que celle de Diophante lui paroiſſoit embroüillée & peu naturelle.

Voici le Problême tirée de Diophante, liv. 2. prop. 18. trouver trois nombres tels que ſi on ôte la cinquiéme partie du premier plus 6, & qu'on l'ajoute au ſecond,

après en avoir ôté la sixiéme partie plus 7, pour l'ajouter au troisiéme, après en avoir ôté la septiéme partie plus 8 pour l'ajouter au premier, ce qui résulte de l'addition & de la soustraction faite sur de certains nombres fasse trois nombres égaux.

Voici comme j'operai, soit pour éviter les fractions.

Le premier . . $5x$

Le second . . $6x$

Le troisiéme . . $7z$

ôtant du premier la cinquiéme partie $+ 6$, il reste $4x - 6$, auquel reste il faut ajouter la septiéme du troisiéme $+ 8$, ce qui fait $4x - 6 + z + 8$, ou $4x + z + 2$ pour premier nombre résultant.

Otant la sixiéme partie du second $+ 7$, il reste $5y - 7$, auquel reste ajoutant $x + 6$, la cinquiéme partie du premier selon le Problême, on a pour le second nombre résultant $5y - 7 + x + 6$, ou $5y + x - 1$.

Enfin ôtant du troisiéme sa septiéme partie $+ 8$, & au reste $6z - 8$, ajoutant la sixiéme partie du second $+ 7$, qui est $y + 7$, on aura $6z - 8 + y + 7$, ou $6z + y - 1$, pour troisiéme nombre résultant.

Il y donc égalité entre ces trois nombres résultans.

$4x + z + 2$

$5y + x - 1$

$6z + y - 1$

dont on peut former deux égalitez, & comme il y a trois inconnuës, il est évident que le Problême est indéterminé, c'est pourquoi nous pouvons à discrétion réduire deux des inconnuës à l'expression complexe des nombres connus & de la troisiéme inconnuë.

Ainsi par la premiére égalité $4x + z + 2 = 5y + x - 1$, on a cette égalité $z = 5y - 3x - 3$.

Par la seconde égalité $4x + z + 2 = 6z + y - 1$. on a $z = \frac{4x + 3 - y}{5}$ & comparant ces deux valeurs de z,

on

on aura $\frac{4x+3-y}{5} = 5y - 3x - 3$. Et en multipliant tout par 5, on aura $4x + 3 - y = 25y - 15x - 15$, ou $25y + y = 15x + 4x + 15 + 3$, c'est-à-dire, $26y = 19x + 18$. Et $y = \frac{19x+18}{26}$. Or en substituant cette même valeur dans l'égalité $z = 5y - 3x - 3$, on aura cette autre égalité $z = \frac{95x+90}{26} - 3x - 3$, c'est-à-dire, $z = \frac{17x+12}{26}$ multipliant en croix pour ôter l'entier de la fraction, & ôtant des numérateurs 26 autant qu'il est possible, c'est-à-dire trois fois, à cause de $-3x$, car $-3 \times 26 = -78x - 78$.

Le Problême est donc réduit à sa derniére & plus simple expression d'égalité, par conséquent il est indéfiniment résolu, car quelque nombre que je prenne pour x, les valeurs de y & de z sont trouvées ; mais il s'agit de trouver des nombres entiers, il faut donc que y étant égal à $\frac{19x+18}{26}$ & z étant égal à $\frac{17x+12}{26}$, il faut dis-je que x soit tel que son produit par 19 augmenté de 18, & de plus son produit par 17 augmenté de 12, soient divisibles par 26.

Or voici la pensée qui me vint là-dessus, si $19x + 18$, & $17x + 12$ sont divisibles par 26, il est évident que leur différence l'est aussi, c'est-à-dire que $2x + 6$ est aussi divisible par 26 ; donc son multiple sera aussi divisible par 26, c'est-à-dire, considérant dans $17x$ combien de fois il y a $2x$, je l'y trouve 8 fois, ainsi je multiplie $2x + 6 \times 8$, & il est évident que $16x + 48$ sera aussi divisible par 26, & pour abréger j'ôte de l'absolu 48 le nombre 26 autant de fois qu'il est possible, c'est-à-dire ici une fois seulement, & il me reste $16x + 22$,

qui est divisible par 26, or $17x + 12$ est aussi divisible par 26, donc leur différence $x - 10$ l'est aussi, donc le double de cette différence $2x - 20$ est aussi visible par 26, & ce double $2x - 20$, étant ôté de $2x + 6$, il reste 26.

	de $19x + 18$
	ôtant $17x + 12$
$16x + 22$	$2x + 6$ reste ou différence 1re.
$- 17x + 12$	$\times\ 8$
diff. $x - 10$	$16x + 48$ Multiple.
$\times 2 \ldots 2x - 20$	$- 26$
$- 26$	rest. $16x + 22$ dont ôtant 26
reste $2x - 20$	$x - 10$ reste & différence 2de.
	$2x - 20$ Multiple.
	26

Or d'autant que le nombre absolu étant 26, il est effectivement divisible par 26, je conclus que le Problême peut se résoudre en nombres entiers, & qu'il ne reste qu'à rendre $x - 10$ divisible par 26.

Je suppose $x - 10$, égal à zéro qui est la moindre valeur possible, $\frac{x - 10}{26} = 0$, ce qui donne $x = 10$ qui satisfait.

Ainsi substituant cette valeur dans les égalitez ci-dessus, on aura pour les trois nombres cherchez $5x = 50$. $6y = 48$, $7z = 49$, qui sont les plus petits qui soient possibles, & c'est la solution la plus élégante qu'on puisse désirer ; ceux de Diophante sont $\frac{90}{7}$, $\frac{108}{7}$, $\frac{105}{7}$.

$$y = \frac{19x + 18}{26} = \frac{190 + 18}{26} = \frac{208}{26} = 8.\ \text{donc}\ 6y = 48.$$

$$z = \frac{17x + 12}{26} = \frac{170 + 12}{26} = \frac{182}{26} = 7.\ \text{donc}\ 7z = 49.$$

$$\text{donc}\ 5x = 50.$$

Si on veut avoir tous les nombres à l'infini qui satis-

font aux conditions du Problême, il n'y a qu'à donner à x les valeurs ſuivantes.

$x = 10.$

$x = 10 + 26$ qui eſt le diviſeur; ce qui donne pour les trois nombres cherchez 180. 162. 168.

$x = 10 + \overline{2 \times 26}$

$x = 10 + \overline{3 \times 26}$

&c. qui ſont tous primitifs; mais leurs multiples ne ſatisfont pas généralement.

Or, il eſt évident que tous les Problêmes indéterminez peuvent ſe réduire à une formule ſemblable, & par conſéquent ils peuvent être réſolus de la même maniére en nombres entiers, en obſervant ce qui eſt dit ci-après.

Voilà l'occaſion de la premiére découverte, je l'ai mieux digerée dans la ſuite, & je l'ai pouſſée à l'infini avec un progrès qui m'a étonné. En voici le détail en commençant par les Problêmes les plus ſimples.

SECTION PREMIERE.

Propoſition premiére.

Réſoudre en nombres entiers un Problême indéterminé où il y a deux grandeurs inconnuës, dont l'égalité finale ne paſſe pas le premier degré, & où une inconnuë n'eſt pas multipliée par l'autre.

(On ſuppoſe toujours qu'il y a une fraction dans l'égalité finale, autrement il n'y auroit point de difficulté, & partant on n'auroit pas beſoin de régle.)

TOus ces Problêmes peuvent aiſément ſe réduire à l'une des quatre formules ſuivantes.

1re....$y = \frac{ax}{p}$

2de....$y = \frac{ax+q}{p}$

3e....$y = \frac{ax-q}{p}$

4e....$y = \frac{q-ax}{p}$

1°. La premiére formule eſt aiſée, il n'y a qu'à ſuppoſer $y = a$, & $x = p$.

Je ſuppoſe a & p réduits à leurs moindres termes ſi l'on veut avoir les plus petits nombres qu'il ſoit poſſible; ainſi on aura $a = \frac{ap}{p}$ ce qui donne $a = a$. Tous les multiples ſatisfont & ſont les ſeuls qui puiſſent ſatisfaire, ce qui donne une ſolution pleine & entiére, x & y étant comme a les plus petits de leur raiſon par là .. du 7 d'Euclide, toutes les valeurs de x & de y ſont multiples de la 1re. valeur.

2°. Pour la ſeconde formule $y = \frac{ax+q}{p}$.

Préparation. Il faut d'abord réduire $\frac{a+q}{p}$ à leurs moindres termes. Enſuite ôter de a ou de q tout ce qui eſt égal ou multiple de p; je ſuppoſe toujours dans cette préparation a & q plus petits que p, & la raiſon de cette préparation eſt évidente; car il eſt certain que p ſe meſure lui-même & ſes multiples, & par conſéquent s'il eſt poſſible qu'il meſure le tout propoſé, il meſurera la différence.

Ainſi ôtez a de p autant de fois qu'il eſt poſſible, préciſément, & s'il reſte quelque choſe, ſoit ce reſte nommé r, ôtez r autant de fois qu'il eſt poſſible de a, & s'il reſte quelque choſe, ſoit nommé ce ſecond reſte t; ôtez t de r autant de fois qu'il eſt poſſible, & ainſi de ſuite juſques à ce que vous ayez trouvé un diviſeur ſans reſte, ou que vous ſoyez parvenu à l'unité.

Faites les mêmes diviſions ſur q & ſur p, que vous ayez

fait sur a & p, en gardant les signes $+$ & $-$, & si vous parvenez à l'unité, ce qui arrivera toujours lorsque a & p seront premiers entr'eux, si l'absolu restant est $-s$, donc $x=s$: mais si l'absolu restant est $+s$, donc $x=p-s$, & toutes les valeurs à l'infini sont dans le premier cas.

s	$p-s$
$p+s$	$2p-s$
$2p+s$	$3p-s$
$3p+s$	$4p-s$
$4p+s$	$5p-s$
&c.	&c.

3°. Dans le second cas, que si l'on trouve un diviseur sans reste avant l'unité, multipliez l'absolu s par l'exposant de ce diviseur sans reste; ajoutez-le s'il est plus petit au dividende prochainement plus grand, & faisant l'addition ou la soustraction du produit, l'inconnuë se détruira, & si l'absolu restant n'est pas divisible par p, le Problême est absolument insoluble en nombres entiers.

Que s'il est divisible, divisez l'absolu précedent par le nombre des racines du dernier diviseur sans reste, & le quotient sera la valeur de la racine s'il est $-$, ou sa différence au dénominateur s'il est $+$.

Que si l'absolu n'est pas divisible sans reste, par le nombre des racines du diviseur sans reste, le Problême est insoluble.

Et si on a soin de rejetter tous les excès dans l'opération, le nombre restant sera le dénominateur même.

4°. Toutes les fois que a & p sont nombres entiers, le Problême est soluble & infiniment soluble, parce que par la soustraction continuelle, on arrive à l'unité, & toutes les fois que a & p ne peuvent pas être réduits à moindres termes avec q, ensorte que a & p soient premiers, ou plus simplement si les trois a, p, q, étant premiers entr'eux, a & p sont composez, le Problême est impossible. Ce qui est un des plus beaux Théorêmes qui puissent être trouvez en ce genre.

EXEMPLE I.

Trouver deux nombres entiers tels que le premier étant multiplié par 7, soit égal au second multiplié par 13, & encore plus 20.

Soit le premier $= x$, le second $= y$. Donc $7x = 13y + 20$. Donc $x = \frac{13y + 20}{7}$ le Problême est indéterminé & réduit aux termes de la proposition.

Mais d'autant que 13 & 20 sont plus grands que 7, je l'ôte de l'un & de l'autre autant de fois qu'il est possible, & il me reste à rendre en nombres entiers $\frac{6y + 6}{7}$, je pose — $6y$

$7y$
— $6y + 6$, donc $y = 6$, & par conséquent $= \frac{6 \times 13 + 20}{7}$
reste $y - 6$
$= \frac{98}{7} = 14$ qui satisfont.

J'aurois pû trouver premiérement x par la même égalité, $7x = 13y + 20$. Donc $13y = 7x - 20$, & $y = \frac{7x - 20}{13}$, & ajoûtant 13 à l'absolu $- 20$, il suffit de rendre en nombres entiers $\frac{7x - 7}{13}$,

$13x$
je pose — $7x - 7$
reste $6x + 7$
$x - 14$, & par la regle $x = 14$.

Pour trouver tous les autres nombres qui donnent toutes les solutions possibles à l'infini, il n'y a qu'à ajoûter $7 + 6$. pour la valeur de x continuellement, & $13 + 14$ pour la valeur de y.

Ainsi les valeur de x seront

	x	y
$6 =$	6	 14
$6 + 7 =$	13	 27

$13 + 7 = 20 \ldots 40$
$20 + 7 = 27 \ldots 53$
$27 + 7 = 34 \ldots 66$
&c. &c. &c.

EXEMPLE II.

Pour le premier cas ci-dessus.

Trouver deux nombres tels, que si le premier donne au second sa cinquiéme partie $+ 7$, *& le second donne au premier sa sixiéme partie* $+ 13$, *les deux nombres résultans soient égaux.*

Soient d'abord ces deux nombres x & y. Donc ôtant la cinquiéme partie du premier $x + 7$, il reste $\frac{4}{5}x - 7$, auquel ajoûtant la sixiéme partie du second $y + 13$, c'est-à-dire $\frac{1}{6}y + 13$. Le premier résultant est
$\frac{4}{5}x - 7 + \frac{1}{6}y + 13$.
c'est-à-dire, $\frac{4}{5}x + \frac{1}{6}y + 6$.

De même ôtant du second y sa sixiéme partie $+ 13$, il reste $\frac{5}{6}y - 13$, auquel ajoûtant $\frac{1}{5}x + 7$. Le second résultant $\frac{5}{6}y + \frac{1}{5}x - 6 = \frac{4}{5}x + \frac{1}{6}y + 6$, qui est le premier résultant.

Et multipliant tout par 30 pour ôter les fractions $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{6}$, j'ai cette égalité $25y + 6x - 180 = 24x + 5y + 180$, laquelle étant ordonnée donne $20y = 360 + 18x$, & $y = 18 + \frac{2x}{10}$.

Et d'autant que 18 est un nombre entier, il suffit de rendre en nombres entiers $\frac{2x}{10}$, ce qui se fait par le premier cas, en supposant $x = 10$. ce qui donne $y = 27$, & le résultant est $18\frac{1}{2}$.

$x = 10 \ldots y = 27$
$x = 20 \ldots y = 36$
$x = 30 \ldots y = 45$
$x = 40 \ldots y = 54$
$x = 50 \ldots y = 63$

$x = 60 .. y = 72$
$x = 70 .. y = 81$
$x = 80 .. y = 90$
$x = 90 .. y = 99$
$x = 100 .. y = 108$
$x = 110 .. y = 117$
$x = 120 .. y = 126$
$x = 130 .. y = 135$
$x = 140 .. y = 144$
$x = 150 .. y = 153$
$x = 160 .. y = 162$
$x = 170 .. y = 171$
$x = 180 .. y = 180$

Dans ce 18e. rang les deux nombres ſont égaux.

Soit $x = 10$
$20y = 360 + 18x$
donne $20y = 360 + 180$
$= 540$
je diviſe 540 par 20 le quotient eſt $27 = y$.

Et ainſi de ſuite à l'infini, où l'on trouve que dans le dix-huitiéme rang les deux nombres ſont égaux; & en effet, ſi de 180 l'on ôte la cinquiéme partie 36, plus 7 qui font 43, & qu'on y ajoûte la ſixiéme partie qui eſt 30, plus 13 qui font auſſi 43, il eſt évident que le Problême eſt réſolu.

On auroit pû éviter les fractions, en mettant pour le premier $5x$, & pour le ſecond $6y$, & on auroit trouvé 20 & 36; ſçavoir, 4 pour x, & 6 pour y, ſurquoi il faut remarquer que 10 & 27 ſont bien les plus petits nombres qui ſatisfont en nombres entiers; mais que toutes les opérations du Problême ne ſont pas néceſſairement en nombres entiers, comme dans ce cas les réſultans ſont $18\frac{1}{2}$, au lieu qu'en évitant les fractions dans l'opération, on évite auſſi toute fraction dans la réſolution, non ſeulement à l'égard des nombres cherchez & principaux, mais auſſi à l'égard des nombres intervenans; car ce ſont deux ſens différens qu'il faut bien remarquer, l'un demande ſeulement que les nombres propoſez ſoient entiers, & l'autre demande que non ſeulement les nombres propoſez, mais auſſi les nombres réſultans ſoient entiers.

EXEMPLE

EXEMPLE III.

Trouver deux nombres tels que le premier donnant au ſecond ſa cinquiéme partie, & le ſecond donnant au premier ſa ſixiéme partie les deux réſultans ſoient égaux.

Ces deux nombres ſoient x & y, ou $5x$ & $6y$. Donc $\frac{4x}{5} + \frac{1}{6}y = \frac{5}{6}y + \frac{1}{5}x$. Et multipliant tout par 30 pour ôter les fractions, on aura $24x + 5y = 25y + 6x$, & $20y = 18x$ ce qui donne $y = \frac{9x}{5}$. Donc $x = 10$, & $y = 9$. C'eſt la ſolution en plus petits nombres, mais elle donne des fractions.

Mais ſi l'on prend $5x$ & $6y$, on aura cette égalité $4x + y = 5y + x$. Par conſéquent $4y = 3x$, donc $y = \frac{3x}{4}$, ce qui donne $x = 4$, & $y = 3$; alors les nombres cherchez ſont $20 = 5 \times 4 = 5x$ & $3 \times 6 = 3x = 18$ qui ſatisfont pleinement & tous leurs multiples.

EXEMPLE IV.

Pour le troiſiéme cas.

Suivant la Formule $y = \frac{ax - q}{p}$. *la même préparation, la même réſolution & le même Théoréme ont lieu comme dans le premier cas.*

Remarquez, qu'on peut toujours transformer ce troiſiéme cas dans le premier, en ajoûtant au numérateur $+ p$; ainſi $\frac{ax - q}{p}$ ſe change dans le premier cas poſitif $\frac{ax + p - q}{p}$ où $p - q$ eſt toujours poſitif, parce que par la préparation $- q$ eſt ſuppoſé plus petit que p.

Or il eſt aiſé de choiſir entre les infinitez de valeurs de x que la régle donne par ſimple addition, une de ſes valeurs telle qu'on en puiſſe ôter q tel qu'il eſt, même avant la préparation, ſuppoſé que p ſoit plus grand que q.

Par exemple. Soit l'égalité proposée $y = \frac{50x - 560}{13}$, la préparation me donne $1x = \frac{11z - 1}{13}$ & $z = 6$.

Opération
$$\begin{array}{r} 13z. \\ \underline{11z - 1} \\ 2z + 1 \\ \underline{10z + 5} \\ z - 6 \end{array}$$

Or, je ne puis pas prendre $z = 6$ pour x, à cause que divisant 560 par 50, la valeur de x est plus grande $11\frac{1}{5}$, c'est pourquoi j'ajoûte 13 à 6, qui me donne 19 pour seconde valeur qui est la premiére en cas de x qui satisfait.

Car $50 \times 19 - 560 = 950 - 560 = 390$ qui est divisible par 13, dont le quotient est 30 valeur de y.

Exemples des Problêmes impossibles dans le second cas.

Premier Exemple. Soit l'égalité $y = \frac{8y + 7}{10}$.

Démonstration. Si $8y + 7$ est divisible par 10, d'autant que 10 l'est aussi, leur différence $2y - 7$ le sera aussi, ce qui est évident. Par conséquent son quadruple $8y - 28$.

Or $8y + 7$ par l'hypotése est divisible par 10. donc leur différence 35 est aussi divisible par 10, ce qui est absurde.

2e. *Exemple.* $x = \frac{8y + 9}{12}$.

Opération.
de $12y$
ôtez $8y + 9$
différ. $4y - 9$
multiple. $8y - 18$, ou $8y - 6$, ce qu'il faut remarquer
$8y - 6$
15 qui n'est pas divisible par 12.

Remarque. On peut & on doit toujours, pour abréger,

sur-tout dans les grands nombres, diminuer tous les nombres qui surpassent le dénominateur, ainsi on doit mettre $8y - 6$ au lieu de $8y - 18$.

3[e] *Exemple.* $x = \frac{12y + 35}{40}$.

$$
\begin{array}{ll}
 & 40y \\
\textit{Opération.} & 12y + 35 \\
 & \underline{36y + 105, \text{ ou } + 25} \\
 & 4y - 25. \\
 & \underline{12y - 35} \\
 & 70
\end{array}
$$

qui n'est pas divisible par 40. Ainsi le Problême est impossible.

SECTION SECONDE.

Des Problémes plus qu'indéterminez.

SI le Problême est plus qu'indéterminé; c'est-à-dire, s'il y a plus d'une inconnuë outre le nombre des égalitez, alors le Problême qui étant simplement déterminé seroit insoluble, pourra avoir une, ou plusieurs solutions.

Par Exemple. Soit l'égalité $y = \frac{ax + z}{p}$ où il y a trois inconnuës dans une seule égalité, qui est par conséquent plus qu'indéterminé, pour avoir toutes les solutions possibles, ayant réduit a & p à leur moindre dénomination, (& s'ils sont premiers entre eux, il n'y a qu'à prendre pour z tel nombre qu'on voudra) mais s'ils sont composez, on peut prendre tous les nombres multiples de leur commune mesure.

Ainsi, *par exemple.* Soit, 1°. $y = \frac{13x + z}{23}$, 2°. $\frac{13x + 8z}{23}$, d'autant que 13 & 23 sont des nombres premiers, on peut prendre pour z tel nombre qu'on voudra, par exemple, 1. 2. 3. &c.

en prenant $z =$	$1 \ldots z =$	$2 \ldots z =$	3
on aura $x =$	$7 \ldots x =$	$14 \ldots x =$	21
$x =$	$30 \ldots x =$	$37 \ldots x =$	44
$x =$	$53 \ldots x =$	$60 \ldots x =$	67
$x =$	$76 \ldots x =$	83	
$x =$	$99 \ldots x =$	106	&c.
$x =$	$122 \ldots x =$	129	
	&c.	&c.	

$23x$
$13x + 1$
diff. $10x - 1$
$3x + 2$
$9x + 6$
$x - 7$

on aura
$23x$
$13x + 2$
$10x - 2$
$3x + 4$
$9x + 12$
$x - 14$

$23x$
$13x + 3$
$10x - 3$
$3x + 6$
$9x + 18$
$x - 2$

d'où il eſt évident ſelon les différentes valeurs de z, qu'on peut prendre pour x tous les multiples de 7 ; ſçavoir 14, 21, 28, 35, &c. & tous les compoſez de ces multiples + 23, ainſi la ptogreſſion ſeroit 7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. &c.
30. 37. 44. 51. 58. 65. &c.

Mais ſoit ſuppoſé $\frac{34x + z}{51} = y$, d'autant que 34 & 51 ſont des nombres compoſez, toutes les valeurs de z ne peuvent pas être priſes à diſcrétion, mais ſeulement la commune meſure de 34 & 51. & ſes multiples.

C'eſt-à-dire que la moindre valeur de z eſt 17, puis 34, 51, 68. &c. ce que je prouve par l'opération même.

Soit $\frac{34x + 17}{51}$ par réduction $\frac{2x + 1}{3}$

$3x$
$2x + 1$
$x - 1$

& $x = 1$
$x = 2$
$x = 3$ & à tous les nombres à l'infini

mais les valeurs de z correſpondantes ſont 17. 34. 51. 68. &c.

mais posons $\frac{34x + 10}{51}$ l'opération donne

$$\begin{array}{r} 51\,x \\ 34\,x + 10 \\ \hline 17\,x - 10 \\ 34\,x - 20 \\ \hline 30 \end{array}$$

qui n'est pas divisible par 51.

Or il est aisé de démontrer, que quelque nombre que je mette au-dessous de 17, d'autant que le dernier absolu résultant est triple du supposé, le triple d'aucun nombre au-dessous de 17 n'est divisible par 51, puisque 51 est le triple de 17, & c'est de-là que je tire la démonstration du Théorême ci-dessus.

Mais soit $\frac{13x + 8z}{23}$ j'opére dessus tout de même & les valeurs de z sont 1. 2. 3. 4. 5. &c. celles de x sont 10. 20. 30. &c. & celles de y sont 6. 12. 18. 24. &c.

$$\begin{array}{r} 23\,x \\ 13\,x + 8\,z \\ \hline 10\,x - 8\,z \\ \hline 3\,x + 16\,z \\ 9\,x + 48\,z \\ \hline x - 56\,z \\ x - 10\,z \end{array}$$

Soit enfin $\frac{34x + 8z}{51}$ je cherche la plus grande commune mesure de 34 & de 51, qui est 17, & je cherche à 8 & 17 le plus petit produit divisible, & d'autant qu'ils sont premiers, je prends $z = 17$, & $8z = 8 \times 17$, ainsi la plus petite égalité est $\frac{34x + 8 \times 17}{51}$, ou $\frac{2x + 8}{3}$, donc la valeur de x est 8. 16. 24. &c.

Quatriéme cas pour la formule $y = \frac{q - ax}{p}$

Il n'y a jamais qu'un certain nombre de ſolutions dans ce quatriéme cas, au lieu que les trois autres en ont une infinité. Soit l'égalité $y = \frac{200 - 7x}{13}$. 1°. on peut le réduire au ſecond cas, ajoutant $+ 13x$ au numérateur, ce qui donne $\frac{200 + 6x}{13}$, enſuite ôtant 13 de 200 autant de fois qu'il eſt poſſible, il reſte $\frac{5 + 6x}{13}$.

Or diviſant d'abord 200 par $7x$ on trouve que la valeur de x eſt au-deſſous de 19, & en réſoudant l'égalité $\frac{5 + 6x}{13}$, on trouve pour la plus petite valeur de x, 10 qui ſatisfait, car $200 - 7 \times 10 = 130$ qui eſt diviſible par 13.

$$\begin{array}{r} 13x \\ \hline 6x + 5 \\ 12x + 10 \\ \hline x - 10 \\ \hline \hline \end{array}$$

Les autres valeurs de x ſont 23. 36. 49. &c. mais d'autant qu'elles ſont plus grandes que 19, terme de la valeur, au-deſſus de laquelle x ne peut pas aller, elles ſont inutiles.

Autre Exemple. Soit $y = \frac{2873 + 23x}{41}$. Je diviſe d'abord 2873 par 23 pour avoir la limite au-deſſous, & je trouve 125.

Enſuite j'ajoute $41x$ à $- 23x$, & il me reſte $+ 18x$, je diviſe 2873 par 41, & il me reſte 3.

Ainſi j'ai l'égalité transformée $\frac{3 + 18}{41}$, j'opére ainſi,

$$
\begin{array}{r}
41\,x \\
18\,x + 3 \\
\hline
36\,x + 6 \\
\hline
5\,x - 6 \\
15\,x - 18 \\
\hline
3\,x + 21 \\
2\,x - 27 \\
\hline
x + 48
\end{array}
$$

réduit à $x + 7$ ou $x - 34$.

Cette opération me donne $x = 34$ qui satisfait, j'y ajoute 41 qui donne une seconde valeur de $x = 75$, & une troisiéme $x = 116$, qui satisfont toutes trois, les autres valeurs ne satisfont pas, parce qu'elles surpassent 125.

SECTION TROISIE'ME.

Des doubles égalitez du premier degré.

LEs doubles égalitez se peuvent toutes réduire à l'une des deux formules suivantes, après avoir réduit à même dénomination pour connoître si le Problême est impossible, pour ne pas calculer inutilement, il faut réduire les trois grandeurs a, b, p, à leurs moindres termes & si les deux grandeurs q & d ne sont pas divisibles par leur plus grande commune mesure, le Problême est impossible.

Formules $y = \frac{\mp a\,x \pm q}{p}$

$y = \frac{\pm b\,x \pm d}{p}$

Si le Problême est simplement indéterminé ; c'est-à-

dire qu'il y ait trois inconnuës & deux égalitez du premier degré, on pourra toujours après les substitutions faites, les réduire aux formules ci-dessus, & si les dénominateurs sont différens, il n'y a qu'à les multiplier en croix, & réduire à moindres termes par rapport au dénominateur commun, comme dans l'exemple ci-dessus, $y = \frac{19x + 18}{26}$ & $z = \frac{17x + 12}{26}$, après quoi il faut soustraire continuellement les numérateurs l'un de l'autre, ou diviser quand il est besoin, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à l'unité, ou à un diviseur commun, & que l'inconnuë soit évanoüie.

Divisez ensuite cet absolu par le dénominateur, & s'il ne le divise pas sans reste, le Problême est insoluble en nombres entiers, que s'il est divisible, le nombre absolu accompagnant l'inconnuë à l'unité, sera la valeur cherchée s'il est — ou sa différence au dénominateur s'il est +.

Exemple 1er. Soit le Problême ci-dessus $y = \frac{17x + 12}{26}$ & $z = \frac{19x + 18}{26}$ &c. on les résoudra comme ci-dessus.

Exemple 2d. Soit la double égalité.

$z = \frac{73507 - 137y}{143}$. $y < 538$ car $\frac{73507}{137} < 538$.

$x = \frac{8232y - 187726}{151}$. $y > 22$ car $\frac{18772}{8232} > 22$. Je rends tout positif, ajoutant à la premiére fraction $143y$ ce qui la transforme en $\frac{73507 + 6y}{143}$, ensuite ajoutant à la deuxiéme un nombre multiple de 151 prochainement plus grand que 187726, ce qui se trouve en divisant 187726, par 151, où sans avoir égard au quotient, je vois qu'il reste 33; c'est pourquoi je transforme la deuxiéme égalité en celle-ci $\frac{8232y + 33}{151}$, j'ôte ensuite de 73507 autant

tant de fois 143, qu'il est possible, il me reste $\frac{47 + 6y}{143}$ & faisant la même chose sur $\frac{8232y + 33}{151}$ par 151, j'ai la deuxiéme transformée $\frac{78y + 33}{151}$.

Enfin je réduis à même dénomination $\frac{47y + 6y}{143}$, & $\frac{78y + 33}{151}$, ce qui me donne $\frac{7097 + 906y}{21593}$, & $\frac{11154y + 4719}{21593}$ pour derniére préparation, après quoi je fais l'opération

$$\begin{array}{r} 11154y + 4719 \\ 906y + 7096 \\ \times\ 12 \\ \hline 10872y + 70960 + \\ + 14192 \\ \hline = 85152 \end{array}$$

dont j'ôte $\frac{21593}{3}$ autant de fois qu'il est possible, & ici il reste $\frac{64779}{21393}$ il reste donc 20373, dont la différence à 21593 est 1220.

$$\begin{array}{l} \quad 1220. \\ \hline 282y + 5939 \\ \times 3 \\ 906y + 4719 \\ 846y + 17817 \\ \hline '60y - 13098 \\ 240y - 52392 \\ \hline 42y \end{array}$$

ainsi de $11154y + 4719$
j'ôte $\quad 10872y - 1220$
il reste $\quad 282y + 5939.$

$$\begin{array}{r} 17817 \\ 4719 \\ \hline 13098 \end{array}$$

Remarquez, qu'on peut aisément comme ci-dessus réduire tous les cas à un seul, en ajoutant comme il est expliqué le dénominateur multiplié par l'inconnuë au nu-

mérateur, $y = \frac{ax + q}{p}$, & en divisant l'absolu par l'in-
$z = \frac{bx + d}{p}$

connuë, vous aurez les limites au-dessus & au-dessous desquelles doit être la valeur désirée.

SECTION QUATRIE'ME.

Des doubles égalitez plus qu'indéterminées.

NOus avons vû ci-dessus que pour les égalités simples indéterminées, il n'y avoit qu'une condition qui les rendoit impossibles ; mais pour les deux égalités semblablement indéterminés, il y en a deux, de sorte qu'en général il y a la moitié moins de Problêmes solubles en nombres entiers dans les doubles égalitez que dans les simples, & la raison en est bien claire, car il est deux fois plus difficile de satisfaire à deux conditions que de ne satisfaire qu'à une seule.

Par exemple, dans l'égalité simple $x = \frac{19y + 18}{26}$, il n'y a qu'à trouver y tel qu'étant multiplié par 19, & son produit augmenté de 18, la somme soit divisible par 26.

Mais dans la double égalité $x = \frac{19y + 18}{26}$
& $z = \frac{17y + 12}{26}$
il faut de plus que le même y multiplié par 17, & son produit étant augmenté de 12, la somme soit encore divisible par 26.

Or de tous les nombres qui peuvent servir au premier cas, & de tous ceux qui peuvent servir au second, il n'y en a que quelques-uns de communs à tous les deux,

& il peut arriver qu'il n'y en ait point du tout de communs.

Ainsi cherchant, par exemple, $x = \frac{19y + 18}{26}$

$\frac{19y + 10}{26}$ & $\frac{17y + 7}{26}$

$26y$	$26y$	713	$26y$
$19y + 10$	$17y + 7$	253	$19y + 18$
$7y - 10$	$9y - 7$	560	$7y - 18$
$14y - 20$	$18y - 14$	713	$14y - 36$
$5y + 30$	$y - 21$	24	$5y + 2$
$15y + 90$		689	$2y - 20$
$y + 6$		670	$4y - 14$
		43	$y + 16 = 26$
			$y = 10$

$y = 20 \ldots y = 21$
$y = 46 \ldots y = 47$
$y = 72 \ldots y = 73$
$y = 98 \ldots y = 99$

Or il est évident qu'il n'y a aucune valeur commune, & même d'autant que toutes les valeurs se font également par l'addition, si la premiére valeur ne se trouve pas égale, toutes les autres seront inégales ; il n'est donc pas nécessaire de faire aucune réduction à même dénomination, si l'on ne veut ; mais on peut séparément trouver les racines, & si leurs racines sont les mêmes, ou leur différence est égale à celle des dénominateurs réciproquement, ou telle qu'en ajoutant un certain nombre de fois le dénominateur de l'un à l'une, & un autre nombre de fois l'autre dénominateur à l'autre, la somme soit égale, le Probléme est soluble, & on trouvera toutes les valeurs possibles, en ajoutant continuellement à la plus petite valeur trouvée, le plus petit nombre mesuré par les dénominateurs.

Par Exemple. Soit $z = \frac{47x + 56}{67}$

$$y = \frac{42x + 253}{299}$$

1°. Il faut réduire le dénominateur à son plus petit nombre premier, comme si j'avois $\frac{60x+17}{335}$, j'écrirois simplement $\frac{60x+17}{335}$, parce que si un nombre est divisible par 335, il sera aussi divisible par 67.

J'opére ainsi. $x = 713$.

$$\begin{array}{l} 67x \\ 47x + 56 \\ \hline 20x - 56 \\ 40x - 112 \\ \hline 7x + 168 \\ 21x + 504 \\ 20x - 56 \\ \hline x + 560 \\ x + 24 = 67 \\ \hline 67 \end{array}$$

1re. valeur de $x = 43$

2e. valeur $x = 115$

$$\begin{array}{l} 42x + 253 \\ \hline 299. \\ 299x + 17 \\ \hline 42x + 253 \\ 294x + 1771 \\ \hline 5x - 1771 \\ 40x - 14168 \\ 2x + 14421 \\ 4x + 28842 \\ \hline x - 30613 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 25 \\ 2043 \\ 19987 \mid 66. \\ \hline 2999 \\ 29 \\ \\ 30613 \mid 102 \\ \hline 299 \end{array}$$

valeurs de la 1re. x.

$$\begin{array}{r} 43 \ldots\ldots = 43 \\ 43 + 67 = 110 \\ 43 + 2 \times 67 = 244 \\ 43 + 3 \times 67 = 311 \\ 43 + 4 \times 67 = 378 \\ 43 + 5 \times 67 = 445 \\ = 512 \\ = 579 \end{array}$$

valeurs de la 2e. x.

$$\begin{array}{r} 115 \ldots\ldots = 115 \\ 115 + 299 = 414 \\ 115 + 2 \times 299 = 713 \end{array}$$

valeur commune qui satisfait.

Donc en multipliant 299 par 2, & ajoûtant le produit à 11, on aura le nombre cherché.

On auroit pû trouver la valeur commune ſans induction, en faiſant $43 + 67x = 115 + 299y$

Donc $x = \frac{299y + 115 - 43}{67}$

$x = \frac{299y + 72}{67}$

$x = \frac{31y + 5}{67}$

$67y$

$31y + 5$

$62y + 10$

$5y - 10$

$30y - 60$

$y + 65 =$ valeur commune.

$y = 2$.

Pour avoir toutes les valeurs poſſibles.

$713 + 67y \left\{ 713 + 299z \right.$

D'autant que 67 & 299 ſont premiers entr'eux, il eſt évident que le plus petit nombre où ils peuvent ſe rencontrer eſt le produit de 67×299, augmenté de 713. Ainſi la deuxiéme valeur de x eſt $713 + 67 \times 299 = 20746$.

La troiſiéme valeur eſt $713 + \underline{2 \times 67} \times 299 = 40779$. &c.

La quatriéme eſt $713 + \underline{3 \times 67} \times 299$ &c. & ainſi de ſuite à l'infini.

67	870
299	145
603	1015
603.	
134	
20033	
713	
40066	

Autre Exemple. Soit la double égalité plus que déterminée. $\frac{17x + 87}{29} = z$, & $\frac{15x + 5y}{29} = u$.

Donc $\frac{x - 16y}{39}$ & $\frac{35y}{29}$

Or d'autant que 35 & 29 sont premiers entr'eux. Soit $y = 29$ la plus petite valeur. Donc $\frac{x - 16y}{29} = o$

$$\begin{array}{r} 2x + 3y \\ 14x + 21y \\ \hline x - 16y \\ 2x - 32y \\ \hline + 35y \end{array}$$

ou $\frac{x + 14y}{29} = m$.

Et d'autant que y peut être 29 pour sa plus petite valeur, & posant

$$\begin{array}{r} 8y + 17x \\ 5y + 15x \\ \hline 3y + 2x \\ 2y + 13x \\ \hline y - 11x \\ 2y - 22x \\ \hline 35x \end{array}$$

généralement continuez la soustraction jusqu'à la plus grande commune mesure trouvée, & divisez l'absolu par cette commune mesure, le quotient si c'est — sera la plus petite valeur possible en nombres entiers, si c'est + sa différence au dénominateur ; mais si la division ne peut pas se faire en entiers, le Problême est *insoluble*.

Exemple. Soit $\frac{60x + 12}{96}$, on trouve $12x - 36$, divisant 36 par 12, le quotient $3 = x$.

Ou plus facilement. Trouvez séparément la valeur de chaque membre de la double égalité & formez ensuite une égalité simple.

Exemple. Soit l'égalité double $15x - 10 = 28y$ & $15x - 9 = 19z$. Donc $y = \frac{15x - 10}{28}$ & $z = \frac{15x - 9}{19}$.

Je cherche x par la premiére égalité comme il suit, & ensuite par la deuxiéme égalité.

Valeur de x

Par la premiére égalité.

$28x$
$15x - 10$

$13x + 10$
$2x - 20$, ou $+ 8$
$12x + 48$, ou $+ 20$

$x - 10 = 0$
donc $x = 10$.

Par la seconde égalité

$19x$
$15x - 9$

$4x + 9$
$16x + 36$, ou $+ 17$

$x + 7 = 19$
donc $x = 12$.

Les deux valeurs de x ſont 10, & 12. Je poſe donc $10 + 28t = 12 + 19u$. Donc $t = \frac{19u + 2}{28}$.

$28u$
$19u + 2$

$9u - 2$
$18u - 4$
$u + 6 = 28$. Donc $u = 22$, laquelle valeur étant ſubſtituée dans l'égalité $12 + 19u$, on aura $430 = x$. Valeur cherchée la plus petite qu'il ſoit poſſible.

Pour avoir toutes les autres valeurs, on n'a qu'à ajoûter à 430 le produit de 28×19, c'eſt 532; ainſi la deuxiéme valeur eſt 962. La troiſiéme 1494. & ainſi à l'infini.

SECTION CINQUIE'ME.

Des triples & quadruples égalitez & autres à l'infini.

1°. CHerchez ſéparément les valeurs de la premiére & de la ſeconde, & formez-en une égalité réſultante, qui donnera les valeurs communes, s'il eſt poſſible pour les deux égalitez comme ci-deſſus.

2°. Cherchez ensuite la valeur de la troisiéme égalité & formez-en une quatriéme avec l'égalité résultante, & elle donnera toutes les valeurs possibles qui satisferont aux trois égalitez proposées, ainsi de suite s'il y a quatre, cinq, &c. ou plusieurs égalitez.

Remarquez, que lorsque toutes les égalitez ou plusieurs, ont chacune le même dénominateur, le Problême est beaucoup plus aisé, & qu'on en découvre plus facilement l'impossibilité.

SECTION SIXIE'ME

Des égalitez où l'inconnuë est dans le dénominateur.

Exemple. Soit $y = \frac{7a + 153}{9a + 18}$, donc $2a < 153$.

Si $y = 1 \ldots \left\{ \begin{array}{l} 11a = 117 \\ 20a = 99 \end{array} \right.$

Si $y = 2 \ldots\ldots 47a = 55 \ldots 56a = 37$ impossible.

Si $y = 3 \ldots\ldots 29a = 81 \ldots 38a = 73$

Donc 1503 est divisible par $9a - 18$.

$2 + 9z = 153 - 18z$.

$27z = 151 - 18$.

Donc $9az = 1503 + 18z$.

C'est-à-dire qu'ajoûtant à 1503 un multiple de 18, la somme doit être divisible par 9.

Or ici, d'autant que 18 se trouve divisible lui-même, il faut que 1503 le soit par lui-même.

Donc $a = 169$.

Preuve. $7a = 1183$

$+ \ldots\ldots 153$

$= 1336$

$9a = 1521$

$- 18$

$= 1503$

xx +

$\frac{xx+2}{5} = y$ eſt impoſſible, parce que quelque nombre que je prenne pour y, $5y$ ſera terminé par 5 ou par 0 : ſi c'eſt par 5, donc $xx + 2 = a$, eſt un nombre terminé par 5. Donc ôtant 2 de part & d'autre $xx = a$, ſera un nombre terminé par 3, ce qui eſt impoſſible. Si $5y$ eſt terminé par 0, de même $xx = a$ ſera un nombre terminé par 8, ce qui eſt auſſi impoſſible. De même $\frac{xx+3}{5} = y$, car il reſte 2 ou 7.

Or $9a + 18$ eſt diviſible & ſon multiple auſſi par 124; ſçavoir, $1116a + 2232 = \frac{1112a}{9}$ à peu près ou plus grand. Donc $4a + 2232$ & ſon multiple par $\frac{1112}{4}$ $= 278 = \frac{1112a}{9} +$.

Soit $\frac{7a+284}{9a+8} = y$.

Si $y = 1$. Donc $2a = 284 - 8$

$a = 138$.

Soit $\frac{7a+909}{9a+8}$.

Donc par transformation $2a + 9z = 909 - 8z - 8$.

Donc $17z = 899$

$\frac{899}{17}$ | 52 $\frac{15}{17} = z$

$9ay + 8y = 7a + 909$

$\frac{909 - 8y}{9y - 7}$

$\frac{901 - 8z}{9z + 2}$ transformée de $\frac{7a+909}{9a+8}$

Si $y = 1$.

$2a = 909 - 8$

Si $y = 2$

$2a + 9a = 909 - 16$

Si $y = 3$

$2a + 18a = 909 - 24$

Si $y = 8$, & $z = 7$

$2a + 63a = 909 - 64$

ou $907 - 56 - 8$.

$65a = 845$

$a = 13$.

$\frac{903+z}{9z+2}$ tranformée de $8xy + 5y = 3237$

donc $8x + 5 = \frac{3237}{y}$.

Il faut prendre garde exactement, que les multiples peuvent être divisibles sans que le simple le soit.

REMARQUE GE'NE'RALE,

Sur les Problêmes plus que déterminez.

Les Problêmes plus que déterminez sont ceux où il y a plus d'équations formées sur les conditions du Problême qu'il n'y a de lettres ou de grandeurs inconnuës; de sorte que la même grandeur inconnuë se trouve seule, mais avec d'autres grandeurs connuës dans deux ou plusieurs équations différentes où elle se trouve élevée, ou au même degré ou à des degrez différens.

Comme nous avons eu besoin de résoudre ces sortes de Problêmes dans la Méthode d'approximation pour trouver une valeur rationelle de x en comparant les deux sommes alternatives; on peut voir ce que nous avons dit sur ce sujet dans la premiére Section du second Livre, depuis la page 334 jusqu'à la page 394, & sur-tout dans le Théorême fondamental page 349.

Nous avons donné deux Méthodes & nous les avons appliqué au même exemple, ce qui suffit, mais nous avons ajoûté ici ce titre pour ne rien oublier des trois especes des Problêmes.

CONCLUSION.

Nous avons donné dans cette Analyse la résolution en nombres entiers de tous les Problêmes de tous les genres & de tous les degrez dans les cas où cela est possible.

Et dans les cas où cela n'est pas possible par la nature de la chose, comme il arrive dans les Problêmes déterminez qui se réduisent à des équations dont les racines

ſont irrationelles, leſquelles ne peuvent s'exprimer exactement par aucun nombre, mais ſeulement par deux nombres conſécutifs approchez l'un par excès & l'autre par défaut, nous avons donné trois Méthodes faciles pour trouver les ſéries infinies les plus promptes & les plus convergentes qui ſoient poſſibles, dont chacun des termes finis donnent cette approximation la plus approchée, & la plus approchée à l'infini avec la moindre différence poſſible, & l'infinitiéme terme ſoit de la ſérie par excès, ſoit de la ſérie par défaut donneroit exactement la racine déſirée; s'il étoit poſſible de l'exprimer en nombre quelconque.

Car tous les Problêmes en général de tous les degrez à l'infini ſe réduiſent à quatre genres, qui ſont déterminez, plus que déterminez, indéterminez, plus qu'indéterminez.

1°. Les Problêmes déterminez que l'on nomme auſſi les Equations; ce ſont les Problêmes où il n'y a qu'une ſeule inconnuë & une ſeule ſolution dans le premier degré, deux ſolutions dans le ſecond degré, trois ſolutions dans le troiſiéme degré; c'eſt-à-dire que ces Problêmes ont un nombre déterminé de ſolutions égal à l'expoſant de la haute puiſſance de l'inconnuë & jamais davantage.

Or nous avons réſolu tous ces Problêmes dans les deux premiers livres de cette Analyſe dans tous les cas; puiſque nous avons donné pluſieurs Méthodes dans le premier livre pour réſoudre les Problêmes déterminez, ou les équations de tous les degrez à l'infini, dans le premier cas où les racines ſont rationelles, ſoit réelles ſoit imaginaires.

Le ſecond cas eſt celui où les racines ſont irrationelles, ſoit réelles, ſoit imaginaires, c'eſt le ſujet du livre ſecond qui contient trois Méthodes pour trouver ces racines irrationelles.

Le troiſiéme livre donne dans les trois premiéres

sections la résolution des Problêmes indéterminez qui sont le troisiéme genre des Problêmes, ce sont ceux qui ont une infinité de résolutions possibles.

3°. La quatriéme Section du troisiéme livre donne la résolution des Problêmes plus qu'indéterminez, qui sont le quatriéme genre des Problêmes; les Problêmes plus qu'indéterminez sont ceux qui se réduisent à plusieurs égalitez, dans lesquelles il n'y a qu'une condition qui les rend impossibles; mais au contraire les Problêmes plus qu'indéterminez, se réduisent à des égalitez où il y a deux conditions renfermées qui les rendent impossibles, & cependant il y a une infinité de solutions possibles dans ces deux genres de Problêmes, & c'est en cela qu'ils sont indéterminez.

4°. Les Problêmes plus que déterminez qui sont le second genre des Problêmes sont ceux, dont le nombre des solutions est non-seulement déterminé, en quoi ils conviennent avec le premier genre de Problêmes; mais outre cela ils renferment une condition qui restraint le nombre des solutions à une seule, rendant les autres impossibles, dont le nombre égaleroit l'exposant de la haute puissance de l'inconnuë, sans cette nouvelle condition, qui change leur nature, & qui d'un Problême déterminé, fait un Problême plus que déterminé & le restraint à une solution unique.

Comme nous avons expliqué fort en détail ce qui concerne ce second genre dans le cours de cet ouvrage, nous nous contentons d'une seule remarque générale sur la fin, page 610, pour avertir les endroits où ce détail est expliqué.

Ainsi cette Analyse générale contient des Méthodes pour résoudre tous les quatre genres de Problêmes, ce qui comprend tous les Problêmes possibles, & c'est tout tout ce qu'on peut désirer sur ce sujet.

FIN.



TABLE DES MATIERES

contenuës dans ce Volume.

L'ANALYSE GE'NE'RALE,

ou les Régles Générales de l'Analyse.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIE'RE.

SECTION DEUXIE'ME.

SECTION TROISIÈME.

SECTION SIXIE'ME.

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIE'RE.

SECTION SECONDE.

SECTION TROISIE'ME.

SECTION QUATRIE'ME

SECTION CINQUIÉME.

De l'Imprimerie de JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils, Imprimeur du Roi. 1742.